Jurnal Matematika UNAND
Vol. **IX** No. **1** Hal. 1 – 7
Edisi Januari 2020
ISSN : 2303–291X
©Jurusan Matematika FMIPA UNAND

GRUP $\mathbb{Z}_n$ DALAM BENTUK GRAF IDENTITAS

ELIZIA AUGUSTIN[*], DES WELYYANTI

Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : eliziaaugustin97@gmail.com, wely@sci.unand.ac.id

Diterima 29 November 2019 Direvisi 3 Desember 2019 Dipublikasikan 12 Januari 2020

Abstrak. Graf identitas dari suatu grup dapat digambarkan dengan cara titik yang menginterpretasikan unsur-unsur dari grup dihubungkan melalui sisi, dimana sisi menghubungkan semua unsur ke unsur identitas grup dan dua unsur bertetangga jika ketika dioperasikan operasi biner pada kedua unsur tersebut akan menghasilkan identitas. Penelitian ini mengkaji sifat-sifat graf identitas yang diperoleh dari grup $\mathbb{Z}_n$. Pada penelitian ini diperoleh bahwa untuk grup $\mathbb{Z}_n$ yang berorder $n \geq 3$ ganjil, maka graf identitas yang dihasilkan memuat K_3 sebanyak $(n-1)/2$, sedangkan untuk grup $\mathbb{Z}_n$ yang berorder $n \geq 2$ genap, graf identitas yang dihasilkan memuat K_3 sebanyak $(n-2)/2$ dan sebuah K_2.

Kata Kunci: Graf, Grup, Graf identitas, Subgraf identitas khusus

1. Pendahuluan

Grup adalah suatu himpunan tak kosong dan dilengkapi dengan operasi yang memenuhi sifat asosiatif, memiliki unsur identitas, dan setiap elemennya memiliki unsur invers. Contoh untuk grup antara lain himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan operasi penjumlahan, himpunan bilangan riil tak nol $(\mathbb{R}/\{0\})$ dengan operasi perkalian, dan himpunan bilangan bulat modulo n $(\mathbb{Z}_n)$ dengan operasi penjumlahan modulo n.

Grup dapat dibuat ke dalam bentuk graf dengan menggunakan elemen-elemen dari grup beserta operasi yang digunakan pada grup. Suatu graf F didefinisikan sebagai pasangan himpunan $(V(F), E(F))$, dimana $V(F)$ adalah suatu himpunan titik *(vertex)* yang tidak kosong dan $E(F)$ adalah himpunan sisi *(edge)* yang terdiri dari pasangan terurut dari titik-titik berbeda dari $V(F)$. Graf dari grup digambarkan dengan cara titik yang menginterpretasikan unsur-unsur dari grup dihubungkan melalui sisi, dimana sisi menghubungkan dua unsur yang menghasilkan identitas dengan operasi pada grup.

Penelitian ini mengkaji tentang graf-graf dari grup $\mathbb{Z}_n$ dengan operasi penjumlahan modulo n berdasarkan grup, subgrup, dan dinamika graf identitas serta graf identitas khusus.

[*]penulis korespondensi

2. Landasan Teori

2.1. *Beberapa Definisi dalam Teori Grup*

Definisi 2.1. [3] *Misalkan A adalah himpunan dan R adalah relasi pada A. R dikatakan relasi ekivalen jika R memenuhi refleksif, simetris, dan transitif.*

Definisi 2.2. [3] *Misalkan A adalah himpunan dan R adalah relasi pada A. Kelas ekivalen dari A yang memuat a dinotasikan sebagai $[a]$ yang didefinisikan sebagai $[a] = \{b \in A \mid (a, b) \in R\}$.*

Definisi 2.3. [4] *Suatu grup yang ditulis $(G, *)$, dimana G adalah suatu himpunan dan $*$ adalah operasi biner pada G memenuhi aturan berikut :*

(1) $(a*b)*c = a*(b*c)$ *untuk setiap unsur* $a, b, c \in G$ *(dengan kata lain* $*$ *asosiatif),*
(2) terdapat suatu unsur e di G yang memenuhi $a * e = e * a = a$ untuk semua unsur a di G (e disebut identitas dari G),
(3) untuk setiap $a \in G$, terdapat unsur a^{-1} di G yang memenuhi $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$ (a^{-1} disebut invers dari a).

Definisi 2.4. [5] *Jika suatu subhimpunan H dari suatu grup G membentuk grup dengan operasi biner $*$ yang sama dengan G, maka dapat dikatakan bahwa H adalah subgrup dari G.*

2.2. *Beberapa Definisi dalam Teori Graf*

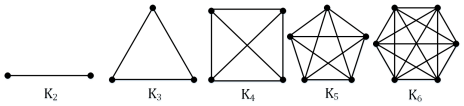
Suatu **graf** F dinotasikan sebagai pasangan himpunan $(V(F), E(F))$, dimana dalam hal ini $V(F)$ adalah suatu himpunan titik *(vertex)* yang tidak kosong dan $E(F)$ adalah himpunan sisi *(edge)* yang terdiri dari pasangan terurut dari titik-titik berbeda dari $V(F)$. [2] Misalkan $V(F) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ adalah himpunan titik yang berisi n titik di F dan $E(F) = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ adalah himpunan sisi yang berisi m sisi di F. Secara umum, sisi dapat ditulis v_iv_j atau v_jv_i. **Graf *trivial*** adalah graf yang hanya terdiri dari satu titik.

Dua titik v_i, v_j dari F dikatakan **bertetangga** jika v_i dan v_j dihubungkan oleh satu sisi yang sama di F dan dua sisi e_i, e_j dikatakan bertetangga jika sisi e_i dan e_j dihubungkan oleh satu titik di F. **Derajat *(degree)*** suatu titik v di F adalah banyaknya sisi yang terkait dengan v, dinotasikan dengan $deg(v)$.

Suatu graf F dikatakan **graf terhubung *(connected graph)*** jika untuk setiap pasangan titik $u, v \in V(F)$ terdapat suatu lintasan yang menghubungkan u dan v. Sebaliknya, suatu graf dikatakan **graf tidak terhubung *(disconnected graph)*** jika untuk setiap pasangan titik $u, v \in V(F)$ tidak terdapat lintasan yang menghubungkan u dan v.

Graf lengkap K_n adalah graf terhubung dengan n titik yang setiap titiknya saling bertetangga, sehingga semua titik dari graf lengkap K_n berderajat $n - 1$.

Gambar 1. Contoh (a) Graf Terhubung, (b) Graf Tidak Terhubung



Gambar 2. Graf Lengkap K_n untuk $2 \leq n \leq 6$.

3. Pembahasan

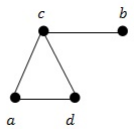
3.1. *Grup sebagai Graf*

Definisi 3.1. [7] *Misalkan G adalah grup dengan operasi $*$ dan memiliki unsur identitas e. Graf F_G yang terkait dengan G adalah graf yang diperoleh dengan cara sebagai berikut. Himpunan $V(F)$ adalah himpunan dari unsur-unsur di G dan himpunan $E(F)$ adalah dua unsur x, y di G yang bertetangga jika $x * y = e$, dan setiap unsur di G terhubung dengan unsur identitas dari G. Graf F_G disebut graf identitas dari grup G.*

Contoh 3.2. Misalkan $K = \{a, b, c, d\}$. Operasi biner $\circ$ pada K didefinisikan menurut tabel Cayley berikut merupakan suatu grup. Graf identitas dari K adalah:

$\circ$	a	b	c	d
a	b	d	a	c
b	d	c	b	a
c	a	b	c	d
d	c	a	d	b

Tabel 1. Tabel Cayley $(K, \circ)$



Gambar 3. Graf Identitas dari Grup $K = \{a, b, c, d\}$

Definisi 3.3. [7] *Misalkan G adalah grup dan H adalah subgrup dari G, maka graf*

identitas dari subgrup H dinamakan sebagai subgraf identitas khusus dari G.

Contoh 3.4. Berdasarkan Contoh 3.2 maka subgrup dari K adalah $H = \{b, c\}$. Subgraf identitas khusus untuk H adalah sebagai berikut.

Gambar 4. Subgraf Identitas Khusus untuk $H = \{b, c\}$

Teorema 3.5. [7] *Jika* $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \cdots, \overline{n-1}\}$ *adalah grup yang berorder* n, $n \geq 3$ *dengan* n *ganjil, maka graf identitas yang dihasilkan oleh* $\mathbb{Z}_n$ *akan memuat* K_3 *sebanyak* $(n-1)/2$.

Bukti. Perhatikan bahwa untuk setiap $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$, $0 \leq a \leq n-1$, dengan $a \neq 0$ akan mempunyai invers yaitu $\overline{(n+(-a))} \in \mathbb{Z}_n$ sedemikian sehingga $\overline{(a+(n+(-a)))} = \bar{0}$ dan tidak akan mempunyai invers berupa dirinya sendiri. Oleh karena itu, graf identitas dari grup $\mathbb{Z}_n$ hanya memuat K_3. Perhatikan bahwa :

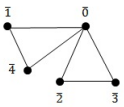
(1) Graf identitas dari $\mathbb{Z}_n$ dengan $n = 3$ akan memuat 1 buah K_3.

Gambar 5. Graf Identitas $\mathbb{Z}_n$ dengan $n = 3$

Oleh karena itu,

$$1 = 2/2 = (3-1)/2 = (n-1)/2, \text{ untuk } n = 3.$$

(2) Graf identitas dari $\mathbb{Z}_n$ dengan $n = 5$ akan memuat 2 buah K_3.

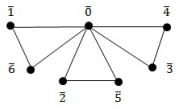


Gambar 6. Graf Identitas $\mathbb{Z}_n$ dengan $n = 5$

Oleh karena itu,

$$2 = 4/2 = (5-1)/2 = (n-1)/2, \text{ untuk } n = 5.$$

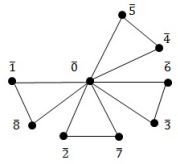
(3) Graf identitas dari $\mathbb{Z}_n$ dengan $n = 7$ akan memuat 3 buah K_3.
Oleh karena itu,



Gambar 7. Graf Identitas $\mathbb{Z}_n$ dengan $n = 7$

$$3 = 6/2 = (7-1)/2 = (n-1)/2, \text{ untuk } n = 7.$$

(4) Graf identitas dari $\mathbb{Z}_n$ dengan $n = 9$ akan memuat 4 buah K_3.

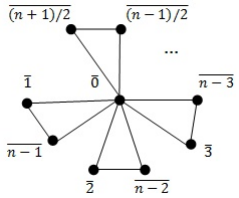


Gambar 8. Graf Identitas $\mathbb{Z}_n$ dengan $n = 9$

Oleh karena itu,

$$4 = 8/2 = (9-1)/2 = (n-1)/2, \text{ untuk } n = 9.$$

Berdasarkan (1) sampai dengan (4) di atas, terlihat bahwa graf identitas dari $\mathbb{Z}_n$ dengan $n = 3, 5, 7, 9, \cdots$ akan memuat K_3 yang diakibatkan oleh $\bar{a}+\bar{b} = \bar{0}$ sebanyak $(n-1)/2$, sehingga graf identitas umum dari $\mathbb{Z}_n$ dengan $n \geq 3$ ganjil yaitu :



Gambar 9. Graf Identitas $\mathbb{Z}_n$ dengan $n \geq 3$ Ganjil

□

Teorema 3.6. [7] *Jika* $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \cdots, \overline{n-1}\}$ *adalah grup yang berorder* n, $n \geq 2$ *dengan* n *genap, maka graf identitas yang dihasilkan oleh* $\mathbb{Z}_n$ *akan memuat* K_3 *sebanyak* $(n-2)/2$ *dan sebuah* K_2.

Bukti. Perhatikan bahwa untuk setiap $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$, $0 \leq a \leq n-1$, dengan $a \neq 0$ akan mempunyai invers yaitu $\overline{(n+(-a))} \in \mathbb{Z}_n$ sedemikian sehingga $\overline{(a+(n+(-a)))} = \bar{0}$ kecuali untuk $\bar{a} = \overline{(n/2)} \in \mathbb{Z}_n$, $0 \leq a \leq n-1$, dengan $a \neq 0$ akan memiliki invers

berupa dirinya sendiri. Oleh karena itu, graf identitas dari grup $\mathbb{Z}_n$ akan memuat K_3 dan mempunyai tepat satu K_2. Perhatikan bahwa :

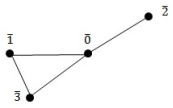
(1) Graf identitas dari $\mathbb{Z}_n$ dengan $n = 2$ akan memuat 0 buah K_3 dan 1 buah K_2.

Gambar 10. Graf Identitas $\mathbb{Z}_n$ dengan $n = 2$

Oleh karena itu,

$$0 = 0/2 = (2-2)/2 = (n-2)/2, \text{ untuk } n = 2.$$

(2) Graf identitas dari $\mathbb{Z}_n$ dengan $n = 4$ akan memuat 1 buah K_3 dan 1 buah K_2.

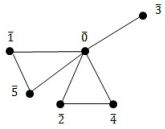


Gambar 11. Graf Identitas $\mathbb{Z}_n$ dengan $n = 4$

Oleh karena itu,

$$1 = 2/2 = (4-2)/2 = (n-2)/2, \text{ untuk } n = 4.$$

(3) Graf identitas dari $\mathbb{Z}_n$ dengan $n = 6$ akan memuat 2 buah K_3 dan 1 buah K_2.



Gambar 12. Graf Identitas $\mathbb{Z}_n$ dengan $n = 6$

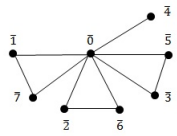
Oleh karena itu,

$$2 = 4/2 = (6-2)/2 = (n-2)/2, \text{ untuk } n = 6.$$

(4) Graf identitas dari $\mathbb{Z}_n$ dengan $n = 8$ akan memuat 3 buah K_3 dan 1 buah K_2.
Oleh karena itu,

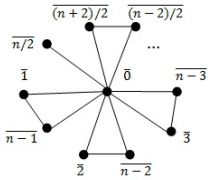
$$3 = 6/2 = (8-2)/2 = (n-2)/2, \text{ untuk } n = 8.$$

Berdasarkan (1) sampai dengan (4) di atas, terlihat bahwa graf identitas dari $\mathbb{Z}_n$ dengan $n = 2, 4, 6, 8, \cdots$ akan memuat tepat satu buah K_2 yang diakibatkan oleh



Gambar 13. Graf Identitas $\mathbb{Z}_n$ dengan $n = 8$

$\bar{a} + \bar{a}^{-1} = \bar{0}$, $\bar{a} = \bar{a}^{-1}$ dan K_3 sebanyak $(n-2)/2$ yang diakibatkan oleh $\bar{a} + \bar{b} = \bar{0}$, sehingga graf identitas umum dari $\mathbb{Z}_n$ dengan $n \geq 2$ genap yaitu :



Gambar 14. Graf Identitas $\mathbb{Z}_n$ dengan $n \geq 2$ Genap

□

4. Kesimpulan

Untuk grup $\mathbb{Z}_n$ yang berorder $n \geq 3$ ganjil, maka graf identitas akan memuat K_3 sebanyak $(n-1)/2$. Sedangkan untuk grup $\mathbb{Z}_n$ yang berorder $n \geq 2$ genap, graf identitas akan memuat K_3 sebanyak $(n-2)/2$ dan sebuah K_2.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada ibu Nova Noliza Bakar, ibu Monika Rianti Helmi dan bapak Effendi yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Bhattacharya, P. B, S.K. Jain, dan S.R. Nagpaul. 1994. *Basic Abstract Algebra*. Cambridge University. New York.
[2] Bondy, J.A. dan Murty, U.S.R. 1976. *Graph Theory with Application*. The Macmillan Press LTD. London dan Basingstoke.
[3] Chen, W. W. L. 2008. *Discrete Mathematics*. Lecturer Notes. University of London.
[4] Dummit, D.S. dan Foote, R.M. 1991. *Abstract Algebra*. Prentice-Hall. New Jersey.
[5] Gallian, J.A. 2010. *Contemporary Abstract Algebra*. Brooks. United States.
[6] Taylor, C.K. 2015. *An Introduction to Abstract Algebra*. Bookboon. London, United Kingdom.
[7] Vasantha, W. B. dan Florentin Smarandache. 2009. *Group as Graphs*. Editura CuArt. Romania.