Jurnal Matematika UNAND
Vol. **5** No. **1** Hal. 17 – 26
ISSN : 2303–2910

Solusi Persamaan Diferensial *Fractional* Linier Orde $(2, \alpha)$ dan $(3, \alpha)$ Dengan Turunan Tipe *Jumarie*

Resta Zilfia, Zulakmal
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : Restazilfia@gmail.com

Abstract. Dalam skripsi ini diselesaikan persamaan diferensial *fractional* linier orde $(2, \alpha)$ dan $(3, \alpha)$ dengan turunan tipe Jumarie. Beberapa contoh yang mengilustrasikan teorema utama dipaparkan.

Kata Kunci: Perasamaan Diferensial *Fractional*, Turunan Tipe Jumarie

1. Pendahuluan

Diberikan persamaan diferensial *fractional* linier orde $(2, \alpha)$ dan $(3, \alpha)$ sebagai berikut :

$$D^{2\alpha}y(t) - \gamma_1 D^{\alpha}y(t) + \gamma_2 y(t) = 0 \tag{1.1}$$

dan

$$D^{3\alpha}y(t) - \gamma_1 D^{2\alpha}y(t) + \gamma_2 D^{\alpha}y(t) - \gamma_3 y(t) = 0 \tag{1.2}$$

dimana γ_1, γ_2 dan γ_3 adalah konstanta, dengan

$$D^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} D \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha}[f(\tau) - f(0)]d\tau, \; 0 < \alpha < 1. \tag{1.3}$$

Dalam makalah ini akan diselesaikan persamaan diferensial (1.1) dan (1.2) dimana $D^{\alpha}f(t)$ adalah turunan *fractional* tipe Jumarie.

2. Landasan Teori

2.1. Beberapa Fungsi Khusus

Definisi 2.1. [6] *Fungsi Gamma dinyatakan sebagai* $\Gamma(n)$, *didefinisikan sebagai berikut:*

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x} \; dx, \quad n > 0.$$

Definisi 2.2. [4] *Fungsi Beta didefinisikan sebagai berikut :*

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \ , \ x \in \mathbb{R}$$

dimana $Re(p) > 0$ dan $Re(q) > 0$.

Definisi 2.3. [4] *Fungsi Mittag-Leffler satu parameter (E_α) didefinisikan sebagai berikut :*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \ , \ Re(\alpha) > 0.$$

Fungsi Mittag-Leffler dua parameter didefinisikan sebagai berikut :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \ , \ Re(\alpha) > 0, \ Re(\beta) > 0, \beta \in \mathbb{C}.$$

[2] *Fungsi Mittag-Leffler kompleks didefinisikan sebagai berikut :*

$$\begin{aligned} E_\alpha(it^\alpha) &= \cos_\alpha(t^\alpha) + i\sin_\alpha(t^\alpha) \\ \cos_\alpha(t^\alpha) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k\alpha}}{(2k\alpha)!} \\ \sin_\alpha(t^\alpha) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{(2k\alpha+1)\alpha}}{(2k\alpha+\alpha)!} \end{aligned}$$

3. Pembahasan

3.1. *Solusi persamaan diferensial fractional orde $(2,\alpha)$*

Perhatikan kembali persamaan diferensial *fractional* (1.1). Solusi dari (1.1) diberikan dalam teorema berikut :

Teorema 3.1. [1] *Solusi dari persamaan (1.1) untuk $0 < \alpha < 1$ dimana $\gamma_1 = a + b$ dan $\gamma_2 = ab$ adalah*

$$y = AE_\alpha(at^\alpha) + BE_\alpha(bt^\alpha) \tag{3.1}$$

dimana A dan B adalah konstanta sebarang.

Bukti.

$$D^{2\alpha}y - (a+b)D^\alpha y + aby = 0 \tag{3.2}$$

Persamaan (3.2) dapat ditulis menjadi

$$(D^\alpha - a)(D^\alpha - b)y(t) = 0 \tag{3.3}$$

Misalkan $(D^\alpha - b)y(t) = x(t)$ maka persamaan (3.3) menjadi

$$(D^\alpha - a)x(t) = 0 \ atau \ D^\alpha x(t) = ax(t) \tag{3.4}$$

Solusi dari persamaan (3.4) sama dengan solusi dari persamaan (**??**) yaitu

$$\begin{aligned} x(t) =& A_1E_\alpha(at^\alpha) \\ (D^\alpha - b)y(t) =& A_1E_\alpha(at^\alpha) \\ D^\alpha y - by =& A_1E_\alpha(at^\alpha) \\ E_\alpha(-bt^\alpha)(D^\alpha y - by) =& A_1E_\alpha(at^\alpha)E_\alpha(-bt^\alpha) \end{aligned}$$

$$D^\alpha (yE_\alpha(-bt^\alpha)) = \frac{A_1}{a-b} D^\alpha (E_\alpha(at^\alpha)E_\alpha(-bt^\alpha)) \tag{3.5}$$

Integral *fractional* tipe Jumarie dari persamaan (3.5) diperoleh

$$\begin{aligned} yE_\alpha(-bt^\alpha) =& \frac{A_1}{a-b} E_\alpha(at^\alpha)E_\alpha(-bt^\alpha) + B \\ y =& AE_\alpha(at^\alpha) + BE_\alpha(bt^\alpha), \end{aligned}$$

dimana $A = \frac{A_1}{a-b}$. Ini menunjukkan bahwa (3.1) adalah solusi dari persamaan (1.1). □

Teorema 3.2. [1] *Solusi dari persamaan diferensial fractional untuk* $\gamma_1 = 2a$ *dan* $\gamma_2 = a^2$, *dengan* $0 < \alpha < 1$ *adalah*

$$y = (At^\alpha + B)E_\alpha(at^\alpha), \tag{3.6}$$

dimana A *dan* B *adalah konstanta sebarang.*

Bukti.

$$D^{2\alpha} y - 2aD^\alpha y + a^2 y = 0 \tag{3.7}$$

Persamaan (3.7) dapat ditulis menjadi $(D^\alpha - a)^2 y = 0$ atau $(D^{2\alpha} - 2aD^\alpha + a^2)y = 0$, misalkan $(D^\alpha - a)y = v$ maka persamaan menjadi $(D^\alpha - a)v = 0$

$$\begin{aligned} v(t) =& A_1 E_\alpha(at^\alpha) \\ (D^\alpha - a)y =& A_1 E_\alpha(at^\alpha) \\ E_\alpha(-at^\alpha)(D^\alpha y - ay) =& A_1 E_\alpha(at^\alpha)E_\alpha(-at^\alpha) \end{aligned}$$

$$D^\alpha \left[yE_\alpha(at^\alpha)\right] = A_1 = D^\alpha \left[\frac{A_1 t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right] \tag{3.8}$$

Integral *fractional* tipe Jumarie dari persamaan (3.8) diperoleh

$$\begin{aligned} yE_\alpha(-at^\alpha) =& \frac{A_1}{\Gamma(1+\alpha)} + B \\ y =& (At^\alpha + B)E_\alpha(at^\alpha), dimana\ A = \frac{A_1}{\Gamma(1+\alpha)}. \end{aligned}$$

Ini menunjukkan bahwa (3.6) adalah solusi dari (1.1). □

Teorema 3.3. [1] *Solusi dari persamaan diferensial fractional untuk* $\gamma_1 = 2a$ *dan* $\gamma_2 = a^2 + b^2$ *dengan* $0 < \alpha < 1$ *adalah*

$$y = E_\alpha(at^\alpha)[A\cos_\alpha(bt^\alpha) + B\sin_\alpha(bt^\alpha)] \tag{3.9}$$

dimana A *dan* B *adalah konstanta sebarang.*

Bukti. Turunan *fractional* tipe Jumarie ke α dari (3.9), adalah

$$D^\alpha y = aE_\alpha(at^\alpha)\left[A\cos_\alpha(bt^\alpha) + B\sin_\alpha(bt^\alpha)\right] \tag{3.10}$$

$$+E_\alpha(at^\alpha)\left[-Ab\sin_\alpha(bt^\alpha)+Bb\cos_\alpha(bt^\alpha)\right]$$

Pengurangan (3.10) dengan ay, memberikan

$$D^\alpha y - ay = E_\alpha(at^\alpha)[-Ab\sin_\alpha(bt^\alpha)+Bb\cos_\alpha(bt^\alpha)] \tag{3.11}$$

Turunan *fractional* tipe Jumarie ke α dari (3.11) adalah

$$\begin{aligned} D^{2\alpha}y - aD^\alpha y &= aE_\alpha(at^\alpha)\left[-Ab\sin_\alpha(bt^\alpha)+Bb\cos_\alpha(bt^\alpha)\right] \\ &+E_\alpha(at^\alpha)\left[-Ab^2\cos_\alpha(bt^\alpha)-Bb^2\sin_\alpha(bt^\alpha)\right] \end{aligned} \tag{3.12}$$

Dengan mensubstitusi persamaan (3.11) dan persamaan (3.9) ke (3.12) diperoleh

$$D^{2\alpha}y - aD^\alpha y = a(D^\alpha y - ay)) - b^2 y \tag{3.13}$$

Persamaan (3.13) menjadi

$$D^{2\alpha}y - \gamma_1 D^\alpha y + \gamma_2 y = 0,$$

dimana $\gamma_1 = 2a$ dan $\gamma_2 = a^2+b^2$. Ini menunjukkan bahwa (3.9) adalah solusi dari (1.1). □

3.2. *Solusi persamaan diferensial fractional orde* $(3, \alpha)$

Perhatikan kembali persamaan diferensial *fractional* (1.2). Solusi dari (1.2) diberikan dalam teorema berikut

Teorema 3.4. *Solusi dari persamaan (1.2) , untuk* $0<\alpha<1$*, dimana* $\gamma_1 = a+b+c$*,* $\gamma_2 = ab+ac+bc$ *dan* $\gamma_3 = abc$ *adalah*

$$y = AE_\alpha(at^\alpha)+BE_\alpha(bt^\alpha)+CE_\alpha(ct^\alpha) \tag{3.14}$$

dimana A, B dan C adalah konstanta sebarang.

Bukti Teorema (3.4) ini dapat diperluas dari teorema (3.1).

Teorema 3.5. *Solusi dari persamaan diferensial fractional dengan* $\gamma_1 = 3a$*,* $\gamma_2 = 3a^2$ *dan* $\gamma_3 = a^3$ *untuk* $0<\alpha<1$ *adalah*

$$y = (At^{2\alpha}+Bt^\alpha+C)E_\alpha(at^\alpha) \tag{3.15}$$

dimana A, B dan C adalah konstanta sebarang.

Bukti. Turunan *fractional* tipe Jumarie ke α dari (3.15) adalah

$$D^\alpha y = \left[\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}At^\alpha + \Gamma(1+\alpha)B\right]E_\alpha(at^\alpha)+(At^{2\alpha}+Bt^\alpha+C)aE_\alpha(at^\alpha) \tag{3.16}$$

Pengurangan (3.16) dengan ay, memberikan

$$D^\alpha y - ay = \left[\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}At^\alpha + \Gamma(1+\alpha)B\right]E_\alpha(at^\alpha) \tag{3.17}$$

Turunan *fractional* tipe Jumarie ke α dari (3.17) adalah

$$(D^{2\alpha}y - aD^\alpha y) = \left[\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}\Gamma(1+\alpha)A + \Gamma(1+\alpha)B\right]E_\alpha(at^\alpha)$$

$$+ \left[\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)} At^{\alpha} + \Gamma(1+\alpha)B \right] aE_{\alpha}(at^{\alpha}) \tag{3.18}$$

Pengurangan (3.18) dengan $(a(D^{\alpha}y - ay))$, diperoleh

$$D^{2\alpha}y - 2aD^{\alpha}y + a^2y = \left[\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)} \Gamma(1+\alpha)A + \Gamma(1+\alpha)B \right] E_{\alpha}(at^{\alpha}) \tag{3.19}$$

Turunan *fractional* tipe Jumarie ke α dari (3.19) adalah

$$D^{3\alpha}y - 2aD^{2\alpha}y + a^2D^{\alpha}y = a \left(\left[\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)} \Gamma(1+\alpha)A + \Gamma(1+\alpha)B \right] E_{\alpha}(at^{\alpha}) \right) \tag{3.20}$$

Dengan menstubstitusi persamaan (3.19) ke persamaan (3.20) diperoleh

$$D^{3\alpha}y - \gamma_1 D^{2\alpha}y + \gamma_2 D^{\alpha}y - \gamma_3 y = 0,$$

dimana $\gamma_1 = 3a$, $\gamma_2 = 3a^2$ dan $\gamma_3 = a^3$. Ini menunjukkan bahwa (3.15) adalah solusi dari persamaan (1.2). □

Teorema 3.6. *Solusi dari persamaan diferensial fractional dengan* $\gamma_1 = a + 2b$, $\gamma_2 = 2ab + b^2$ *dan* $\gamma_3 = ab^2$ *untuk* $0 < \alpha < 1$ *adalah*

$$y = AE_{\alpha}(at^{\alpha}) + (Bt^{\alpha} + C)E_{\alpha}(bt^{\alpha}) \tag{3.21}$$

dimana A, B *dan* C *adalah konstanta sebarang.*

Bukti. Turunan *fractional* tipe Jumarie ke α dari (3.21), adalah

$$D^{\alpha}y = AaE_{\alpha}(at^{\alpha}) + \Gamma(1+\alpha)BE_{\alpha}(bt^{\alpha}) + (Bt^{\alpha} + C)bE_{\alpha}(bt^{\alpha}) \tag{3.22}$$

Pengurangan (3.22) dengan ay, memberikan

$$D^{\alpha}y - ay = \Gamma(1+\alpha)BE_{\alpha}(bt^{\alpha}) + (b-a)(Bt^{\alpha} + C)E_{\alpha}(bt^{\alpha}) \tag{3.23}$$

Turunan *fractional* tipe Jumarie ke α dari (3.23) adalah

$$D^{2\alpha}y - aD^{\alpha}y = b\Gamma(1+\alpha)BE_{\alpha}(bt^{\alpha})$$

$$+(b-a)\left(\Gamma(1+\alpha)BE_{\alpha}(bt^{\alpha}) + (Bt^{\alpha} + C)bE_{\alpha}(bt^{\alpha})\right) \tag{3.24}$$

Pengurangan (3.24) dengan $(b(D^{a}y - ay))$, memberikan

$$D^{2\alpha}y - (a+b)D^{\alpha}y + aby = (b-a)\left(\Gamma(1+\alpha)BE_{\alpha}(bt^{\alpha})\right) \tag{3.25}$$

Turunan *fractional* tipe Jumarie ke α dari (3.25) adalah

$$D^{3\alpha}y - (a+b)D^{2\alpha}y + abD^{\alpha}y = b\left((b-a)\Gamma(1+\alpha)BE_{\alpha}(bt^{\alpha})\right) \tag{3.26}$$

Dengan menstubstitusi persamaan (3.25) ke persamaan (3.26) diperoleh

$$D^{3\alpha}y - \gamma_1 D^{2\alpha}y + \gamma_2 D^{\alpha}y - \gamma_3 y = 0,$$

dimana $\gamma_1 = a + 2b$, $\gamma_2 = 2ab + b^2$ dan $\gamma_3 = ab^2$. Ini menunjukkan bahwa (3.15) adalah solusi dari persamaan (1.2). $\square$

Teorema 3.7. *Solusi dari persamaan diferensial fractional dengan* $\gamma_1 = a + 2b$, $\gamma_2 = 2ab + b^2 + c^2$ *dan* $\gamma_3 = ab^2 + ac^2$ *untuk* $0 < \alpha < 1$ *adalah*

$$y = AE_\alpha(at^\alpha) + E_\alpha(bt^\alpha)\left[B\cos_\alpha(ct^\alpha) + C\sin_\alpha(ct^\alpha)\right] \tag{3.27}$$

dimana A, B dan C adalah konstanta sebarang.

Bukti. Turunan *fractional* tipe Jumarie ke α dari (3.27), adalah

$$\begin{aligned} D^\alpha y = {} & aAE_\alpha(at^\alpha) + bE_\alpha(bt^\alpha)\left[B\cos_\alpha(ct^\alpha) + C\sin_\alpha(ct^\alpha)\right] \\ & + E_\alpha(bt^\alpha)\left[-Bc\sin_\alpha(ct^\alpha) + Cc\cos_\alpha(ct^\alpha)\right] \end{aligned} \tag{3.28}$$

Pengurangan (3.28) dengan ay, memberikan

$$\begin{aligned} D^\alpha y - ay = {} & (b-a)E_\alpha(bt^\alpha)\left[[B\cos_\alpha(ct^\alpha) + C\sin_\alpha(ct^\alpha)\right] \\ & + E_\alpha(bt^\alpha)\left[-Bc\sin_\alpha(ct^\alpha) + Cc\cos_\alpha(ct^\alpha)\right] \end{aligned} \tag{3.29}$$

Turunan *fractional* tipe Jumarie ke α dari (3.29 adalah

$$\begin{aligned} D^2\alpha y - aD^\alpha y = {} & b(b-a)E_\alpha(bt^\alpha)\left[[B\cos_\alpha(ct^\alpha) + C\sin_\alpha(ct^\alpha)\right] \\ & + (b-a)E_\alpha(bt^\alpha)\left[-Bc\sin_\alpha(ct^\alpha) + Cc\cos_\alpha(ct^\alpha)\right] \\ & + bE_\alpha(bt^\alpha)\left[-Bc\sin_\alpha(ct^\alpha) + Cc\cos_\alpha(ct^\alpha)\right]] \\ & + E_\alpha(bt^\alpha)\left[-Bc^2\cos_\alpha(ct^\alpha) - Cc^2\sin_\alpha(ct^\alpha)\right] \end{aligned} \tag{3.30}$$

Pengurangan (3.30) dengan $b(D^\alpha y - ay)$, memberikan

$$\begin{aligned} D^{2\alpha}y - (a+b)D^\alpha y + aby = {} & (b-a)E_\alpha(bt^\alpha)\left[-Bc\sin_\alpha(ct^\alpha) + Cc\cos_\alpha(ct^\alpha)\right] \\ & + E_\alpha(bt^\alpha)\left[-Bc^2\cos_\alpha(ct^\alpha) - Cc^2\sin_\alpha(ct^\alpha)\right] \end{aligned} \tag{3.31}$$

Turunan *fractional* tipe Jumarie ke α dari (3.31), adalah

$$\begin{aligned} D^{3\alpha}y - (a+b)D^\alpha y + aby = {} & b[(b-a)E_\alpha(bt^\alpha)\left[-Bc\sin_\alpha(ct^\alpha) + Cc\cos_\alpha(ct^\alpha)\right] \\ & + E_\alpha(bt^\alpha)\left[-Bc^2\cos_\alpha(ct^\alpha) - Cc^2\sin_\alpha(ct^\alpha)\right]] \\ & - c^2[(b-a)E_\alpha(bt^\alpha)\left[[B\cos_\alpha(ct^\alpha) + C\sin_\alpha(ct^\alpha)\right] \\ & + E_\alpha(bt^\alpha)\left[-Bc\sin_\alpha(ct^\alpha) + Cc\cos_\alpha(ct^\alpha)\right]] \end{aligned} \tag{3.32}$$

Dengan menstubstitusi persamaan (3.31) dan (3.30) ke persamaan (3.32), diperoleh

$$D^{3\alpha}y - (a+b)D^\alpha y + aby = b[D^{2\alpha}y - (a+b)D^\alpha y + aby] - c^2[D^\alpha y - ay]$$

$$D^3\alpha y - \gamma_1 D^2\alpha y + \gamma_2 D^\alpha y - \gamma_3 y = 0$$

dimana $\gamma_1 = a + 2b$, $\gamma_2 = 2ab + b^2 + c^2$ dan $\gamma_3 = ab^2 + ac^2$. Ini menunjukkan bahwa (3.15) adalah solusi dari persamaan (1.2). $\square$

4. Kesimpulan

Kesimpulan dari skripsi ini diberikan sebagai berikut:

1. Untuk persamaan diferensial *fractional* orde $(2, \alpha)$:
   (i.) Jika $\gamma_1 = a + b$ dan $\gamma_2 = ab$ maka solusi dari persamaan (1.1) adalah
   $$y = AE_\alpha(at^\alpha) + BE_\alpha(bt^\alpha),$$
   dimana A dan B adalah konstanta sebarang.
   (ii.) Jika $\gamma_1 = 2a$ dan $\gamma_2 = a^2$ maka solusi dari persamaan (1.1) adalah
   $$y = (At^\alpha + B)E_\alpha(at^\alpha),$$
   dimana A dan B adalah konstanta sebarang.
   (iii.) Jika $\gamma_1 = 2a$ dan $\gamma_2 = a^2 + b^2$ maka solusi dari persamaan (1.1) adalah
   $$y = E_\alpha(at^\alpha)[A\cos_\alpha(bt^\alpha) + B\sin_\alpha(bt^\alpha)]$$
   dimana A dan B adalah konstanta sebarang.
2. Untuk persamaan diferensial *fractional* orde $(3, \alpha)$:
   (i.) Jika $\gamma_1 = a+b+c$, $\gamma_2 = ab+ac+bc$ dan $\gamma_3 = abc$ maka solusi dari persamaan (1.2) adalah
   $$y = AE_\alpha(at^\alpha) + BE_\alpha(bt^\alpha) + CE_\alpha(ct^\alpha)$$
   dimana A, B dan C adalah konstanta sebarang.
   (ii.) Jika $\gamma_1 = 3a$, $\gamma_2 = 3a^2$ dan $\gamma_3 = a^3$ maka solusi dari persamaan (1.2) adalah
   $$y = (At^{2\alpha} + Bt^\alpha + C)E_\alpha(at^\alpha)$$
   dimana A, B dan C adalah konstanta sebarang.
   (iii.) Jika $\gamma_1 = a + 2b$, $\gamma_2 = 2ab + b^2$ dan $\gamma_3 = ab^2$ maka solusi dari persamaan (1.2) adalah
   $$y = AE_\alpha(at^\alpha) + (Bt^\alpha + C)E_\alpha(bt^\alpha)$$
   dimana A, B dan C adalah konstanta sebarang.
   (iv.) Jika $\gamma_1 = a + 2b$, $\gamma_2 = 2ab + b^2 + c^2$ dan $\gamma_3 = ab^2 + ac^2$ maka solusi dari persamaan (1.2) adalah
   $$y = AE_\alpha(at^\alpha) + E_\alpha(bt^\alpha)\left[B\cos_\alpha(ct^\alpha) + C\sin_\alpha(ct^\alpha)\right]$$
   dimana A, B dan C adalah konstanta sebarang.

Daftar Pustaka

[1] Ghosh. U, Sengupta. S, et al. 2015. Analytic Solution of Linear Fractional Differential Equation With Jumarie Derivative in Term of Mittag-Leffler Function. American *Journal of Mathematical Analysis*, 3(2), 32-38. doi:10.12691/ajma-3-2-2
[2] Jumarie. G. 2008. Fouriers Transformation of Fractional Order via Mittag-Leffler function and Modified Riemann-Liouville Derivatives. J. *Appl. Math. Informatics*. 26. 1101-1121.
[3] Kaczorek, T. 2011. *Selected Problem of Fractional Systems Theory*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

[4] Milici. Constantin, Gheorghe. D, J. Tanreiro. 2019. *Introduction to Fractional Differential Equations.* Springer, Switzerland.
[5] Miller. Kenneth S. 1993. *An Introduction to The Fractional Calculus and Fractional Differential Equation.* Simultaneusly, Canada.
[6] Spiegel, M . R. 1963. *Kalkulus Lanjutan Edisi Ketiga.* Terjemahan Bahasa Indonesia. Erlangga, Jakarta.