Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VIII** No. **3** Hal. 55 – 62
Edisi Desember 2019
ISSN : 2303–291X
©Jurusan Matematika FMIPA UNAND

B-ALJABAR

SELVIA HARVENIA, NOVA NOLIZA BAKAR, YANITA

Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : selviaharvenia20@gmail.com

Diterima 14 Oktober 2019 Direvisi 21 Oktober 2019 Dipublikasikan 3 Desember 2019

Abstrak. Pada struktur aljabar selain dikenal grup dan ring, juga dikenal istilah K-Aljabar. K-Aljabar dibangun dari suatu grup dengan menggunakan operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Berdasarkan grup pembangunnya K-Aljabar dibagi menjadi dua kelas, yaitu grup pembangun yang komutatif dan grup pembangun yang tidak komutatif. B-Aljabar merupakan kelas dari K-Aljabar dengan grup pembangun yang tidak komutatif. B-Aljabar dibangun dari suatu himpunan tak kosong dengan menggunakan operasi biner dan memuat unsur 0 yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Dari B-Aljabar dapat diperoleh banyak sifat-sifat B-Aljabar terhadap operasi biner yang sama. Pada B-aljabar juga terdapat sifat komutatif yang berbeda dengan sifat komutatif pada umumnya.

Kata Kunci: Grup, K-Aljabar, B-Aljabar

1. Pendahuluan

Y. Imai dan K. Iseki [5] memperkenalkan dua kelas aljabar abstrak: BCK-aljabar dan BCI aljabar, sedangkan Q. P. Hu dan X. Li [5] memperkenalkan BCH-aljabar. Pada struktur aljabar juga dikenal istilah K-Aljabar. K-Aljabar dibagi menjadi dua kelas besar berdasarkan grup pembangunnya, yang pertama, Q-Aljabar jika grup pembangun K-Aljabar adalah grup yang komutatif dimana Q-Aljabar bisa dibagi lagi menjadi beberapa kelas, yaitu BCH-Aljabar, BCK-Aljabar dan BCI-aljabar, dan yang kedua, B-Aljabar jika grup pembangun K-Aljabar adalah grup yang tidak komutatif. B-Aljabar merupakan suatu himpunan tak kosong yang memuat konstanta 0 dan dilengkapi dengan suatu operasi biner yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Pada tulisan ini akan diulas kembali sifat-sifat yang dimiliki oleh B-Aljabar [5].

2. Landasan Teori

2.1. *Himpunan dan Operasi Biner*

Himpunan adalah suatu kumpulan objek yang didefinisikan dengan jelas. Objek-objek dalam himpunan tersebut dinamakan anggota himpunan [6]. Secara mate-

matika, himpunan dapat dinyatakan dengan tanda kurung kurawal ,{}, dan digunakan notasi huruf besar.

Operasi biner $*$ pada suatu himpunan S adalah suatu aturan yang menetapkan setiap pasangan terurut (a,b) dari elemen-elemen di S ke suatu elemen di S [2]. Operasi biner $*$ pada himpunan S dikatakan tertutup jika $a * b \in S,\ \forall a, b \in S$ [6]. Operasi biner $*$ pada himpunan S dikatakan komutatif jika $a * b = b * a,\ \forall a, b \in S$ [2]. Operasi biner $*$ pada himpunan S dikatakan assosiatif jika $(a * b) * c = a * (b * c),\ \forall a, b, c \in S$ [2].

2.2. *Tabel Cayley dan Grup*

Tabel Cayley dirancang oleh seorang ahli matematika Inggris abad ke-19, Arthur Cayley [4]. Tabel Cayley merupakan salah satu cara untuk mendefinisikan operasi biner pada himpunan, khususnya himpunan berhingga.

Misalkan $A = \{x, y, z\}$ dengan operasi biner $*$ didefinisikan dengan tabel berikut.

$*$	x	y	z
x	y	z	y
y	x	z	y
z	z	y	x

Elemen yang dioperasikan terletak pada baris dan kolom pertama. Hasil operasi elemen A dinyatakan dalam bujur sangkar yang berada di dalam tabel, mulai dari baris dan kolom kedua [4].

Definisi 2.1. [3] *Himpunan tak kosong X dikatakan membentuk grup terhadap suatu operasi biner $*$, jika X terhadap operasi $*$ memenuhi:*

(1) $\forall a, b \in X$ *berlaku* $a * b \in X$ *(tertutup),*
(2) $\forall a, b, c \in X$ *berlaku* $(a * b) * c = a * (b * c)$ *(asosiatif),*
(3) $\exists e \in X$ *sehingga* $\forall a \in X$ *berlaku* $a * e = e * a = a$ *(ada unsur identitas),*
(4) $\forall a \in X$*, terdapat unsur* $a^{-1} \in X$ *sehingga berlaku* $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ *(a^{-1} disebut invers dari a).*

3. Pembahasan

3.1. *Definisi Sifat-Sifat pada B-Aljabar*

Definisi 3.1. [5] *Suatu himpunan tak kosong X yang memuat konstanta 0 dan dilengkapi dengan suatu operasi biner "$*$", ditulis $(X, *, 0)$, disebut B-Aljabar jika $\forall x, y, z \in X$, memenuhi:*
(I) $x * x = 0$
(II) $x * 0 = x$
(III) $(x * y) * z = x * (z * (0 * y))$.

Lema 3.2. [5] *Misalkan $(X, *, 0)$ suatu B-Aljabar, maka untuk sebarang $y, z \in X$ berlaku* $y * z = y * (0 * (0 * z))$.

Bukti. Ambil $y, z \in X$. Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} y * z &= (y * z) * 0 \\ &= y * (0 * (0 * z)). \end{aligned}$$

Jadi, karena Definisi 3.1(II) dan (III), maka Lema 3.2 terbukti. □

Lema 3.3. [5] *Misalkan* $(X, *, 0)$ *suatu B-Aljabar, maka untuk sebarang* $x, y \in X$ *berlaku* $(x * y) * (0 * y) = x$.

Bukti. Ambil $x, y \in X$, perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} (x * y) * (0 * y) &= x * ((0 * y) * (0 * y)) \\ &= x * 0 \\ &= x. \end{aligned}$$

□

Lema 3.4. [5] *Misalkan* $(X, *, 0)$ *suatu B-Aljabar, untuk sebarang* $x, y, z \in X$ *yang memenuhi* $x * z = y * z$ *berlaku* $x = y$.

Bukti. Ambil $x, y, z \in X$, perhatikan bahwa:
misalkan,

$$\begin{aligned} x * z = y * z, \quad maka : \\ (x * z) * (0 * z) = (y * z) * (0 * z) \\ x = y. \end{aligned}$$

□

Proposisi 3.5. [5] *Misalkan* $(X, *, 0)$ *suatu B-Aljabar, maka untuk sebarang* $x, y, z \in X$ *berlaku* $x * (y * z) = (x * (0 * z)) * y$.

Bukti. Ambil $x, y, z \in X$, perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= x * ((y * z) * 0) \\ &= x * (y * (0 * (0 * z))) \\ &= (x * (0 * z)) * y. \end{aligned}$$

□

Lema 3.6. [5] *Misalkan* $(X, *, 0)$ *suatu B-Aljabar, maka untuk sebarang* $x, y \in X$ *berlaku,*

(1) Jika $x * y = 0$ *maka* $x = y$,
(2) Jika $0 * x = 0 * y$ *maka* $x = y$,
(3) $0 * (0 * x) = x$.

Bukti.

(1) Ambil $x, y \in X$, perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} x * y &= 0 \\ x * y &= y * y \\ x &= y. \end{aligned}$$

(2) Ambil $x, y \in X$, perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} 0 &= x * x \\ &= (x * x) * 0 \\ &= x * (0 * (0 * x)) \\ &= x * (0 * (0 * y)) \\ &= x * y. \end{aligned}$$

Karena $x * y = 0$, maka berdasarkan (1) $x = y$.

(3) Ambil $x, y \in X$, perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} 0 * (0 * x) &= x * x * (x * x * x) \\ &= x * x * (x * 0) \\ &= x * x * x \\ &= x * 0 \\ &= x. \end{aligned}$$

□

Definisi 3.7. [5] *Misalkan* $(X, *, 0)$ *suatu B-Aljabar dan* $g \in X$*, maka* $g^n := g^{n-1} * (0 * g)$ *dan* $g^0 := 0$ *dengan* $n \in \mathbb{N}$.

Dari Definisi 3.7 dapat diperoleh:

$$\begin{aligned} g^1 &= g^0 * (0 * g) \\ &= 0 * (0 * g) \\ &= g. \end{aligned}$$

Teorema 3.8. [5] *Misalkan* $(X, *, 0)$ *suatu B-Aljabar dan* $g \in X$*, maka berlaku* $g^m * g^n = \begin{cases} g^{m-n} & \text{jika } m \geq n, \\ 0 * g^{n-m} & \text{selainnya} \end{cases}$. *dimana* $m, n \in \mathbb{N}$.

Bukti. Ambil $g \in X$. Perhatikan bahwa:
• Untuk $m \geq n$.

A. Akan dibuktikan benar untuk $m = 1, n = 1$.

$$\begin{aligned} g^1 * g^1 &= g * g \\ &= 0 \\ &= g^0. \end{aligned}$$

B. Asumsikan benar untuk $g^m * g^k = g^{m-k}$, $m \geq k$.
Akan ditunjukkan berlaku untuk $m \geq k + 1$, $n = k + 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} g^m * g^{k+1} &= g^m * (g^k * (0 * g)) \\ &= (g^m * g) * g^k \\ &= g^{m-1} * g^k \\ &= g^{m-1-k} \\ &= g^{m-(k+1)}. \end{aligned}$$

Berdasarkan A dan B terbukti bahwa $g^m * g^n = g^{m-n}$, $m \geq n$.

- Untuk $m < n$.

A. Akan dibuktikan benar untuk $m = 1$, $n = 2$.
Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} g * g^2 &= g * (g^1 * (0 * g)) \\ &= (g * g) * g^1 \\ &= 0 * g. \end{aligned}$$

B. Asumsikan benar untuk $g^k * g^n = 0 * g^{n-k}$, $n \geq k$.
Akan ditunjukkan benar untuk $m = k + 1$, $n \geq k + 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} g^{k+1} * g^n &= (g^k * (0 * g)) * g^n \\ &= g^k * (g^n * (0 * (0 * g))) \\ &= g^k * ((g^n * g) * 0) \\ &= g^k * (g^n * g) \\ &= g^k * g^{n-1} \\ &= 0 * g^{k-n-1} \\ &= 0 * g^{n-k-1} \\ &= 0 * g^{n-(k+1)} \end{aligned}$$

Berdasarkan A dan B terbukti bahwa $g^m * g^n = 0 * g^{n-m}, n < m$. □

Proposisi 3.9. [5] *Misalkan* $(X, *, 0)$ *suatu B-Aljabar maka untuk sebarang* $a, b \in X$ *berlaku* $(a * b) * b = a * b^2$.

Bukti. Ambil $a, b \in X$, perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} (a * b) * b &= a * (b * (0 * b)) \\ &= a * b^2. \end{aligned}$$

□

Proposisi 3.10. [5] *Misalkan* $(X, *, 0)$ *suatu B-Aljabar maka untuk sebarang* $a, b \in X$ *berlaku* $(0 * b) * (a * b) = 0 * a$.

Bukti. Ambil $a, b \in X$, perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}(0*b)*(a*b) &= (0*b)*[(a*b)*0] \\ &= (0*b)*[a*(0*(0*b))] \\ &= ((0*b)*(0*b))*a \\ &= 0*a.\end{aligned}$$

□

Proposisi 3.11. [1] *Misalkan himpunan tak kosong X terhadap suatu operasi biner $\circ$, ditulis $(X, \circ, 0)$ merupakan suatu grup. Jika didefinisikan $x * y = x \circ y^{-1}$, maka $(X, *, 0)$ merupakan suatu B-Aljabar.*

Bukti. Ambil $x, y, z \in X$, perhatikan bahwa :

I. $x * x = x \circ x^{-1} = 0$.
II. $x * 0 = x \circ 0^{-1} = x \circ 0 = x$.
III. Untuk setiap $x, y, z \in X$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned}(x*y)*z &= (x \circ y^{-1})*z \\ &= (x \circ y^{-1}) \circ z^{-1} \\ &= x \circ (y^{-1} \circ z^{-1}) \\ &= x \circ (z \circ y)^{-1} \\ &= x*(z \circ y) \\ &= x*(z*y^{-1}) \\ &= x*(z*(0 \circ y^{-1}) \\ &= x*(z*(0*y)).\end{aligned}$$

Berdasarkan I, II, dan III maka Proposisi 3.11 terbukti. □

3.2. *Sifat Komutatif B-Aljabar*

Definisi 3.12. [5] *Suatu B-Aljabar $(X, *, 0)$ dikatakan komutatif jika untuk sebarang $a, b \in X$ berlaku $a*(0*b) = b*(0*a)$.*

Proposisi 3.13. [5] *Misalkan $(X, *, 0)$ suatu B-Aljabar yang komutatif, maka untuk sebarang $x, y \in X$ berlaku $(0*x)*(0*y) = y*x$.*

Bukti. Ambil $x, y \in X$, perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}(0*x)*(0*y) &= y*(0*(0*x)) \\ &= y*x.\end{aligned}$$

□

Teorema 3.14. [5] *Misalkan $(X, *, 0)$ suatu B-Aljabar yang komutatif, maka untuk sebarang $a, b \in X$ berlaku $a*(a*b) = b$.*

Bukti. Ambil $a, b \in X$, perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} a * (a * b) &= (a * (0 * b)) * a \\ &= (b * (0 * a)) * a \\ &= b * (a * a) \\ &= b * 0 \\ &= b. \end{aligned}$$

□

Akibat 3.15. [5] *Misalkan* $(X, *, 0)$ *suatu B-Aljabar yang komutatif, maka berlaku hukum pembatalan kiri yaitu:* $a * b = a * b'$ *mengakibatkan* $b = b'$.

Bukti. Ambil $a, b \in X$, perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} b &= a * (a * b) \\ &= a * (a * b') \\ &= b'. \end{aligned}$$

□

Proposisi 3.16. [5] *Misalkan* $(X, *, 0)$ *suatu B-Aljabar yang komutatif, maka untuk sebarang* $a, b \in X$ *berlaku* $(0 * a) * (0 * b) = b * a^2$.

Bukti. Ambil $a, b \in X$, perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} (0 * a) * (0 * b) &= ((0 * a) * (0 * b)) * a \\ &= (b * a) * a \\ &= b * a^2. \end{aligned}$$

□

4. Kesimpulan

Sifat komutatif pada B-Aljabar berbeda dengan definisi komutatif pada umumnya, yaitu: Definisi komutatif pada umumnya merupakan sifat pertukaran dua bilangan pada operasi hitung(penjumlahan/perkalian), dimana dua bilangan yang ditukar letak tersebut memiliki hasil yang sama. Secara umum, bentuk umum dari sifat komutatif adalah $a * b = b * a$ untuk sebarang bilangan a, b. Sedangkan, definisi komutatif pada B-Aljabar bukan merupakan pertukaran letak dari dua unsur sehingga memiliki hasil yang sama. Sifat komutatif pada B-Aljabar yaitu $a*(0*b) = b*(0*a)$ untuk sebarang $a, b \in X$.

5. Ucapan Terima kasih

Terimakasih kepada bapak Dr. Admi Nazra, ibu Monika Rianti Helmi, M.Si, dan ibu Dr. Haripamyu selaku dosen penguji tugas akhir yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Allen, P.J, J. Neggers dan H.S. Kim. 2003. *B − Algebra And Groups. Scientiae Mathematicae Japanicae Online* **9**: 159 – 165

[2] Fraleigh, J.B. 1994.*A First Course in Abstract Algebra*. Addison-Wesley Publishing Company Inc
[3] Herstein, I.N.1999.*Topics In Algebra*. John Wiley and Sons, Inc
[4] Kirtland, J. 2001. *Identification Number and Check Digit Schemes*. Mathematical Association of America
[5] Neggers, J. dan H.S. Kim.2002. On B-Algebras. *Mate Vesnik*, **54**: 21 – 29
[6] Setiawan, A. 2011. *Aljabar Abstrak Teori Grup dan Teori Ring*. Universitas Kristen Satya Wacana.