Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VIII** No. **1** Hal. 1– 8
Edisi Mei 2019
ISSN : 2303–291X
©Jurusan Matematika FMIPA UNAND

Q-ALJABAR

Raisa Azura, Nova Noliza Bakar, Monika Rianti Helmi

Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : Raisaajura3006@gmail.com

Diterima Direvisi

Abstrak. Pada tahun 2001 diperkenalkan suatu gagasan baru dalam struktur aljabar yang disebut sebagai Q-aljabar. Q-aljabar ini dibangun dari suatu himpunan tak kosong X dengan menggunakan suatu operasi biner $*$ dan memuat konstanta 0 yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Pada tulisan ini dikaji sifat-sifat yang terkait dengan Q-aljabar, diantaranya grup, bagian-G, p-radical, p-semisimple, ideal, dan juga homomorfisma pada Q-aljabar. Dalam konsep homomorfisma pada Q-aljabar juga terdapat konsep kernel.

Kata kunci : Q-Aljabar, grup, bagian-G, p-radical, p-semisimple, ideal, homomorfisma, kernel, image.

1. Pendahuluan

Struktur aljabar adalah himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan suatu operasi yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Suatu subaljabar merupakan subhimpunan dari suatu aljabar yang mana subaljabar tersebut tertutup terhadap operasi yang sama dan mewarisi sifat-sifat yang sama dengan yang dimiliki oleh aljabar tersebut. Suatu gagasan baru yang disebut Q-aljabar, memiliki keterkaitan dengan BCH/BCI/BCK-aljabar. Q-aljabar pertama kali diperkenalkan oleh J.Neggers, Sun Shin Ahn dan Hee Sik Kim pada tahun 2001.

Bentuk struktur aljabar yang sering dibahas adalah grup dan ring. Jika di dalam grup dan ring terdapat konsep homomorfisma dan di dalam ring terdapat konsep ideal, maka dalam Q-Aljabar juga terdapat konsep homomorfisma dan juga ideal.

2. Landasan Teori

2.1. *Operasi Biner*

Definisi 2.1. [4] *Operasi biner * pada suatu himpunan S adalah suatu aturan yang memasangkan setiap pasangan terurut (a, b) dengan $a, b \in S$ ke suatu elemen di S.*

Definisi 2.2. [4] *Operasi biner * pada S dikatakan assosiatif jika dan hanya jika $(a * b) * c = a * (b * c)$, untuk setiap unsur a, b, c di S.*

2.2. *Fungsi*

Definisi 2.3. [1] *Misalkan A dan B adalah dua himpunan tak kosong. Suatu fungsi dari A ke B adalah suatu aturan yang memasangkan setiap unsur di himpunan A dengan tepat satu unsur di B.*

Definisi 2.4. [1] *Misalkan $f : A \to B$ merupakan suatu fungsi dari A ke B.*

(a) Fungsi f dikatakan fungsi injektif (satu-satu) jika untuk setiap $x_1 \neq x_2$ akan berlaku $f(x_1) \neq f(x_2)$.
(b) Fungsi f dikatakan fungsi surjektif (pada) jika untuk setiap $b \in B$ terdapat $x \in A$ sedemikian sehingga $f(x) = b$.
(c) Fungsi f dikatakan fungsi bijektif (satu-satu pada) jika f merupakan fungsi injektif(satu-satu) dan surjektif (pada).

Definisi 2.5. [1] *Jika $f : A \to B$ adalah suatu fungsi satu-satu pada dari A ke B, maka*

$$g = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in f\}$$

adalah suatu fungsi dari B ke A. Fungsi ini disebut fungsi invers dari f, dan dinotasikan dengan f^{-1}. Fungsi f^{-1} juga disebut invers dari f.

2.3. *BCK-Aljabar, BCI-Aljabar, BCH-Aljabar*

Definisi 2.6. [2] *Suatu BCK-aljabar $X = (X, *, 0)$ adalah suatu himpunan tak kosong X dengan suatu operasi biner $*$ dan suatu elemen tertentu $0 \in X$ yang memenuhi kondisi-kondisi berikut untuk setiap $x, y, z \in X$:*
(1) $x * x = 0$
(2) $(x * (x * y)) * y = 0$
(3) $((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$
(4) $0 * x = 0$
(5) Jika $x * y = 0$ *dan* $y * x = 0$ *maka* $x = y$.

Definisi 2.7. [2] *Suatu BCI-aljabar $X = (X, *, 0)$ adalah suatu himpunan tak kosong X dengan suatu operasi biner $*$ dan suatu elemen tertentu $0 \in X$ yang memenuhi kondisi untuk setiap $x, y, z \in X$:*
(1) $x * x = 0$
(2) $(x * (x * y)) * y = 0$
(3) $((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$
(4) Jika $x * y = 0$ *dan* $y * x = 0$ *maka* $x = y$
(5) Jika $x * 0 = 0$ *maka* $x = 0, x \in X$.

Definisi 2.8. [2] *Suatu BCH-aljabar $X = (X, *, 0)$ adalah suatu himpunan tak kosong X dengan suatu operasi biner $*$ dan suatu elemen tertentu $0 \in X$ yang memenuhi kondisi-kondisi untuk setiap $x, y, z \in X$:*
(1) $x * x = 0$
(2) Jika $x * y = 0$ *dan* $y * x = 0$ *maka* $x = y$
(3) $(x * y) * z = (x * z) * y$

2.4. *Grup*

Definisi 2.9. [3] *Grup adalah suatu himpunan G dengan operasi biner $*$ pada G sedemikian sehingga sifat-sifat berikut ini terpenuhi:*

(1) Sifat assosiatif

$$a * (b * c) = (a * b) * c \text{ untuk setiap } a, b, c \in G.$$

(2) Keberadaan elemen identitas
terdapat $e \in G$ sedemikian sehingga $a * e = e * a = a$ untuk setiap $a \in G$.
(3) Keberadaan elemen invers
untuk setiap $a \in G$ terdapat $b \in G$ sedemikian sehingga $a * b = b * a = e$.

3. Pembahasan

Pada tahun 2001, J.Neggers , Sun Shin Ahn dan Hee Sik Kim memperkenalkan suatu gagasan baru, yaitu Q-Aljabar yang memiliki keterkaitan dengan BCI/BCH/BCK-Aljabar. Kondisi pertama pada Definisi BCI/BCH/BCK-Aljabar, yaitu $x * x = 0$ dan kondisi ketiga pada Definisi BCH-Aljabar, yaitu $(x * y) * z = (x * z) * y$ digunakan dalam mendefinisikan Q-aljabar.

3.1. *Q-Aljabar*

Definisi 3.1. [5] *Suatu himpunan tak kosong X yang memuat konstanta 0 dan dilengkapi dengan suatu operasi biner "$*$", ditulis $(X, *, 0)$, disebut Q-aljabar jika untuk setiap $x, y, z \in X$, memenuhi:*
(I) $x * x = 0$
(II) $x * 0 = x$
(III) $(x * y) * z = (x * z) * y$

Contoh 3.2. Misalkan $\mathbb{Z}$ adalah sebuah himpunan bilangan bulat dan didefinisikan $n\mathbb{Z} := \{nz | z \in \mathbb{Z}\}$ dengan $n \in \mathbb{Z}$. Maka $(n\mathbb{Z}; -, 0)$ adalah suatu Q-aljabar dengan " $-$ " merupakan suatu pengurangan biasa pada bilangan bulat karena memenuhi tiga kondisi pada Definisi 3.1

Proposisi 3.3. *Jika $(X; *.0)$ adalah suatu Q-aljabar, maka $(x * (x * y) * y) = 0$.*

Bukti. Misalkan $(X; *.0)$ suatu Q-Aljabar, ambil $x, y \in X$, maka berdasarkan Definisi 3.1(I), dan Definisi 3.1(III) diperoleh $(x * (x * y)) * y = (x * y) * (x * y) = 0$. □

Teorema 3.4. [5] *Setiap Q-Aljabar $(X; *, 0)$ yang memenuhi sifat assosiatif adalah sebuah grup terhadap operasi "$*$".*

Bukti. Ambil $x \in X$, pilih $y = z = x$, melalui sifat assosiatif $(x * y) * z = x * (y * z)$ dan berdasarkan Definisi 3.1(I) serta Definisi 3.1(III) diperoleh $0 * x = x * 0 = 0$. Hal ini berarti bahwa 0 adalah unsur identitas untuk setiap $x \in X$. Berdasarkan Definisi 3.1(I), diperoleh bahwa untuk setiap elemen $x \in X$ memiliki invers, yaitu dirinya sendiri. □

Lema 3.5. [5] *Jika* $(X;*,0)$ *adalah suatu Q-Aljabar yang memenuhi* $a*b=a*c$ *untuk semua* $a,b,c\in X$ *maka* $0*b=0*c$.

Bukti. Ambil sebarang $a,b,c\in X$, melalui $a*b=a*c$ diperoleh $(a*b)*a=(a*c)*a$ dan berdasarkan Definisi 3.1(I) serta Definisi 3.1(III) diperoleh $0*b=0*c$ □

Definisi 3.6. [5] *Misalkan suatu Q-aljabar* $(X;*,0)$. *Untuk sebarang subhimpunan tak kosong* S *dari* X, *didefinisikan*

$$G(S)=\{x\in S|0*x=x\}.$$

Khususnya, apabila $S=X$ *maka* $G(X)$ *disebut bagian-G dari* X.

Akibat 3.7. [5] *Sebuah hukum pembatalan kiri berlaku di* $G(X)$.

Bukti. Ambil sebarang $a,b,c\in G(X)$ dengan $a*b=a*c$, melalui Lemma 3.5 diperoleh $0*b=0*c$, karena $a,b,c\in G(X)$ maka dari Definisi 3.6 diperoleh $b=c$. □

Proposisi 3.8. [5] *Misalkan* $(X;*,0)$ *adalah suatu Q-Aljabar, maka berlaku* $x\in G(x)$ *jika dan hanya jika* $0*x\in G(X)$.

Bukti.

(1) ($\Rightarrow$) Misalkan $x\in G(X)$, akan ditunjukkan $0*x\in G(X)$.
Karena $x\in X$ dan $0*x=x$, maka $0*x\in X$ dan $0*(0*x)=0*x$, sehingga $0*x\in G(X)$.
(2) ($\Leftarrow$) Misalkan $0*x\in G(X)$, akan ditunjukkan $x\in G(X)$.
Dari $0*x\in G(X)$ diperoleh $0*(0*x)=0*x$, melalui Akibat 3.7 diperoleh $0*x=x$. Maka $x\in G(X)$ □

Definisi 3.9. [5] *Untuk sebarang Q-aljabar* $(X;*,0)$, *himpunan*

$$B(X)=\{x\in X|0*x=0\}$$

disebut p-radical di X. *Jika* $B(X)=\{0\}$, *maka* X *disebut suatu p-semisimple Q-aljabar.*

Proposisi 3.10. [5] *Misalkan* $(X;*,0)$ *adalah suatu Q-Aljabar.*
Jika $G(X)=\{x\in X|0*x=x\}$ *dan* $B(X)=\{x\in X|0*x=0\}$, *maka berlaku* $G(X)\cap B(X)=\{0\}$.

Bukti.

(1) Ambil $x\in G(X)\cap B(X)$, akan ditunjukkan $x\in\{0\}$.
Dari $x\in G(X)$ diperoleh $x\in X$ dan $0*x=x$ serta dari $x\in B(X)$ diperoleh $x\in X$ dan $0*x=0$,sehingga diperoleh $x=0$, atau $x\in\{0\}$.
(2) Karena $0\in X$ dan $0*0=0$, maka $0\in G(X)$ dan $0\in B(X)$ sehingga $0\in G(X)\cap B(X)$.

□

Teorema 3.11. [5] *Misalkan* $(X;*,0)$ *suatu Q-Aljabar. Jika* $G(X) = X$*, maka* X *adalah p-semisimple Q-Aljabar.*

Bukti. Misalkan $G(X) = X$, melalui Proposisi 3.10 diperoleh $\{0\} = G(X) \cap B(X) = X \cap B(X) = B(X)$. Sehingga diperoleh $B(X) = \{0\}$, maka X adalah *p-semisimple* Q-Aljabar □

Proposisi 3.12. [5] *Jika* $(X;*,0)$ *adalah suatu Q-aljabar dan* $x, y \in X$*, maka* $y \in B(X)$ *jika dan hanya jika* $(x * y) * x = 0$.

Bukti. Ambil sebarang $x, y \in X$.

(1) ($\Rightarrow$) Misalkan $y \in B(X)$, akan ditunjukkan $(x * y) * x = 0$.
Dari $y \in B(X)$ diperoleh $0 * y = 0$, melalui Definisi 3.1(I) serta Definisi 3.1(III) diperoleh $(x * y) * x = 0$.
(2) ($\Leftarrow$) Misalkan $(x * y) * x = 0$, akan ditunjukkan $y \in B(X)$.
Dari $(x * y) * x = 0$ dan melalui Definisi 3.1(I) serta Definisi 3.1(III) diperoleh $0 * y = 0$. □

Proposisi 3.13. [5] *Jika* S *adalah subQ-Aljabar* $(X;*,0)$*, maka* $G(X) \cap S = G(S)$.

Bukti. Misalkan S suatu sub*Q-Aljabar* dan $G(X) = \{x \in X | 0 * x = x\}$.

(1) Ambil $x \in G(x) \cap S$, akan ditunjukkan $x \in G(S)$.
Dari $x \in G(X)$, diperoleh $x \in X$ dan $0 * x = x$. Karena $x \in S$ juga dan $0 * x = x$, maka $x \in G(S)$.
(2) Ambil $x \in G(S)$, akan ditunjukkan $x \in G(x) \cap S$.
Karena S subaljabar dari X maka diperoleh $x \in X$ dan $0 * x = x$, sehingga diperoleh $x \in G(X)$. Dengan demikian $x \in S$ dan $x \in G(X)$ □

3.2. *Ideal Pada Q-Aljabar*

Definisi 3.14. [5] *Misalkan* $(X;*,0)$ *adalah sebuah Q-Aljabar dan* $\emptyset \neq I \subseteq X$*. Himpunan* I *dikatakan ideal di* X *jika untuk setiap* $x, y \in X$*,*

(1) $0 \in I$*,*
(2) jika $x * y \in I$ *dan* $y \in I$*, maka berlaku* $x \in I$*.*

Proposisi 3.15. [5] *Misalkan* $(X;*,0)$ *suatu Q-Aljabar, maka* $B(X)$ *suatu ideal di* X*.*

Bukti. Dari definisi $B(X) = \{x \in X | 0 * x = 0\}$, jelas $B(X) \subset X$.
Ambil sebarang $x, y \in X$.

(1) Karena $0 \in X$ dan $0 * 0 = 0$ maka $0 \in B(X)$.

(2) Misalkan $x * y \in B(X)$ dan $y \in B(X)$, akan ditunjukkan $x \in B(X)$.
Berdasarkan Proposisi 3.12 diperoleh $((x * y) * x) * (x * y) = 0$. Dari Definisi 3.1(III) serta Definisi 3.1(I) diperoleh $0 * x = 0$. □

Definisi 3.16. [5] *Suatu ideal I dari suatu Q-Aljabar disebut implikatif jika $(x * y) * z \in I$ dan $y * z \in I$, maka $x * z \in I$, untuk setiap $x, y, z \in X$.*

Teorema 3.17. [5] *Misalkan suatu Q-Aljabar $(X; *, 0)$ dan I suatu ideal implikatif di X, maka I memuat bagian-G dari X, atau $G(X) \subset I$.*

Bukti. Misalkan I suatu ideal implikatif dan $x \in G(X)$.
Dari $x \in G(X)$, melalui $0 * x = x$ diperoleh $(0 * x) * x = x * x$ dan karena $x * x = 0$ maka $(0 * x) * x = 0 \in I$. Dari $(0 * x) * x \in I$, $x * x = 0 \in I$, dan I merupakan ideal implikatif, sehingga diperoleh $0 * x \in I$. Karena $0 * x \in I$ dan $0 \in I$, maka $x \in I$. □

3.3. *Homomorfisma Pada Q-Aljabar*

Definisi 3.18. [5] *Misalkan $(X; *, 0)$ dan $(Y; *', 0')$ suatu Q-aljabar. Sebuah fungsi $f : X \to Y$ disebut sebuah homomorfisma jika*

$$f(x * y) = f(x) *' f(y), \text{ untuk setiap } x, y \in X.$$

Untuk setiap homorfisma $f : X \to Y$, himpunan $\{x \in X | f(x) = 0\}$ disebut **kernel** dari f, dinotasikan sebagai $\text{Ker}(f)$. Himpunan $\{f(x) | x \in X\}$ disebut **image** dari f, dinotasikan sebagai $\text{Im}(f)$. Notasi $\text{Hom}(X, Y)$ adalah himpunan dari semua homomorfisma-homomorfisma atas *Q-Aljabar* dari X ke Y.

Contoh 3.19. Misalkan $X = n\mathbb{Z} = \{nz | z \in \mathbb{Z}\}$ dengan $n \in \mathbb{Z}$. Berdasarkan Contoh 3.2 diperoleh bahwa $(n\mathbb{Z}; -, 0)$ adalah suatu Q-Aljabar dan misalkan $f : X \to X$ dengan $f(x) = 3x$. Karena $f(x - y) = f(x) - f(y)$ berlaku, maka f suatu homomorfisma pada Q-Aljabar.

Proposisi 3.20. [5] *Misalkan $f : X \to X'$ adalah suatu homomorfisma dari Q-aljabar, maka:*

(1) $f(0) = 0'$,
(2) f isotone, yakni jika $x * y = 0$, untuk setiap $x, y \in X$, maka $f(x) * f(y) = 0'$.

Bukti. Misalkan X dan X' merupakan Q-Aljabar dan $f : X \to X'$ adalah sebuah homomorfisma.

(1) Terdapat $0 \in X$ dan $0' \in X'$ dan karena $f : X \to X'$ adalah sebuah homomorfisma dari Q-aljabar maka berlaku $f(0) = f(0 * 0) = f(0) *' f(0) = 0'$.
Jadi $f(0) = 0'$.
(2) Misalkan $x, y \in X$ dan $x * y = 0$.
Dari $x * y = 0$ diperoleh $f(x * y) = f(0) = 0'$, karena f suatu homomorfisma sehingga $f(x * y) = f(x) * f(y) = f(0) = 0'$. Jadi f isotone

□

Teorema 3.21. [5] *Misalkan* $(X;*,0)$ *dan* $(Y;*',0')$ *adalah Q-aljabar dan misalkan* B *suatu ideal di* Y*. Maka untuk sebarang* $f \in Hom(X,Y)$*,* $f^{-1}(B)$ *adalah suatu ideal di* X*.*

Bukti. Misalkan $f : X \to Y$ adalah suatu homomorfisma, f mempunyai invers, dan B ideal di Y.

(1) Karena $0' \in B \subset Y$ maka dari Proposisi 3.20 diperoleh $0 \in f^{-1}$,
(2) Ambil sebarang $x*y \in f^{-1}(B)$ dan $y \in f^{-1}(B)$. Akan ditunjukkan $x \in f^{-1}(B)$.
Dari $x*y \in f^{-1}(B)$, diperoleh $f(x*y) \in B$, karena f suatu homomorfisma, maka berlaku $f(x*y) = f(x)*f(y) \in B$. (i)
Dari $y \in f^{-1}(B)$, diperoleh $f(y) \in B$. (ii)
Berdasarkan (i),(ii), dan B suatu ideal di Y, maka diperoleh $f(x) \in B$ □

Akibat 3.22. [5] $ker(f)$ *adalah sebuah ideal di* X*.*

Bukti. Misalkan $f : X \to Y$ adalah suatu homomorfisma, akan ditunjukkan $ker(f)$ ideal di X.
Dari definisi $ker(f)$ diperoleh $ker(f) \subset X$, selanjutnya akan diperiksa syarat-syarat suatu ideal sesuai Definisi 3.14.

(1) Karena $0 \in X$ dan $f(0) = 0'$, maka $0 \in ker(f)$.
(2) Misalkan $x*y \in ker(f)$ dan $y \in ker(f)$ akan ditunjukkan $x \in ker(f)$.
Dari $x*y \in ker(f)$, diperoleh $x*y \in X$ dan $f(x*y) = 0'$. (i)
Dari $y \in ker(f)$, diperoleh $y \in X$ dan $f(y) = 0'$. (ii)
Berdasarkan (i) dan (ii) diperoleh $f(x*y) = f(y)$, melalui Definisi 3.18 diperoleh $f(x)*f(y) = f(y)$ dan melalui Definisi 3.1(II) $f(x) = 0'$ □

4. Kesimpulan

Q-Aljabar $(X,*,0)$ adalah suatu himpunan tak kosong X yang memuat konstanta 0 dan dilengkapi dengan suatu operasi biner " $*$ ", dimana untuk setiap $x,y,z \in X$ memenuhi beberapa aksioma-aksioma tertentu. Sifat-sifat yang berlaku pada Q-Aljabar, yaitu:

(1) Untuk setiap $x,y, \in X$ dari suatu Q-Aljabar $(X,*,0)$ berlaku $(x*(x*y)*y) = 0$
(2) Setiap Q-Aljabar $(X;*,0)$ yang memenuhi sifat assosiatif adalah sebuah grup terhadap operasi "$*$".
(3) Suatu Q-Aljabar $(X,*,0)$ yang memenuhi $a*b = a*c$ untuk semua $a,b,c \in X$ maka berlaku $0*b = 0*c$.

Himpunan G(X) dari X dinamakan *bagian-G* dan himpunan B(X) dinamakan *p-radical* di X dari suatu *Q-Aljabar*. Sifat-sifat yang terkait dengan *bagian-G* dan *p-radical* dari suatu *Q-Aljabar* , yaitu:

(1) $x \in G(X)$ jika dan hanya jika $0*x \in G(X)$.

(2) $G(X) \cap S = G(S)$ dengan S adalah subaljabar dari *Q-Aljabar*.
(3) $G(X) \cap B(X) = \{0\}$
(4) $y \in B(X) \Longleftrightarrow (x * y) * x = 0$, untuk setiap $x, y \in X$.
(5) X adalah *p-semisimple* jika $G(X) = X$.

Suatu himpunan dikatakan ideal di Q-aljabar $(X, *, 0)$ apabila himpunan tersebut merupakan himpunan tak kosong dan subhimpunan dari X serta memenuhi beberapa aksioma. *P-radical* di X dari suatu Q-Aljabar $(X, *, 0)$ merupakan suatu ideal di X. Pada Q-Aljabar terdapat suatu ideal implikatif, dimana ideal implikatif tersebut memuat *bagian-G* dari X.

Selain ideal, pada Q-aljabar juga terdapat konsep homomorfisma, suatu fungsi dari Q-Aljabar $(X, *, 0)$ ke Q-Aljabar $(Y', *', 0')$ dikatakan homomorfisma apabila untuk setiap x, y di daerah domain memenuhi $f(x * y) = f(x) *' f(y)$. Konsep kernel dan image juga terdapat pada homomorfisma dari suatu Q-Aljabar.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada ibu Dr. Yanita , ibu Dr. Haripamyu, dan ibu Izzati Rahmi HG, M.Si selaku dosen penguji tugas akhir yang telah memberikan masukkan dan saran sehingga makalah ini dapat di-selesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Bartle, R.G and Sherbert, D.R. 2000. *Introduction to Real Analysis 4th edition* . John Wiley and Sons Inc. USA
[2] Chaudry, M. A., Fahad, A. dan Arshad, M. 2017. *Some Results About Generalized BCH-Algebras*. International Journal of Algebra, Vol 11:5 hal 231-246
[3] Durbin, J.R. 2000. *Modern Algebra An Introduction 4th edition.* John Wiley and Sons Inc. USA
[4] Fraleigh, J. B. 1994. *First Course in Abstract Algebra.* Addison-Wesley Publishing Company inc. United States
[5] J.Neggers, S. S. Ahn dan H.S.Kim. 2001. *On Q-Algebras.* International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Vol 27:12 hal 749-757.