DIMENSI METRIK DARI GRAF $Amal(Tr_n, v)_m$ untuk $n = 5$ dan $m = 3$

Angdini Putri F, Lyra Yulianti, Budi Rudianto

*Program Studi S1 Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
 email : angdini.putri27@gmail.com*

Diterima 9 Maret 2019 Direvisi 7 April 2019 Dipublikasikan 7 Mei 2019

Abstrak. Misalkan terdapat graf terhubung $G = (V, E)$ dan himpunan terurut $W \subset V(G)$, dengan $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$, serta terdapat titik $v \in V(G)$. Representasi titik v terhadap W yang dinotasikan dengan $r(v|W)$, adalah k -vektor

$$r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k)).$$

Jika untuk setiap dua titik u dan v di G diperoleh bahwa $r(u|W) \neq r(v|W)$, maka W disebut sebagai himpunan pemisah (*resolving set*) untuk graf G . Kardinalitas dari himpunan pemisah minimum dinamakan dimensi metrik dari graf G yang dinotasikan $dim(G)$. Graf amalgamasi tangga segitiga diperumum homogen adalah graf yang diperoleh dari hasil amalgamasi graf tangga segitiga diperumum yang sama untuk masing-masing graf. Graf tangga segitiga diperumum dinotasikan dengan Tr_n , untuk $n \geq 2$. Pada paper ini dibahas tentang dimensi metrik dari graf $Amal(Tr_n, v)_m$ untuk $n = 5$ dan $m = 3$.

Kata Kunci: Dimensi metrik, Himpunan pemisah, Graf $Amal(Tr_n, v)_m$

1. Pendahuluan

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang bermanfaat dalam kehidupan sehari-hari. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek dan hubungan objek-objek tersebut. Representasi visual dari graf dengan menyatakan objek sebagai titik, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis. Salah satu topik dalam teori graf adalah dimensi metrik pada graf. Dimensi metrik pada graf diperkenalkan pertama kali secara terpisah oleh Slater pada tahun 1975 dan oleh Harary dan Melter pada tahun 1976 [4].

Yulianti, dkk [7] mendefinisikan graf $Amal\{Tr_n, v\}_m$, dimana graf $Amal\{Tr_n, v\}_m$ adalah graf yang berasal dari m buah graf tangga segitiga diperumum Tr_n , untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$. Dimensi metrik dari graf $Amal\{Tr_n, v\}_m$ untuk $m = 2$ telah ditentukan oleh Febrianti, F. [3]. Sementara, dimensi metrik dari Tr_n untuk $m = 1$ telah ditentukan oleh Angraini, F. [1] untuk $n \geq 2$. Pada tugas akhir ini akan ditentukan dimensi metrik dari $Amal\{Tr_n, v\}_m$ untuk $m \geq 2$.

Dengan menggunakan hasil dari [3], akan diperoleh dimensi metrik dari $Amal\{Tr_n, v\}_m$ untuk $n = 5$ dan $m = 3$.

2. Landasan Teori

2.1. Definisi Graf

Suatu **graf** G adalah pasangan himpunan V dan E yang dapat dituliskan $G = (V, E)$, dimana V adalah suatu himpunan titik (*vertex*) yang tidak kosong dan E adalah himpunan sisi (*edge*) yang terdiri dari pasangan terurut titik-titik berbeda dari V . Misalkan $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah himpunan titik yang berisi n titik di G dan $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ adalah himpunan sisi yang berisi m sisi di G . Sisi pada graf, dapat juga dituliskan dengan $v_i v_j$ atau $v_j v_i$.

2.2. Amalgamasi pada Graf

Definisi 2.1.[5] Misalkan G_i suatu graf sederhana terhubung untuk $i \in \{1, 2, 3, \dots, t\}$ dengan $V(G_i) = \{v_{ij} \mid 1 \leq j \leq k_i\}$ dan $|V(G_i)| = k_i$, dimana $k_i \geq 2$. Selanjutnya, $\{G_1, G_2, \dots, G_t\}$ untuk $t \geq 2$ kumpulan hingga graf dan untuk setiap G_i mempunyai titik $v_i \in V(G_i)$ yang disebut titik terminal. Amalgamasi pada graf dinotasikan dengan $Amal(G_i, v)_t$ adalah suatu graf yang berasal dari graf $G_1, G_2, \dots, G_t$ dengan mengidentifikasi titik-titik terminal v_i menjadi titik baru yang dinamakan titik v .

Misalkan $G = Amal(G_i, v)_t$, dimana titik identifikasi graf G dinotasikan dengan v dan $V(G) = \{v\} \cup \{v_{ij} \mid 1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq k_i - 1\}$. Pada Gambar 1 diberikan contoh graf amalgamasi dari tiga graf C_4 , dimana titik yang diidentifikasi adalah titik v_1, v_2 dan v_3 menjadi titik v .

Gambar 1. Graf $Amal(G_i, v)_t$ dimana $G_i = C_4$ dan $t = 3$

2.3. Graf $Amal(Tr_n, v)_m$

Graf piramida dengan tinggi n (dinotasikan dengan Pr_n) adalah graf yang dibentuk dari graf-graf 1-tangga segitiga, 3-tangga segitiga, 5-tangga segitiga, $\dots$, $(2n - 3)$ -tangga segitiga, dimana graf 1-tangga setiga sebagai puncak dari graf piramida dan graf $(2n - 3)$ -tangga segitiga sebagai landasan bawah graf piramida seperti pada Gambar 3.

Graf tangga segitiga diperumum (dinotasikan dengan Tr_n , $n \geq 2$) adalah graf yang diperoleh dengan menambahkan suatu titik baru yang dinamakan titik utama pada graf piramida dan bertetangga dengan sebanyak n titik di landasan dasar graf piramida, dimana n menyatakan banyak titik yang bertetangga dengan titik utama [7].

Gambar 2. Graf tangga segitiga diperumum Tr_n

Graf amalgamasi tangga segitiga diperumum adalah graf yang diperoleh dari hasil amalgamasi graf tangga segitiga diperumum. Graf amalgamasi tangga segitiga diperumum homogen adalah graf yang diperoleh dari hasil amalgamasi graf tangga segitiga diperumum yang sama untuk masing-masing graf yaitu graf Tr_n . Berdasarkan Definisi 2.1, dengan memilih $G_i = Tr_n$ dengan titik terminal untuk masing-masing Tr_n adalah titik v_k maka graf amalgamasi tangga segitiga diperumum homogen dapat dinotasikan dengan $Amal(Tr_n, v)_m$, dimana $m \geq 2$ dan $n \geq 2$ serta v menyatakan titik utama pada graf tersebut. Notasikan graf Tr_{nk} untuk $k = 1, 2, 3, \dots, m$ adalah graf Tr_n ke- k dengan himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut,

$$V(Tr_{nk}) = \{v_k\} \cup \{v_{ij}^{(k)} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n - i + 1\},$$

$$E(Tr_{nk}) = E_{1k} \cup E_{2k} \cup E_{3k} \cup E_{4k},$$

dimana

$$E_{1k} = \{v_k v_{1j}^{(k)} \mid 1 \leq j \leq n\}, \quad (2.3.1)$$

$$E_{2k} = \{v_{ij}^{(k)} v_{i(j+1)}^{(k)} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n - i\}, \quad (2.3.2)$$

$$E_{3k} = \{v_{ij}^{(k)} v_{(i+1)j}^{(k)} \mid 1 \leq i \leq n - j, 1 \leq j \leq n - 1\}, \quad (2.3.3)$$

$$E_{4k} = \{v_{ij}^{(k)} v_{(i+1)(j-1)}^{(k)} \mid 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq j \leq n - i + 1\}. \quad (2.3.4)$$

Dengan mengidentifikasi titik-titik $v_1, v_2, \dots, v_m$ menjadi titik v dari graf $Tr_{n1}, Tr_{n2}, \dots, Tr_{nk}$ seperti yang terlihat pada Gambar 3, maka untuk setiap $n \geq 2$ dan $m \geq 2$ diperoleh graf $Amal(Tr_n, v)_m$ adalah graf dengan himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut,

$$V(\text{Amal}(Tr_n, v)_m) = \{v\} \cup \left(\bigcup_{k=1}^m \{v_{ij}^{(k)} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n-i+1\} \right),$$

$$E(\text{Amal}(Tr_n, v)_m) = \bigcup_{k=1}^m (E_{1k}^* \cup E_{2k} \cup E_{3k} \cup E_{4k}),$$

dimana

$$E_{1k}^* = \{vv_{1j}^{(k)} \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

E_{2k}, E_{3k}, E_{4k} secara terurut telah didefinisikan sebelumnya oleh (2.3.2), (2.3.3), (2.3.4) merupakan himpunan sisi pada graf $\text{Amal}(Tr_n, v)_m$.

Gambar 3. [8] Graf $\text{Amal}(Tr_n, v)_m$

3. Dimensi Metrik pada Graf

Misalkan terdapat suatu graf terhubung yang dinotasikan dengan $G = (V, E)$ dimana terdapat dua titik $u, v \in V(G)$. Jarak antara u dan v dapat didefinisikan sebagai panjang lintasan terpendek antara u dan v yang dinotasikan dengan $d(u, v)$. Serta terdapat himpunan terurut $W \subset V(G)$, dengan $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ dan titik $v \in V(G)$. Representasi titik v terhadap W dinotasikan dengan $r(v|W)$, adalah k -vektor

$$r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k)).$$

Jika $\forall u, v \in V(G)$ berlaku $d(u, w_i) = d(v, w_i)$ untuk $1 \leq i \leq k$, maka $r(u|W) = r(v|W)$. Jika $\exists w_i \in W$ sehingga $d(u, w_i) \neq d(v, w_i)$ maka $r(u|W) \neq r(v|W)$. Jika untuk setiap dua titik u dan v di $V(G)$ diperoleh bahwa $r(u|W) \neq r(v|W)$, maka W disebut sebagai himpunan pemisah (*resolving set*) untuk graf G . Himpunan pemisah yang mempunyai kardinalitas minimum disebut sebagai himpunan pemisah minimum (*minimum resolving set*). Kardinalitas dari himpunan pemisah minimum ini dinamakan **dimensi metrik** dari graf G , dinotasikan $dim(G)$ [2].

Teorema 3.1. [2] *Misal G adalah graf terhubung dengan banyak titik $n \geq 2$, maka $dim(G) = 1$ jika dan hanya jika $G = P_n$.*

Teorema 3.2. [2] *Jika G graf lengkap dengan n titik dan $n \geq 3$, maka $dim(G) = n - 1$.*

Teorema 3.3. [6] *Misalkan $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ kumpulan hingga graf dan v_k adalah titik terminal dari G_i untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Jika G adalah amalgamasi dari $G_1, G_2, \dots, G_n$ yang dinotasikan $Amal\{G_i, v\}_n$, maka*

$$\sum_{i=1}^n dim(G_i) - n \leq dim(G) \leq \sum_{i=1}^n dim(G_i) + n - 1.$$

3.1. Dimensi Metrik dari Graf Amal(Tr_n, v) $_m$ untuk $n = 5$ dan $m = 3$

Teorema 3.1 *Misalkan $Amal(Tr_n, v)_m$ adalah graf amalgamasi tangga segitiga diperumum homogen dengan $n = 5$ dan $m = 3$, maka.*

$$dim(Amal(Tr_5, v)_3) = 5.$$

Bukti :

Andaikan $W = \{a, b, c, d\}$, $a \neq b \neq c \neq d$, dimana a, b, c dan d titik-titik yang terdapat pada graf $Amal(Tr_5, v)_3$. Perhatikan bahwa,

- Andaikan titik a, b, c, d terletak pada Tr_{51} . Himpunan W tidak akan memberikan representasi yang berbeda, karena $d(v_{j1}^{(2)}, v) = d(v_{j2}^{(2)}, v)$, sehingga diperoleh bahwa $r(v_{j1}^{(2)}|W) = r(v_{j2}^{(2)}|W)$.
- Andaikan titik a, b terletak pada Tr_{51} dan titik c, d terletak pada Tr_{52} . Himpunan W tidak akan memberikan representasi yang berbeda, karena $d(v_{j1}^{(3)}, v) = d(v_{j2}^{(3)}, v)$. Diperoleh bahwa $r(v_{j1}^{(3)}|W) = r(v_{j2}^{(3)}|W)$.
- Andaikan titik a, b terletak pada Tr_{51} , titik c terletak pada Tr_{52} , dan titik d terletak pada Tr_{53} . Himpunan W tidak akan memberikan representasi yang berbeda, karena terdapat paling sedikit dua titik mempunyai representasi yang sama, yaitu dua titik yang memiliki jarak yang sama ke titik v .

Karena himpunan W tidak memberikan representasi yang berbeda, maka diperoleh bahwa $dim(Amal(Tr_5, v)_3) \geq 5$. Selanjutnya, misalkan $W =$

$\{v_{11}^{(1)}, v_{22}^{(1)}, v_{11}^{(2)}, v_{22}^{(2)}, v_{11}^{(3)}\}$. Representasi semua titik pada graf $Amal(Tr_5, v)_3$ terhadap W adalah,

$$r(v|W) = (1, 2, 1, 2, 1),$$

$$\begin{aligned} r(v_{11}^{(1)}|W) &= (0, 2, 2, 3, 2), & r(v_{24}^{(2)}|W) &= (3, 4, 4, 2, 3), \\ r(v_{12}^{(1)}|W) &= (1, 1, 2, 3, 2), & r(v_{31}^{(2)}|W) &= (4, 5, 2, 1, 4), \\ r(v_{13}^{(1)}|W) &= (2, 1, 2, 3, 2), & r(v_{32}^{(2)}|W) &= (4, 5, 3, 1, 4), \\ r(v_{14}^{(1)}|W) &= (3, 2, 2, 3, 2), & r(v_{33}^{(2)}|W) &= (4, 5, 4, 2, 4), \\ r(v_{15}^{(1)}|W) &= (4, 3, 2, 3, 2), & r(v_{41}^{(2)}|W) &= (5, 6, 3, 2, 5), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r(v_{21}^{(1)}|W) &= (1, 1, 3, 4, 3), & r(v_{42}^{(2)}|W) &= (5, 6, 4, 2, 5), \\ r(v_{22}^{(1)}|W) &= (2, 0, 3, 4, 3), & r(v_{51}^{(2)}|W) &= (6, 7, 4, 3, 6), \\ r(v_{23}^{(1)}|W) &= (3, 1, 3, 4, 3), & r(v_{11}^{(3)}|W) &= (2, 3, 2, 3, 0), \\ r(v_{24}^{(1)}|W) &= (4, 2, 3, 4, 3), & r(v_{12}^{(3)}|W) &= (2, 3, 2, 3, 1), \\ r(v_{31}^{(1)}|W) &= (2, 1, 4, 5, 4), & r(v_{13}^{(3)}|W) &= (2, 3, 2, 3, 2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r(v_{32}^{(1)}|W) &= (3, 1, 4, 5, 4), & r(v_{14}^{(3)}|W) &= (2, 3, 2, 3, 3), \\ r(v_{33}^{(1)}|W) &= (4, 2, 4, 5, 4), & r(v_{15}^{(3)}|W) &= (2, 3, 2, 3, 4), \\ r(v_{41}^{(1)}|W) &= (3, 2, 5, 6, 5), & r(v_{21}^{(3)}|W) &= (2, 3, 2, 3, 5), \\ r(v_{42}^{(1)}|W) &= (4, 2, 5, 6, 5), & r(v_{22}^{(3)}|W) &= (3, 4, 3, 4, 1), \\ r(v_{51}^{(1)}|W) &= (4, 3, 6, 7, 6), & r(v_{23}^{(3)}|W) &= (3, 4, 3, 4, 2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r(v_{11}^{(2)}|W) &= (2, 3, 0, 2, 2), & r(v_{24}^{(3)}|W) &= (3, 4, 3, 4, 3), \\ r(v_{12}^{(2)}|W) &= (2, 3, 1, 1, 2), & r(v_{31}^{(3)}|W) &= (3, 4, 3, 4, 4), \\ r(v_{13}^{(2)}|W) &= (2, 3, 2, 1, 2), & r(v_{32}^{(3)}|W) &= (4, 5, 4, 5, 2), \\ r(v_{14}^{(2)}|W) &= (2, 3, 3, 2, 2), & r(v_{33}^{(3)}|W) &= (4, 5, 4, 5, 3), \\ r(v_{15}^{(2)}|W) &= (2, 3, 4, 3, 2), & r(v_{41}^{(3)}|W) &= (4, 5, 4, 5, 4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r(v_{21}^{(2)}|W) &= (3, 4, 1, 1, 3), & r(v_{42}^{(3)}|W) &= (5, 6, 5, 6, 3), \\ r(v_{22}^{(2)}|W) &= (3, 4, 2, 0, 3), & r(v_{51}^{(3)}|W) &= (5, 6, 5, 6, 4), \\ r(v_{23}^{(2)}|W) &= (3, 4, 3, 1, 3), \end{aligned}$$

Dari semua representasi di atas terlihat bahwa representasi setiap titik berbeda. Karena $|W| = 5$ memberikan representasi yang berbeda, maka batas atas $\dim(Amal(Tr_5, v)_3)$ adalah 5. Karena batas atas $\dim(Amal(Tr_5, v)_3)$ adalah 5, maka $\dim(Amal(Tr_5, v)_3) \leq 5$. Diperoleh bahwa $\dim(Amal(Tr_5, v)_3) = 5$.

Gambar 4. Graf Amal(Tr_5, v) $_3$

4. Kesimpulan

Pada paper ini telah diperoleh bahwa dimensi metrik dari graf $Amal(Tr_n, v)_m$ untuk $n = 5$ dan $m = 3$ adalah 5.

Daftar Pustaka

- [1] Angraini, F., Wellyanti, D., Syafruddin, S. 2018. *Dimensi Metrik dan Dimensi Partisi dari Graf Tangga Segitiga TR_n untuk $n=2,3$* . Jurnal Matematika Universitas Andalas, **7**(2) : 46-52.
- [2] Chartrand, G. L., Eroh, M. A. Johnson, and Oellermann. 2000. Resolvability in Graphs and the Metric Dimension of a Graph. *Discrete Applied Mathematics*. **105** : 99-113.
- [3] Febrianti, F., Yulianti, L., Narwen, N. 2019. *Dimensi Metrik dari Graf Amalgamasi Tangga Segitiga Diperumum Homogen*. Jurnal Matematika Universitas Andalas, **8**(1) : 84-90.
- [4] Harary, F., R.A Melter. 1976. *On the Metric Dimension of a Graph*. *Ars Combin.* **2** : 191-195.
- [5] Iswadi, H., Baskoro, E. T., Salman, A. N. M., Simanjuntak, R. 2010. *The Resolving Graph of Amalgamation of Cycles*, *Utilitas Matematika*. **83** : 121-132.
- [6] Simanjuntak, R., Uttunggadewa, S., Saputro, S.W. 2015. *Metric Dimension of Amalgamation of Graphs*, *Lecture Notes on Computer Science* 8986, pp 330-337.
- [7] Yulianti, L., Narwen dan Fitrianda, S. "On the Rainbow Connection Number and Strong Rainbow Connection Number of Generalized Triangle Lad-

der Graph", submitted.

- [8] Yulianti, L., Muhardiansyah, Nazra, A., Narwen, N., "*On the Rainbow Connection Number of the Amalgamation of Homogeneous Generalized Triangle Ladder Graphs*", submitted to Electronic Journal of Graph Theory and Applications.