Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VIII** No. **3** Hal. 63 – 67
Edisi Desember 2019
ISSN : 2303–291X

NILAI p-*ADIC* GAUSS NORM DARI SUATU POLINOMIAL

SITI AZHURA, YANITA, MONIKA RIANTI HELMI
Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : sitiazhura32@gmail.com

Diterima 14 Oktober 2019 Direvisi 21 Oktober 2019 Dipublikasikan 3 Desember 2019

Abstrak. p-adic Gauss norm didefinisikan pada suatu polinomial primitif di $\mathbb{Z}[X]$, yaitu faktor persekutuan terbesar dari semua koefisien polinomial tersebut adalah 1. Misalkan $f(x)$ suatu polinomial di $\mathbb{Q}[X]$, nilai maksimum masing-masing p-adic norm dari semua koefisien dari $f(x)$ disebut dengan p-adic Gauss norm. Oleh karena p-adic Gauss norm didefinisikan untuk suatu polinomial di $\mathbb{Q}[X]$, maka pada penelitian ini dikaji bagaimana nilai p-adic Gauss norm dari suatu polinomial primitif di $\mathbb{Z}[X]$.

Kata Kunci: polinomial primitif, p-adic norm, p-adic Gauss norm

1. Pendahuluan

Ring adalah struktur aljabar dengan satu himpunan dan dua operasi yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Salah satu bentuk *ring* adalah *ring* polinomial. *Ring* polinomial dinotasikan dengan $R[X]$ ditulis dalam bentuk

$$R[X] = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n | a_i \in R\}$$

dengan a_i adalah koefisien dari variabel x untuk semua $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1,\ n$, sedangkan a_0 adalah konstanta.

Himpunan polinomial dengan koefisien di $\mathbb{R}$ disimbolkan dengan $\mathbb{R}[X]$, koefisien di $\mathbb{Z}$ disimbolkan dengan $\mathbb{Z}[X]$ dan koefisien di $\mathbb{Q}$ disimbolkan dengan $\mathbb{Q}[X]$. Jika faktor persekutuan terbesar dari semua koefisien polinomial di $\mathbb{Z}[X]$ adalah 1 maka disebut polinomial primitif [2].

Pada teori bilangan, suatu *norm* untuk bilangan rasional tak nol di-sebut $p-adic$ nilai mutlak ($p - adic\ norm$). Misalkan $f(x)$ suatu polinomial di $\mathbb{Q}[X]$, nilai maksimum masing-masing $p - adic\ norm$ dari semua koefisien di $f(x)$ disebut dengan $p - adic\ Gauss\ norm$ [3].

Oleh karena $p-adic\ Gauss\ norm$ didefinisikan untuk suatu polinomial di $\mathbb{Q}[X]$, maka pada tugas akhir ini akan membahas tentang bagaimana $p-adic\ Gauss\ norm$ pada polinomial primitif di $\mathbb{Z}[X]$.

2. Landasan Teori

Definisi 2.1. [5] *Misal R suatu ring komutatif.*

$R[X] = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 | a_i \in R,\ n$ *adalah bilangan bulat non-negatif* $\}$

merupakan himpunan yang memuat semua polinomial atas R dalam variabel tak tentu x. Dua elemen $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ dan $b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ di $R[X]$ dikatakan sama jika dan hanya jika $a_i = b_i$ untuk semua bilangan bulat non-negatif i.

Definisi 2.2. [8] *Misalkan R adalah ring. Jika $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ dan $g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$ maka*

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots \tag{2.1}$$

$$f(x)g(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots \tag{2.2}$$

dimana untuk $u_0 = a_0 b_0$, $u_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$, $u_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$ dan seterusnya.

Definisi 2.3. [2] *Misal $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ adalah polinomial di $\mathbb{Z}[X]$ disebut primitif, jika gcd dari $a_0, a_1, \cdots, a_n$ adalah 1.*

Definisi 2.4. [2] *Konten dari polinomial $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, dimana $a_i \in \mathbb{Z}$ adalah gcd dari bilangan bulat $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$.*

Pada bagian ini akan dibahas tentang $p-$ *adic norm.*

Definisi 2.5. [1] *Suatu fungsi*

$$N : R \to \mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} : r \geqslant 0\}$$

disebut norm di R jika memenuhi sifat :

(i) $N(x) = 0$ *jika dan hanya jika* $x = 0$;
(ii) $N(xy) = N(x)N(y)\ \forall x, y \in R$;
(iii) $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)\ \forall x, y \in R$.

Definisi 2.6. [1] *Jika $0 \neq x \in \mathbb{Z}$ dan p bilangan prima, p-adic ordinal (valution) dari x adalah*

$$ord_p x = \max\{r; p^r | x\}, r \in \mathbb{Z} \tag{2.3}$$

jika $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, maka p-adic ordinal dari $\frac{a}{b}$ adalah

$$ord_p \frac{a}{b} = ord_p a - ord_p b. \tag{2.4}$$

Definisi 2.7. [1] *Untuk $x \in \mathbb{Q}$ dan p bilangan prima, $p-$ adic norm adalah fungsi $|.|_p : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai*

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-ord_p x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

3. Pembahasan

Pada bagian ini akan dibahas tentang $p-adic\ Gauss\ norm$ suatu polinomial di *ring* polinomial $\mathbb{Z}[X]$.

Definisi 3.1. [3] *Suatu polinomial* $f(x) = \Sigma a_i x^i$ *di* $\mathbb{Q}[X]$, $i = 0, 1, \cdots, n$ *dan* p *bilangan prima, didefinisikan p-adic Gauss norm dari* $f(x)$ *menjadi* $\mid f \mid_p = max\{\mid a_i \mid_p\}$.

Teorema 3.2. [3] *Untuk* $f(x)$ *dan* $g(x)$ *di* $\mathbb{Q}[X]$, $\mid fg \mid_p = \mid f \mid_p \mid g \mid_p$.

Bukti. Asumsikan $f(x)$ dan $g(x)$ memiliki koefisien tak nol sehingga $\mid f \mid_p > 0$ dan $\mid g \mid_p > 0$. Misalkan $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ dan $g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$, karena $\mid fg \mid \leq \mid f \mid_p \mid g \mid_p$, akan ditunjukkan $\mid fg \mid_p = \mid f \mid_p \mid g \mid_p$ dengan menentukan koefisien dari $f(x)g(x)$ yang memiliki nilai mutlak $\mid f \mid_p \mid g \mid_p$ yang maksimal, akan ditinjau dari dua kasus.
Kasus 1.
Koefisien nilai mutlak maksimal di $f(x)$ dan $g(x)$ terjadi di awal. Pilih $|f|_p = |a_M|_p$ dan $|g|_p = |b_N|_p$, sedemikian sehingga $|a_M|_p < |a_m|_p$ dan $|b_N|_p < |b_n|_p$ dengan $m < M$ dan $n < N$ untuk M dan N minimal.

Koefisien dari $f(x)g(x)$ dengan nilai mutlak $|f|_p|g|_p$ yang maksimal terjadi pada variabel x dengan pangkat $M+N$. Koefisien di x^{M+N} adalah $\sum_{m=0}^{M+N} a_m b_{M+N-m}$. Pada saat $m = M$ koefisien di x^{M+N} adalah $a_M b_N$ dan saat $m \neq M$, yaitu untuk $0 \leqslant m < M$ maka $\mid a_m b_{M+N-m} \mid_p = \mid a_m \mid_p \mid b_{M+N-m} \mid_p \leqslant \mid a_m \mid_p \mid g \mid_p = \mid a_m \mid_p \mid b_N \mid_p < \mid a_M \mid_p \mid b_N \mid_p$ dan untuk $M < m \leqslant M+N$ diperoleh $0 \leqslant M+N-m < N$ maka $|a_m b_{M+N-m} \mid_p = \mid a_m \mid_p \mid b_{M+N-m} \mid_p \leqslant \mid f \mid_p \mid b_{M+N-m} \mid_p = \mid a_M \mid_p \mid b_{M+N-m} \mid_p < \mid a_M \mid_p \mid b_N \mid_p$, sehingga diperoleh $\mid a_m b_{M+N-m} \mid_p < \mid a_M b_N \mid_p$ untuk $0 \leqslant m < M+N$. Oleh karena itu berdasarkan Definisi 3.1 maka diperoleh $\mid \sum_{m=0}^{M+N} a_m b_{M+N-m} \mid_p = \mid a_M b_N \mid_p = \mid a_M \mid_p \mid b_N \mid_p = \mid f \mid_p \mid g \mid_p$.
Kasus 2.
Koefisien nilai mutlak maksimal di $f(x)$ dan $g(x)$ terjadi di akhir. Pilih $|f|_p = |a_M|_p$ dan $|g|_p = |b_N|_p$, sedemikian sehingga $|a_M|_p < |a_m|_p$ dan $|b_N|_p < |b_n|_p$ dengan $m < M$ dan $n < N$ untuk M dan N minimal, sehingga diperoleh $\mid f \mid_p = \mid a_M \mid_p$ dan $\mid g \mid_p = \mid b_N \mid_p$.

Koefisien dari $f(x)g(x)$ dengan nilai mutlak $|f|_p|g|_p$ yang maksimal terjadi di variabel x pangkat $M+N$. Koefisien dari x^{M+N} adalah $\sum_{m=0}^{M+N} a_m b_{M+N-m}$. Pada saat $m = M$ koefisien dari x^{M+N} adalah $a_M b_N$ dan saat $m \neq M$, yaitu jika $0 \leqslant m < M$ maka $M+N-m > N$ maka $\mid a_m b_{M+N-m} \mid_p = \mid a_m \mid_p \mid b_{M+N-m} \mid_p \leqslant \mid f \mid_p \mid b_{M+N-m} \mid_p = \mid a_m \mid_p \mid b_{M+N-n} \mid_p < \mid a_M \mid_p \mid b_N \mid_p$ dan untuk $M < m \leqslant M+N$ maka $\mid a_m b_{M+N-m} \mid_p = \mid a_m \mid_p \mid b_{M+N-m} \mid_p \leqslant \mid a_m \mid_p \mid g \mid_p = \mid a_m \mid_p \mid b_N \mid_p < \mid a_M \mid_p \mid b_N \mid_p$, sehingga diperoleh $\mid a_m b_{M+N-m} \mid_p < \mid a_M b_N \mid_p$ untuk $0 \leqslant m < M+N$ dimana $m \neq M$. Oleh karena itu berdasarkan Definisi 3.1 maka diperoleh $\mid \sum_{m=0}^{M+N} a_m b_{M+N-m} \mid_p = \mid a_M b_N \mid_p = \mid a_M \mid_p \mid b_N \mid_p = \mid f \mid_p \mid g \mid_p$. □

Teorema 3.3. [3] *Sebuah polinomial* $f(x)$ *di* $\mathbb{Q}[X]$ *adalah primitif di* $\mathbb{Z}[X]$ *jika dan hanya jika* $|f|_p = 1$ *untuk semua bilangan prima* p.

Bukti. $\Rightarrow$ Diketahui $f(x)$ adalah primitif di $\mathbb{Z}[X]$. Akan ditunjukkan $|f|_p = 1$, karena $f(x)$ adalah primitif di $\mathbb{Z}[X]$ maka berdasarkan Definisi 2.3 maka *gcd* dari $f(x)$ adalah 1. Semua koefisien dari $f(x)$ adalah bilangan bulat dan tidak semua dapat dibagi dengan p. Misal $x = a_0, a_1, \cdots, a_m$ sehingga $ord_p x \geqslant 1$, akan dicari $p - adic\ Gauss\ norm$, $|x|_p = p^{-ord_p x} \leqslant 1$, sehingga $p - adic\ Gauss\ norm$ adalah $\mid f \mid_p = maks\{\mid x \mid_p\} = maks\{1\} = 1$.

$\Leftarrow$ Diketahui $|f|_p = 1$ untuk semua bilangan prima p. Akan ditunjukkan $f(x)$ adalah primitif dalam $\mathbb{Z}[X]$. Andaikan $f(x)$ bukan primitif maka semua koefisien dari $f(x)$ dapat dibagi dengan p, akibatnya $\mid f \mid_p < 1$ kontradiksi dengan $\mid f \mid_p = 1$. Jadi pengandaian salah, maka haruslah $f(x)$ adalah primitif. □

Lema 3.4. [3] *Misalkan $f(x) \in \mathbb{Q}[X]$ dan $A = \Pi_p |f|_p$, sehingga $Af(x)$ primitif di* $\mathbb{Z}[X]$.

Bukti. Diketahui $f(x) \in \mathbb{Q}[X]$ dan $A = \Pi_p|\mathrm{f}|_p$. Akan ditunjukkan $Af(x)$ adalah primitif, dengan menunjukkan $|Af|_p = 1$. $|p^n|_p = \dfrac{1}{p^n}$ dan $|q^n|_p = 1$. Selanjutnya $|A|_p = |\|f|_2|_p x\|f|_3|_p x \cdots|_p = \dfrac{1}{\mid f \mid_p}$, sedemikian sehingga berdasarkan Teorema 3.1 diperoleh $|Af|_p = |A|_p|f|_p = \frac{1}{|f|_p}|f|_p = 1$. Oleh karena itu, berdasarkan Teorema 3.2. $Af(x)$ adalah primitif di $\mathbb{Z}[X]$. □

Teorema 3.5. [3] *Jika $f(x) \in \mathbb{Z}[X]$ tak nol dan $f(x) = g(x)h(x)$, $g(x)$ dan $h(x)$ di $\mathbb{Q}[X]$ maka $f(x) = G(x)H(x)$ dimana $G(x)$ dan $H(x)$ di $\mathbb{Z}[X]$.*

Bukti. Diketahui $f(x) = g(x)h(x)$ dimana $f(x) \in \mathbb{Z}[X]$ sedemikian sehingga $|f|_p = 1$ dan $g(x)$, $h(x)$ di $\mathbb{Q}[x]$ berdasarkan Teorema 3.1 $|gh|_p = |g|_p|h|_p$. Oleh karena itu diperoleh $|f|_p = |g|_p|h|_p$. Misalkan $A = \Pi_p|\mathrm{f}|_p$, $B = \Pi_p|\mathrm{g}|_p$ dan $C = \Pi_p|\mathrm{h}|_p$, karena $|f|_p = |g|_p|h|_p$ dimana $|f|_p \in \mathbb{Z}$ dan $|g|_p, |h|_p \in \mathbb{Q}$, ambil hasil kali dari kedua sisi atas semua p, sehingga $\Pi_p|f|_p = \Pi_p|g|_p\Pi_p|h|_p$ Berdasarkan Lema 3.1 polinomial $F(x) = Af(x)$, $G(x) = Bg(x)$, dan $H(x) = Ch(x)$, dimana $F(x)$, $G(x)$ dan $H(x)$ $\in \mathbb{Z}[X]$. Diketahui $f(x) = g(x)h(x)$ dan $A = BC$ sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x)h(x) \\ \frac{F(x)}{A} &= \frac{G(x)}{B}\frac{H(x)}{C} \\ \frac{F(x)}{BC} &= \frac{G(x)H(x)}{BC} \\ F(x) &= G(x)H(x). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Dari persamaan 3.1 dan $A = BC$ maka diperoleh $f(x) = \frac{F(x)}{A} = \frac{1}{A}G(x)H(x)$. Koefisien dari $f(x)$ adalah bilangan bulat berarti $\dfrac{1}{A}G(x) \in \mathbb{Z}[x]$ sehingga $G(x) \in \mathbb{Z}[x]$ dan $\dfrac{1}{A}H(x) \in \mathbb{Z}$ sehinnga $H(x) \in \mathbb{Z}[X]$. □

Teorema 3.6. [3] *Jika $f(x)$ dan $g(x)$ adalah primitif di $\mathbb{Z}[X]$ maka $f(x)g(x)$ adalah primitif.*

Bukti. Diketahui $f(x)$ dan $g(x)$ adalah primitif. Akan ditunjukkan $f(x)g(x)$ adalah primitif, dengan menujukkan $|fg|_p = 1$. $f(x)$ dan $g(x)$ adalah primitif maka berdasarkan Teorema 3.2 ($\Rightarrow$) diperoleh $|\mathrm{f}|_p = 1$ dan $|\mathrm{g}|_p$=1 untuk setiap bilangan prima p. Oleh karena itu berdasarkan Teorema 3.1 diperoleh $|\mathrm{fg}|_p = |\mathrm{f}|_p|\mathrm{g}|_p =$ 1 untuk semua p bilangan prima. Oleh karena itu, berdasarkan Teorema 3.2 ($\Leftarrow$) sehingga diperoleh $f(x)g(x)$ adalah primtif. $\square$

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada BAB III, nilai $p-$ *adic gauss norm* adalah suatu polinomial di $\mathbb{Q}[X]$ dan p bilangan prima. Untuk menentukan nilai $p-$ *adic gauss norm* dari suatu polinomial primitif di $\mathbb{Z}[X]$ dapat ditentukan dengan cara, yaitu:

(1) Menentukan ordinal masing-masing p bilangan prima.
(2) Menentukan $p-$ *adic norm* masing-masing p bilangan prima.
(3) Menentukan nilai maksimum masing-masing $p-$ *adic norm*.

Nilai $p-$*adic gauss norm* adalah nilai yang ditentukan pada fakto-risasi di $\mathbb{Q}[X]$ dimana koefisien pada polinomial adalah bilangan bulat sehingga unsur-unsur berada di $\mathbb{Z}[X]$ dan polinomial primitif, dan untuk menentukan hal tersebut memenuhi sifat sebagai berikut.

(a) Sebuah polinomial $f(x)$ di $\mathbb{Q}[X]$ adalah primitif di $\mathbb{Z}[X]$ jika dan hanya jika $|\mathrm{f}|_p = 1$ untuk semua bilangan prima p.
(b) Misalkan $f(x) \in \mathbb{Q}[X]$ dan $A = \Pi_p|\mathrm{f}|_p$, sehingga $Af(x)$ primitif di $\mathbb{Z}[X]$.
(c) Jika f(x) dan g(x) adalah primitif di $\mathbb{Z}[x]$ maka f(x)g(x) adalah primitif.
(d) Jika $f(x) \in \mathbb{Z}[X]$ tak nol dan $f(x) = g(x)h(x)$ di $\mathbb{Q}[X]$ maka $f(x) = G(x)H(x)$

dimana $G(x)$ dan $H(x)$ di $\mathbb{Z}[X]$.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Nova Noliza Bakar, M.Si, Bapak Dr. Admi Nazra, Ibu Dr. Susila Bahri, selaku tim penguji yang telah memberikan kritik dan saran untuk perbaikan dalam penulisan makalah ini.

Daftar Pustaka

[1] Baker, A.J. 2002. *An Introduction to p-adic Number and p-adic Analysis*. Glasgow, Scotland
[2] Herstein, I.N. 1975. *Topics in Algebra* 2^{nd} edition. Springer, USA
[3] Conrad, Keith. 1973. *Gauss Norm and Gauss's Lemma*. Amer Math. USA
[4] Dumit, D.S. and Foote, R.M. 1991. *Abstract Algebra*. Prentie-Hall, USA
[5] Gallian, J.A. 2006. *Contemporary Abstract Algebra*. 7^{th} Edition. Universitas of Minnesota Duluth, USA
[6] Judson, T.W. 2009. *Abstract Algebra Theory and Applications*. Stefan F. Austin University, USA
[7] Vladimirov, V.S and Volovich, I.V. 1994. *P-adic Analysis and Mathematical Physics*. World Scientific, London

[8] Wilkins, R.D. 2002. *Introduction Galois Theory.* Hilary Term, USA