Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VIII** No. **1** Hal. 1– 8
Edisi Mei 2019
ISSN : 2303–291X

BILANGAN kROMATIK LOKASI GRAF KUBIK $C_{n,2n,2n,2n,n}$ UNTUK $n = 3$

Sugesti, Des Welyyanti, Budi Rudianto

Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : sugestiiges@gmail.com

Diterima 9 Maret 2019 Direvisi 7 April 2019 Dipublikasikan 7 Mei 2019

Abstrak. Misalkan $G = (V(G), E(G))$ adalah suatu graf terhubung dan c adalah suatu pewarnaan dari Graf G.Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, ..., S_k\}$, dimana S_i adalah kelas warna di G yang berwarna i dengan $1 \leq i \leq k$. Representasi v terhadap Π disebut kode warna, dinotasikan $c_\Pi(v)$ merupakan pasangan terurut dengan k-unsur yaitu,

$$c_\Pi(v) = (d(v, S_1), d(v, S_2), ..., d(v, S_k)),$$

dengan $d(v, S_i) = min\{d(v, x)|x \in S_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik di G mempunyai kode warna yang berbeda maka c disebut pewarnaan lokasi. Minimum dari banyaknya warna yang digunakan pada pewarnaan lokasi pada graf G disebut bilangan kromatik lokasi, dinotasikan dengan $\chi_L(G)$. Pada penelitian ini akan dibahas tentang penentuan bilangan kromatik lokasi dari graf kubik $C_{n,2n,2n,2n,n}$ untuk $3 \leq n \leq 8$.

Kata Kunci: Bilangan Kromatik Lokasi, kode warna, pewarnaan lokasi, Graf kubik $C_{n,2n,2n,2n,n}$

1. Pendahuluan

Graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan terurut $(V(G), E(G))$ dengan $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ menyatakan himpunan titik (*vertex*) tak kosong dari G dan $E(G) = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ menyatakan himpunan sisi (*edge*) dari G.

Salah satu kajian yang terdapat dalam teori graf adalah mengenai bilangan kromatik lokasi. Bilangan kromatik lokasi diperkenalkan oleh Chartrand dkk [3] pada tahun 2002. Konsep bilangan kromatik lokasi merupakan perpaduan antara pewarnaan dan dimensi partisi suatu graf. Konsep dimensi partisi suatu graf pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand. dkk [5] pada tahun 1998. Pewarnaan titik pada graf adalah pemberian warna untuk setiap titik pada graf dengan syarat setiap titik yang bertetangga harus memiliki warna yang berbeda. Banyaknya warna minimum yang digunakan untuk pewarnaan titik pada graf G disebut bilangan kromatik lokasi yang dinotasikan dengan $\chi_L(G)$.

Chartrand dkk [4] memperoleh bilangan kromatik lokasi dari beberapa kelas graf. Untuk graf lintasan Pn dengan $n > 3$ diperoleh bilangan kromatik lokasi

$\chi_L(P_n) = 3$. Untuk graf lingkaran diperoleh $\chi_L(Cn) = 3$ untuk n ganjil atau $\chi_L(C_n) = 4$ untuk n genap. Selain itu, Chratrand dkk juga menunjukkan bahwa graf multipartit lengkap adalah satu-satunya graf orde n yang mempunyai bilangan kromatik lokasi n, untuk $n \geq 3$.

Selanjutnya, Zulkarnain [5] membahas tentang pelabelan total sisi anti ajaib super pada graf kubik $C_{n,2n,2n,2n,n}$ untuk $n \geq 3$. Graf kubik $C_{n,2n,2n,2n,n}$ adalah graf yang dibentuk dari graf lingkaran sedemikian sehingga setiap titik nya berderajat 3. Untuk mendapatkan hasil yang baru dalam tugas akhir ini akan ditentukan bilangan kromatik lokasi dari graf kubik $C_{n,2n,2n,2n,n}$.

2. Landasan Teori

2.1. *Definisi dan Terminologi Graf*

Suatu graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan terurut $V(G), E(G))$ dimana $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ menyatakan himpunan titik (*vertexset*) tak kosong dari G dan $E(G) = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ menyatakan himpunan sisi (*edgeset*) dari G. Kardinalitas himpunan titik di $V(G)$ disebut orde dari graf G dan dinotasikan dengan $|V(G)|$, sedangkan kardinalitas dari himpunan sisi $E(G)$ disebut ukuran (size) dari graf G dinotasikan dengan $|E(G)|$.

Misalkan titik v_i dan titik v_j adalah ujung-ujung dari sisi e, maka v_i dan v_j dikatakan terkait (incident) dengan sisi e. Titik v_i dan v_j dikatakan bertetangga (adjacent) jika terdapat sisi yang mengaitkan dua titik tersebut. Derajat (degree) dari titik v adalah banyak sisi yang terkait dengan titik v, dinotasikan dengan $deg(v)$.

Jalan (walk) dari suatu graf G adalah suatu barisan hingga yang tak kosong dimana setiap sukunya adalah titik dan sisi berurutan secara bergantian, dinotasikan dengan $W = v_0e_1v_1e_2v_2...e_kv_k$ dengan v_{i-1} dan v_i adalah titik-titik ujung dari sisi e_i, untuk $1 \leq i \leq k$. Lintasan adalah jalan yang melewati semua titik dan sisi yang berbeda.

Panjang lintasan adalah banyaknya sisi yang terdapat di dalam lintasan. Jarak antara u dan v adalah panjang lintasan terpendek dari u dan v, dinotasikan dengan $d(u, v)$. Titik Dominan adalah titk yang jarak nya ke dirinya sendiri nol dan ke yang lainnya satu.

Suatu graf G dikatakan graf terhubung (connected graph) jika terdapat lintasan yang menghubungkan setiap dua titik di graf G.

2.2. *Bilangan Kromatik Lokasi Suatu Graf*

Pewarnaan titik pada graf $G = (V(G), E(G))$ adalah suatu pemetaan $c : V(G) \to N$, dimana N adalah himpunan bilangan asli sedemikian sehingga $c(u) \neq c(v)$ jika u dan v bertetangga. Jika warna yang digunakan sebanyak k maka G dikatakan mempunyai k-pewarnaan. Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, ..., S_k\}$, dimana S_i adalah partisi dari titik di G yang berwarna i dengan $1 \leq i \leq k$. Representasi v terhadap Π disebut kode warna, dinotasikan $c_\Pi(v)$ merupakan pasangan terurut dengan k-unsur yaitu,

$$c_\Pi(v) = (d(v, S_1), d(v, S_2), ..., d(v, S_k)),$$

dengan $d(v, S_i) = min\{d(v, x)|x \in S_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik yang berbeda pada G mempunyai kode warna yang berbeda terhadap Π, maka c disebut pewarnaan lokasi. Minimum dari banyaknya warna yang digunakan pada pewarnaan lokasi dari graf G disebut bilangan kromatik lokasi dinotasikan $\chi_L(G)$. Berikut adalah teorema daar dari bilangan kromatik lokasi.

Teorema 2.2.1 [3] *Misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung G. Jika u dan v adalah dua titik pada graf G sedemikian sehingga $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) \setminus \{u, v\}$ maka $c(v) \neq c(u)$. Dalam hal khusus, jika u dan v adalah titik-titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) = N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.*

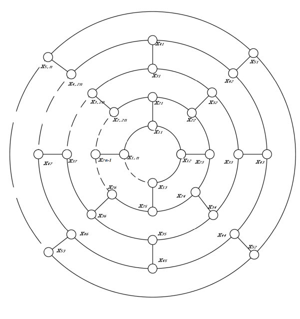
Bukti. Misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung G dan misalkan $\Pi = (S_1, S_2, ..., S_k)$ adalah partisi dari titik-titik G ke dalam kelas warna S_i. Untuk suatu titik $u, v \in V(G)$, andaikan $c(u) = c(v)$ sedemikian sehingga titik u dan v berada dalam kelas warna yang sama, misal S_i dari Π. Akibatnya $c_\Pi(u) = c_\Pi(v)$ karna jarak titik u dan titik v ke semua titik di G selain ke titik u dan titik v sama, sehingga c bukan pewarnaan lokasi. Dengan demikian, $c_\Pi(u) \neq c_\Pi(v)$ dengan u dan v suatu pewarnaan yang berbeda. □

Akibat 2.2.1. [3]Jika G adalah graf terhubung dengan suatu titik yang bertetangga dengan k titik daun, maka $\chi_L(G) \geq k + 1$.

Bukti. Misalkan v adalah suatu titik yang bertetangga dengan k titik daun, yaitu $x_1, x_2, ..., x_k$ di G. Berdasarkan Teorema 2.3.1, setiap pewarnaan lokasi dari G mempunyai warna berbeda untuk setiap $x_i, i = 1, 2, ..., k$. Oleh karena v bertetangga dengan semua x_i, maka v harus mempunyai warna yang berbeda dengan semua daun x_i. Akibatnya, $\chi_L(G) \geq k + 1$.

2.3. *Graf Kubik $C_{n,2n,2n,2n,n}$*

Diberikan graf lingkaran dengan n titik yang ditulis sebagai C_n, dengan $n \geq 3$. Kemudian dibentuk graf kubik yang terdiri dari lima buah graf lingkaran yaitu $C_n^1, C_{2n}^2, C_{2n}^3, C_{2n}^4, C_n^5$ dengan $n \geq 3$. . Berikut Gambar 2 adalah graf kubik $C_{n,2n,2n,2n,n}$ dengan $n \geq 3$.



Gambar 1. Graf kubik $C_{n,2n,2n,2n,n}$, $n \geq 3$.

3. Pembahasan

3.1. *Bilangan Kromatik Lokasi Graf Kubik* $C_{n,2n,2n,2n,n}$ *untuk* $3 \leq n \leq 8$

Pada bab ini akan dibahas tentang penentuan bilangan kromatik lokasi dari graf kubik $C_{n,2n,2n,2n,n}$ untuk $3 \leq n \leq 8$.

Teorema 3.1. $\Diamond$ *Misalkan terdapat graf* $C_{n,2n,2n,2n,n}$ *adalah graf kubik, maka bilangan kromatik lokasi* $\chi_L(C_{n,2n,2n,2n,n}) = 5$ *untuk* $3 \leq n \leq 8$.

Bukti. Misalkan c adalah pewarnaan titik di $C_{n,2n,2n,2n,n}$ untuk $3 \leq n \leq 8$ dan $\Pi = \{S_1, S_2, ..., S_k\}$ adalah suatu partisi titik-titik pada graf $C_{n,2n,2n,2n,n}$ dengan S_i menyatakan kelas warna ke-i untuk $1 \leq i \leq k$. Akan ditentukan bilangan kromatik lokasi graf kubik $C_{n,2n,2n,2n,n}$. Dalam menentukan bilangan kromatik lokasi, terdapat beberapa syarat yang harus dipenuhi. Pertama, setiap titik yang bertetangga tidak boleh diwarnai dengan warna yang sama. Selanjutnya, kode warna setiap titik di $C_{n,2n,2n,2n,n}$ terhadap Π haruslah berbeda. Pandang beberapa kasus berikut. $\square$

Kasus 1. Akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(C_{n,2n,2n,2n,n}) = 5$ untuk $n = 3$.

Pertama akan ditunjukkan $\chi_L(C_{3,6,6,6,3}) \geq 5$. Perhatikan bahwa pada graf kubik $C_{3,6,6,6,3}$ terdapat dua C_3 yaitu C_3^1 dan C_3^5 dan tiga C_6 yaitu C_6^2, C_6^3 dan C_6^4, dapat dilihat pada Gambar 3.0.1. Oleh karena setiap titik pada $C_{3,6,6,6,3}$ berderajat 3, maka akan terdapat 2 titik dominan dengan warna yang sama sehingga kode warnannya akan sama, maka tidak cukup dengan 3 warna agar setiap titik di $C_{3,6,6,6,3}$ memiliki kode warna yang berbeda maka haruslah $\chi_L(C_{3,6,6,6,3}) \geq 4$.

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa untuk sebarang pewarnaan dengan 4 warna akan terdapat 2 titik dengan kode warna yang sama pada $C_{3,6,6,6,3}$.

Dengan menggunakan pigeon hole untuk mewarnai 24 titik dengan 4 warna yang setiap titiknya berderajat 3, warnanya menjadi sangkarnya dan titik nya menjadi burung merpatinya. Prinsip sangkar burung menyatakan bahwa jika n burung terbang menuju m sangkar dan n lebih besar dari m, maka paling sedikit ada satu sangkar yang memuat dua atau lebih burung. Prinsip ini dapat diilustrasikan dengan $n = 24$ dan $m = 4$.

Tanpa mengurangi perumuman, misalkan titik pertama diwarnai dengan warna 1 dan titik yang bertetangga dengan titik pertama diwarnai dengan warna 2,3,dan 4. Selanjutnya titik kedua adalah titik selain titik pertama dan yang bertetangga dengan titik pertama diwarnai dengan warna 2 dan titik yang bertetangga dengan titik kedua diwarnai dengan warna 1,3,4. Selanjutnya titik ketiga adalah titik selain titik yang sudah diberi warna sebelumnya diwarnai dengan warna 3 dan titik yang bertetangga dengan titik ketiga diwarnai dengan warna 1,2,4. Selanjutnya titik keempat diwarnai dengan warna 4 dan titik yang bertetangga dengan titik keempat diwarnai dengan warna 1,2,3 dan titik lainnya diwarnai dengan sebarang kombinasi warna dengan 4 warna, maka pada titik ke-17 akan terdapat titik dengan warna yang kombinasinya sama dengan warna sebelumnya sehingga kode warna titik tersebut akan sama. Jadi haruslah $\chi_L(C_{3,6,6,6,3}) \geq 5$.

Perhatikan Gambar 3.0.1, Pewaranaan dengan 4 warna untuk $C_{3,6,6,6,3}$ dua titik yang mempunyai kode warna yang sama adalah titik $c_\Pi(x_{11}) = c_\Pi(x_{25}) = (0,1,1,1)$. Karena terdapat 2 dua titik yang kode warna nya sama maka haruslah $\chi_L(C_{3,6,6,6,3}) \geq 5$. Dengan alasan yang sama juga bisa untuk membuktikan $\chi_L(C_{n,2n,2n,2n,n}) \geq 5$ untuk $4 \leq n \leq 8$ karena titik yang diwarnai lebih besar dari 24 dan setiap titik berderajat 3.

Selanjutnya, akan ditunjukkan $\chi_L(C_{3,6,6,6,3}) \leq 5$. Misalkan konstruksi pewarnaan titik terhadap graf kubik $C_{3,6,6,6,3}$ didefinisikan dengan $c : V(C_{3,6,6,6,3}) \rightarrow \{1,2,3,4,5\}$ sedemikian sehingga :

a. $c(x_{11}) = c(x_{23}) = c(x_{25}) = c(x_{32}) = c(x_{34}) = c(x_{36}) = c(x_{41}) = c(x_{43}) = c(x_{45}) = c(x_{51}) = 1$
b. $c(x_{12}) = c(x_{22}) = c(x_{24}) = c(x_{26}) = c(x_{33}) = c(x_{35}) = c(x_{42}) = c(x_{44}) = c(x_{46}) = 2$
c. $c(x_{13}) = 3$
d. $c(x_{21}) = c(x_{31}) = c(x_{52}) = 4$
e. $c(x_{53}) = 5$

Berdasarkan konstruksi tersebut diperoleh kelas warna sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \{x_{11}, x_{23}, x_{25}, x_{32}, x_{34}, x_{36}, x_{41}, x_{43}, x_{45}, x_{51}\}, \\
S_2 &= \{x_{12}, x_{22}, x_{24}, x_{26}, x_{33}, x_{35}, x_{42}, x_{44}, x_{46}\}, \\
S_3 &= \{x_{13}\}, \\
S_4 &= \{x_{21}, x_{31}, x_{52}\}, \\
S_5 &= \{x_{53}\}.
\end{aligned}
$$

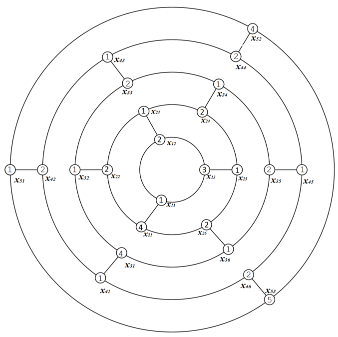
Dari definisi pewarnaan titik di atas terlihat bahwa setiap titik yang bertetangga diwarnai dengan warna yang berbeda.

Kode warna pada setiap titik di $C_{3,6,6,6,3}$ terhadap Π sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
c_\Pi(x_{11}) &= (d(x_{11}, S_1), d(x_{11}, S_2), d(x_{11}, S_3), d(x_{11}, S_4), d(x_{11}, S_5)) \\
&= (0,1,1,1,7), \\
c_\Pi(x_{23}) &= (d(x_{23}, S_1), d(x_{23}, S_2), d(x_{23}, C_3), d(x_{23}, S_4), d(x_{23}, S_5)) \\
&= (0,1,2,2,6),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_\Pi(x_{25}) &= (0,1,1,2,6), & c_\Pi(x_{32}) &= (0,1,4,1,4),\\
c_\Pi(x_{34}) &= (0,1,3,3,4), & c_\Pi(x_{36}) &= (0,1,3,1,4),\\
c_\Pi(x_{41}) &= (0,1,5,1,2), & c_\Pi(x_{43}) &= (0,1,5,2,3),\\
c_\Pi(x_{45}) &= (0,1,5,2,2), & c_\Pi(x_{51}) &= (0,1,7,1,1),\\
c_\Pi(x_{12}) &= (1,0,1,2,7), & c_\Pi(x_{22}) &= (1,0,3,1,5),\\
c_\Pi(x_{24}) &= (1,0,2,3,5), & c_\Pi(x_{26}) &= (1,0,2,1,5),\\
c_\Pi(x_{33}) &= (1,0,4,2,4), & c_\Pi(x_{35}) &= (1,0,4,2,3),\\
c_\Pi(x_{42}) &= (1,0,6,2,2), & c_\Pi(x_{44}) &= (1,0,6,1,2),\\
c_\Pi(x_{46}) &= (1,0,6,2,1), & c_\Pi(x_{13}) &= (1,1,0,2,7),\\
c_\Pi(x_{21}) &= (1,1,2,0,6), & c_\Pi(x_{31}) &= (1,2,4,0,3),\\
c_\Pi(x_{52}) &= (1,1,7,0,1), & c_\Pi(x_{53}) &= (1,1,7,2,0).
\end{aligned}
$$

Oleh karena setiap titik pada $C_{3,6,6,6,3}$ memiliki kode warna yang berbeda maka c merupakan pewarnaan lokasi pada $C_{3,6,6,6,3}$, sehingga diperoleh $\chi_L(C_{3,6,6,6,3}) \leq 5$. Dari pembuktian $\chi_L(C_{3,6,6,6,3}) \leq 5$ dan $\chi_L(C_{3,6,6,6,3}) \geq 5$ dapat disimpulkan bahwa $\chi_L(C_{3,6,6,6,3}) = 5$.



Gambar 2. Graf kubik $C_{n,2n,2n,2n,n}, n \geq 3$.

4. Kesimpulan

Bilangan kromatik lokasi dari graf kubik $C_{n,2n,2n,2n,n}$ adalah minimum banyaknya warna yang digunakan dalam pada pewarnaan lokasi dari graf $C_{n,2n,2n,2n,n}$. Graf $C_{n,2n,2n,2n,n}$ adalah graf yang dibentuk dari 5 lingkaran yaitu $C_n^1, C_{2n}^2 C_{2n}^3, C_{2n}^4, C_n^5$ dengan $n \geq 3$ kemudian dibentuk menjadi graf kubik sedemikian sehingga semua titik pada graf $C_{n,2n,2n,2n,n}$ berderajat 3. Pada tugas akhir ini diperoleh bilangan bilangan kromatik lakasi pada graf $C_{n,2n,2n,2n,n}$ adalah 5 untuk $3 \leq n \leq 8$ dan untuk $n \geq 8$ batas bawah bilangan kromatik lokasinya adalah 5.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada ibu Dr. Lyra Yulianti, Dr. Haripamyu, dan bapak Dr. Mahdhivan Syafwan selaku dosen penguji tugas akhir yang telah memberikan masukkan dan saran sehingga makalah ini dapat di-selesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Bondy, J.A. and U.S.R. Murty. 1976. *Graph Theory with Applications.* Elsevier Science Publishing Co., Inc., New York.

[2] Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M.A., Slater, P.J. dan Zhang, P. 2003. Graph of Order n With Locating-Chromatic Number $n - 1$. *Discrete Math.* 269:65-79.

[3] Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M.A., Slater, P.J. dan Zhang, P. 2002. *Locating Chromatic Number of a Graph.* Bull Inst .Combin . Appl. 36:89-101.

[4] Chartrand, G., Salehi, E., dan Zhang, P.2000. The Partition Dimension of a Graph.*Aequationes Mathematicae* .59:45-54.

[5] Zulkarnain.D.2019. *Pelabelan Total Sisi Anti Ajaib Super Pada Graf Kubik* $C_{n,2n,2n,2n,n}$. Skripsi S-1 Universitas Andalas , Indonesia .,tidak diterbitkan