PELABELAN TOTAL SISI-AJAIB SUPER PADA GRAF KORONA $C_n \odot \overline{K_m}$

ANDRI YUNADI, SYAFRIZAL SY, EFFENDI

*Program Studi S1 Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
 email : andriyunadi4@gmail.com*

Diterima 29 November Direvisi 3 Desember 2019 Dipublikasikan 12 Januari 2020

Abstrak. Misalkan $G(V, E)$ adalah suatu graf dengan himpunan titik V dan sisi E . Banyaknya titik di G adalah $|V(G)|$, dan banyak sisi di G adalah $|E(G)|$. Pelabelan total sisi-ajaib pada graf G dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ adalah suatu pemetaan fungsi bijektif $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$ dengan sifat bahwa untuk setiap sisi xy di G berlaku $f(x) + f(xy) + f(y) = k$, untuk suatu konstanta tetap k . Jika $f(V(G)) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(G)|\}$ maka disebut pelabelan total sisi-ajaib super. Dalam tulisan ini diperoleh bahwa graf $C_n \odot \overline{K_m}$ mempunyai pelabelan total sisi-ajaib super dengan konstanta ajaib $k = \frac{5}{2}n + 2nm + \frac{3}{2}$.

Kata Kunci: Pelabelan graf, pelabelan total sisi-ajaib super, graf korona

1. Pendahuluan

Pelabelan pada graf merupakan pemberian label pada elemen-elemen tertentu dari graf tersebut dengan menggunakan bilangan positif. Berdasarkan elemen-elemen yang dilabeli maka pelabelan dibagi ke dalam tiga jenis, yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi dan pelabelan total. Hingga kini dikenal beberapa jenis pelabelan pada graf, antara lain pelabelan *graceful*, pelabelan harmoni, pelabelan total tak berat-uran, pelabelan ajaib dan pelabelan anti ajaib. Dalam pengembangan pelabelan ajaib, dikenal pula pelabelan total titik-ajaib, pelabelan total titik-ajaib super, pelabelan total sisi-ajaib dan pelabelan total sisi-ajaib super.

Pada graf juga dapat dilakukan operasi antar graf. Salah satu operasi yang dapat diberlakukan adalah hasil kali korona. Misalkan terdapat dua graf G dan H dengan banyaknya titik masing-masing adalah n_1 dan n_2 . Graf hasil kali korona dari $G \odot H$ didefinisikan sebagai suatu graf yang dihasilkan dari G dan H dengan mengambil satu salinan dari G dan n_1 salinan dari H , dan menghubungkannya dengan suatu sisi dari setiap titik pada salinan ke- i dari H dengan titik ke- i dari G .

Pada paper ini akan dibahas apakah graf korona $C_n \odot \overline{K_m}$ mempunyai pelabelan total sisi-ajaib super.

2. Landasan Teori

Suatu graf G dinotasikan dengan $G = (V(G), E(G))$ dengan $V = V(G)$ dan $E = E(G)$, dimana V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurut dari titik-titik berbeda di V yang disebut sisi. Komplemen $\overline{G}$ dari suatu graf G adalah graf dengan titik-titik $V(G)$ sedemikian sehingga dua titik yang bertetangga di $\overline{G}$ jika dan hanya jika titik-titik ini tidak bertetangga di G . Suatu graf yang setiap pasang titiknya mempunyai sisi kesemua titik lainnya disebut graf lengkap. Sementara graf lintasan P_n adalah suatu graf yang memiliki order n dan ukuran $n - 1$ yang titik-titiknya dapat dinotasikan dengan $v_1, v_2, \dots, v_n$ dan sisinya dengan $v_i v_{i+1}$ untuk $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Graf Lingkaran (*Cycle*) dilambangkan dengan $C_n; n \geq 3$, adalah sebuah graf yang setiap titiknya berderajat dua. Banyak titik C_n sama dengan banyak sisi C_n , yaitu n . Misalkan terdapat dua graf G dan H dengan banyak titik masing-masing adalah n_1 dan n_2 . Graf hasil kali korona dari $G \odot H$ didefinisikan sebagai suatu graf yang dihasilkan dari G dan H dengan mengambil satu salinan dari G dan n_1 salinan dari H , dan menghubungkannya dengan suatu garis dari setiap titik pada salinan ke- i dari H dengan titik ke- i dari G .

Pelabelan pada graf merupakan pemetaan bijektif yang memasangkan elemen-elemen graf dengan bilangan bulat positif. Jika domain dari fungsi adalah titik, maka disebut pelabelan titik (*vertex labeling*). Jika domainnya adalah sisi, maka disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), dan jika domainnya titik dan sisi maka disebut pelabelan total (*total labeling*) [3].

Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf dengan himpunan titik V dan sisi E . Banyaknya titik di G adalah $|V(G)|$, dan banyak sisi di G adalah $|E(G)|$.

Definisi 2.1. [2] *Pelabelan total sisi-ajaib pada graf G dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ adalah suatu pemetaan fungsi bijektif seperti di bawah ini.*

$$f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(G)| + |E(G)|\},$$

dengan sifat bahwa untuk setiap sisi xy di G berlaku:

$$f(x) + f(xy) + f(y) = k$$

untuk suatu konstanta tetap k .

Definisi 2.2. [2] *Pelabelan total sisi-ajaib super adalah pelabelan total sisi-ajaib pada graf $G = (V, E)$ sehingga $f(V(G)) = \{1, 2, 3, \dots, |V(G)|\}$.*

3. PELABELAN TOTAL SISI-AJAIB SUPER PADA GRAF KORONA $C_n \odot \overline{K_m}$

Teorema 3.1. *Misalkan terdapat graf $C_n \odot \overline{K_m}$ dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 1$ n , ganjil, maka graf $C_n \odot \overline{K_m}$ memuat pelabelan total sisi-ajaib super dengan konstanta ajaib $k = \frac{5}{2}n + 2nm + \frac{3}{2}$.*

Bukti. Notasikan:

$$V(C_n \odot \overline{K_m}) = \{x_i, y_{i,j} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\},$$

$$E(C_n \odot \overline{K_m}) = \{w_i, z_{i,j} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\},$$

dimana, $w_i = x_i x_{i+1}$ untuk $1 \leq i \leq n-1$ dan $z_{i,j} = x_i y_{i,j}$ untuk $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq m$. Graf $C_n \odot \overline{K_m}$ diberikan pada Gambar 1 berikut.

Gambar 1. Graf $C_n \odot \overline{K_m}$

Konstruksi pelabelan titik dan sisi pada graf $C_n \odot \overline{K_m}$ berdasarkan cara berikut.

Himpunan titik $C_n \odot \overline{K_m}$ diberi label sebagai berikut.

$$f(x_i) = \frac{n+i}{2}, \quad i \text{ ganjil},$$

$$f(x_i) = \frac{i}{2}, \quad i \text{ genap},$$

$$f(y_{ij}) = nj + f(x_{i+1}), \quad 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m,$$

$$f(y_{nj}) = nj + f(x_1), \quad 1 \leq j \leq m.$$

Himpunan sisi $C_n \odot \overline{K_m}$ diberi label sebagai berikut.

$$f(w_i) = f(x_i x_{i+1}) = 2n + 2nm + 1 - i, \quad 1 \leq i \leq n-1,$$

$$f(z_{i,j}) = f(x_i y_{i,j}) = 2n + 2nm + 1 - i - nj, \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m,$$

$$f(w_{n,1}) = f(x_n x_1) = 2n + 2nm + 1 - n.$$

Pandang dua kasus berikut.

Kasus 1. Untuk sisi $x_i x_{i+1}$.

(a) Jika $1 \leq i \leq n-1$, maka berlaku:

$$k = f(x_i) + f(x_i x_{i+1}) + f(x_{i+1}).$$

Jika i ganjil maka diperoleh k sebagai berikut:

$$\begin{aligned} k &= \left(\frac{n+i}{2}\right) + (2n + 2nm + 1 - i) + \left(\frac{i+1}{2}\right), \\ &= \frac{5}{2}n + 2nm + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Jika i genap maka diperoleh k sebagai berikut:

$$\begin{aligned} k &= \left(\frac{i}{2}\right) + (2n + 2nm + 1 - i) + \left(\frac{n+i+1}{2}\right), \\ &= \frac{5}{2}n + 2nm + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Untuk setiap $1 \leq i \leq n-1$, diperoleh bahwa $f(x_i) + f(x_i x_{i+1}) + f(x_{i+1}) = k = \frac{5}{2}n + 2nm + \frac{3}{2}$.

(b) Jika $i = n$ maka berlaku

$$\begin{aligned} k &= f(x_n) + f(x_n x_1) + f(x_1), \\ &= \left(\frac{n+n}{2}\right) + (2n + 2nm + 1 - n) + \left(\frac{n+1}{2}\right), \\ 2k &= (2n) + (4n + 4nm + 2 - 2n) + (n+1), \\ &= 5n + 4nm + 3, \\ k &= \frac{5}{2}n + 2nm + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Untuk setiap $i = n$, diperoleh bahwa $f(x_n) + f(x_n x_1) + f(x_1) = \frac{5}{2}n + 2nm + \frac{3}{2}$.

Kasus 2. Untuk sisi $x_i y_{ij}$.

(a) Jika $1 \leq i \leq n-1$ dan $1 \leq j \leq m$ maka berlaku:

$$k = f(x_i) + f(x_i y_{ij}) + f(y_{ij}),$$

Jika i ganjil maka diperoleh:

$$\begin{aligned} k &= \left(\frac{n+i}{2}\right) + ((2n + 2nm + 1 - i) - nj) + (nj + f(x_{i+1})), \\ &= \frac{5}{2}n + 2nm + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Jika i genap maka diperoleh:

$$\begin{aligned} k &= \left(\frac{i}{2}\right) + ((2n + 2nm + 1 - i) - nj) + (nj + f(x_{i+1})), \\ &= \frac{5}{2}n + 2nm + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Untuk setiap $1 \leq i \leq n-1$ dan $1 \leq j \leq m$, berlaku bahwa $f(x_i) + f(x_i y_{ij}) + f(y_{ij}) = \frac{5}{2}n + 2nm + \frac{3}{2}$.

(b) Jika $i = n$ dan $1 \leq j \leq m$ berlaku:

$$k = f(x_n) + f(x_n y_{nj}) + f(y_{nj}).$$

Diperoleh:

$$\begin{aligned} k &= \left(\frac{n+i}{2}\right) + ((2n + 2nm + 1 - i) - nj) + (nj + f(x_1)), \\ &= \left(\frac{n+i}{2}\right) + ((2n + 2nm + 1 - i) - nj) + \left(nj + \frac{i+1}{2}\right), \\ 2k &= (n+i) + ((4n + 4nm + 2 - 2i) - 2nj) + (2nj + i+1), \\ &= 5n + 4nm + 3, \\ k &= \frac{5}{2}n + 2nm + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Maka, untuk setiap $i = n$ dan $1 \leq j \leq m$, berlaku $f(x_n) + f(x_n y_{nj}) + f(y_{nj}) = \frac{5}{2}n + 2nm + \frac{3}{2}$.

Dengan demikian f merupakan pelabelan total sisi-ajaib super dengan konstanta $= \frac{5}{2}n + 2nm + \frac{3}{2}$. $\square$

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa graf korona $C_n \odot \overline{K_m}$ untuk n ganjil ($n \geq 3$ dan $m \geq 1$) merupakan graf yang mempunyai pelabelan total sisi-ajaib super dengan $k = \frac{5}{2}n + 2nm + \frac{3}{2}$.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Narwen M.Si, Nova Noliza Bakar M.Si dan Dr. Lyra Yulianti yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Chartrand, G. dan Lesniak, L. (1986). Graphh and Diagraph. 2nd Edition. California: Wadsworath, Inc.
- [2] Galian, J. A. 2011. *A Dynamic Survey of Graph Labeling*. (online): (<http://www.combinatorics.org> Diakses tanggal 27 Mei 2019)
- [3] Hartsfield, N. dan Ringel, G 2003. *Pearls on Graph Theory*. New York: Dover.
- [4] Munir, R. 2003. *Matematika Diskrit*. Edisi Kedua. Informatika, Bandung.
- [5] Yero, I.G., Kuziak, D., dan Velazquez, J.A.R. 2010. On The Metric Dimension of Corona Product Graphs.