

## PEMBUKTIAN TEOREMA HUKUM LEMAH BILANGAN BESAR DENGAN MENGGUNAKAN FUNGSI KARAKTERISTIK

SUCI SARI WAHYUNI, DODI DEVIANTO, HAZMIRA YOZZA

*Program Studi Matematika,  
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,  
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,  
 sucisariwahyuni.25@yahoo.com, ddevianto@yahoo.com, hyozza@gmail.com*

**Abstract.** Let  $X_n$  be a sequence of random variables which have limited mean and variance and also  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ , then the weak law of large number stated that  $\frac{S_n - E[S_n]}{n} \rightarrow 0$  in probability, other variation of the weak law of large is; if  $X_n$  is a sequence of random variables that distributed randomly and identically with mean  $\mu$  in limited variance, then  $\frac{S_n}{n} \rightarrow \mu$  in probability. Some papers proved the weak law by using analysis properties of random variable  $S_n$ . In this paper the law is proved by using characteristic function.

**Kata Kunci:** The weak law of large number, convergent in probability, characteristic function

### 1. Pendahuluan

Hukum Bilangan Besar (*The Law of Large Number*) adalah salah satu teorema penting pada kajian teori peluang. Bernoulli adalah orang pertama yang menjelaskan hukum bilangan besar. Sementara Poisson juga mengkaji hukum bilangan besar dan menamakannya dengan *La loi des Grand Nombre* (*The law of Large Number*). Selain Bernoulli dan Poisson, matematikawan lainnya yang juga mengembangkan *The Law of Large Number* adalah Chebysev, Markov, Borel, Cantelli dan Kolmogorov. Mereka menghasilkan apa yang kita kenal dengan *The Weak Law of Large Number* dan *The Strong Low of Large Number*.

Hukum Bilangan Besar menggambarkan stabilitas dari peubah-peubah acak dalam jumlah besar. Dalam Hukum Bilangan Besar dinyatakan bahwa jika diberikan suatu sampel acak dari suatu sebaran dengan mean dan variannya terbatas, maka rata-rata sampel akan mendekati rata-rata populasi. Hukum Bilangan Besar menjelaskan tentang perilaku jumlah parsial  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  dari barisan peubah-peubah acak  $\{X_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Pada dasarnya, perbedaan antara Hukum Lemah Bilangan Besar dan Hukum Kuat Bilangan Besar tergantung kepada kekonvergenan  $\frac{S_n - E[S_n]}{n}$ . Jika  $\frac{S_n - E[S_n]}{n}$  konvergen in probability yaitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\frac{S_n - E[S_n]}{n}| > \varepsilon) = 0$$

maka hukum ini disebut sebagai Hukum Lemah Bilangan Besar dan jika  $\frac{S_n - E[S_n]}{n}$

konvergen *almost surely* yaitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (|\frac{S_n - E[S_n]}{n}|) = 0$$

maka hukum ini disebut sebagai Hukum Kuat Bilangan Besar.

Variasi lain dari Hukum Lemah Bilangan Besar adalah jika  $X_n$  adalah barisan peubah acak yang terdistribusi secara bebas dan identik dengan mean  $\mu$  pada varian yang terbatas, maka  $\frac{S_n}{n} \rightarrow \mu$  *in probability*. Hukum ini telah dibuktikan dalam beberapa referensi dengan cara menganalisis perilaku peubah acak  $S_n$  dan hubungannya dengan  $\mu$ . Selain dengan cara tersebut akan diterapkan pola pembuktiannya dengan menggunakan fungsi karakteristik. Fungsi karakteristik adalah salah satu jenis transformasi yang sering digunakan pada teori peluang dan statistik. Fungsi karakteristik dari suatu peubah acak  $X$ , dinotasikan dengan  $\varphi_X(t)$ , didefinisikan sebagai

$$\varphi_X(t) = E[e^{itX}]$$

di mana  $e^{itX} = \cos(tX) + i \sin(tX)$ ,  $-\infty < t < \infty$  dan  $i$  unit imajiner. Terlihat bahwa fungsi karakteristik identik dengan fungsi pembangkit momen  $M_X(t) = E[e^{tX}]$  dengan menambahkan  $i$  pada bagian eksponennya.

Kajian tentang Hukum Lemah Bilangan Besar serta variasinya sangat menarik untuk dikaji karena keterpakaiannya yang sangat luas dalam membantu pembuktian teorema tertentu, pendugaan parameter populasi serta aplikasinya dalam bidang matematika terapan. Dalam tulisan ini akan dikaji tentang pembuktian Teorema Hukum Lemah Bilangan Besar dan pembuktiannya dengan menggunakan Fungsi Karakteristik.

## 2. Pembuktian Teorema Hukum Lemah Bilangan Besar Dengan Menggunakan Fungsi Karakteristik

Berikut ini akan dibahas Teorema Hukum Lemah Bilangan Besar kemudian akan dibuktikan dengan menggunakan Fungsi Karakteristik, dimana Definisi Fungsi Karakteristik sebagai berikut :

**Definisi 2.1.** [3] Misalkan  $X$  adalah suatu peubah acak dengan fungsi kepekatian peluang  $f(x)$  dan fungsi sebaran kumulatif  $F(x)$ . Fungsi karakteristik  $\varphi_X(t)$  dari peubah acak  $X$  didefinisikan sebagai

$$\varphi_X(t) = E[e^{itX}] = \int e^{itx} dF(x) = \int e^{itx} f(x) dx,$$

di mana  $t \in \mathbb{R}$ ,  $i = \sqrt{-1}$  dan  $e^{itx} = \cos tx + i \sin tx$ .

**Definisi 2.2.** [1] Suatu barisan peubah acak  $X_n$  dikatakan konvergen *in probability* ke peubah acak  $X$ , jika untuk setiap  $\varepsilon > 0$  dan  $n \rightarrow \infty$  berlaku

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\frac{S_n - E[S_n]}{n}| > \varepsilon) = 0$$

**Teorema 2.3.** [2] Misalkan  $\{X_n\}$  adalah barisan peubah acak yang terdistribusi secara bebas dan identik dengan mean  $\mu$  dan varian yang terbatas, maka

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow \mu \text{ in probability.}$$

**Bukti.** Misalkan fungsi karakteristik dari peubah acak  $X_n$  adalah

$$\varphi_{X_n}(t) = E[e^{itX_n}],$$

dan misalkan pula

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

di mana  $S_n^* = \frac{S_n}{n} - \mu$ , sehingga

$$\begin{aligned} \varphi_{S_n^*}(t) &= E[e^{itS_n^*}] = E[e^{it(\frac{S_n}{n} - \mu)}] \\ &= E[e^{it[\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \mu]}] \\ &= E[e^{it[\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{\mu n}{n}]}] \\ &= E[e^{i\frac{t}{n}[X_1 + X_2 + \dots + X_n - \mu n]}] \\ &= E[e^{i\frac{t}{n}X_1} e^{i\frac{t}{n}X_2} \dots e^{i\frac{t}{n}X_n} e^{i\frac{t}{n}\mu n}] \end{aligned}$$

Dari premis diketahui bahwa  $X_1, X_2, \dots, X_n$  saling bebas, maka diperoleh

$$\begin{aligned} E[e^{itS_n^*}] &= E[e^{i(\frac{t}{n})X_1}] E[e^{i(\frac{t}{n})X_2}] \dots E[e^{i(\frac{t}{n})X_n}] E[e^{i\frac{t}{n}(-\mu n)}] \\ &= \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right) \varphi_{X_2}\left(\frac{t}{n}\right) \dots \varphi_{X_n}\left(\frac{t}{n}\right) E[e^{-it\mu}] \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa  $\{X_n\}$  adalah barisan peubah acak yang terdistribusi secara bebas dan identik, maka fungsi karakteristiknya sama, sehingga dapat ditulis

$$\begin{aligned} \varphi_{S_n^*}(t) &= [\varphi\left(\frac{t}{n}\right)]^n e^{-it\mu}, \\ &= \exp [\ln [(\varphi\left(\frac{t}{n}\right))^n e^{-it\mu}]], \\ &= \exp [\ln [\frac{[\varphi\left(\frac{t}{n}\right)]^n}{e^{it\mu}}]], \\ &= \exp [\ln \varphi\left(\frac{t}{n}\right)^n - \ln e^{it\mu}], \\ &= \exp [n \ln \varphi\left(\frac{t}{n}\right) - it\mu]. \end{aligned}$$

sehingga untuk  $n \rightarrow \infty$ , maka

$$\varphi\left(\frac{t}{n}\right) \rightarrow \varphi(0) = E[e^{i(0)X}] = E[e^0] = E(1) = 1.$$

Dengan demikian  $\varphi_{S_n^*}(t) = \exp[-it\mu]$ .

Perhatikan bahwa  $|\varphi_{S_n^*}(t)| = |e^{-it\mu}| = \sqrt{\cos^2(-t\mu) + \sin^2(-t\mu)} = \sqrt{1} = 1$ , karena  $|\varphi_{S_n^*}(t)| = 1$  mengakibatkan  $E[e^{-itS_n^*}] = 1$ , sehingga  $itS_n^* = 0$  atau  $S_n^* = 0$ .

Hal ini berarti bahwa  $P(S_n^* = 0) = 1$ , sehingga dapat dinyatakan bahwa hal ini menunjukkan  $S_n^* \rightarrow 0$  in probability adalah apabila

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P([S_n^* - 0] < \varepsilon) = 1,$$

karena  $S_n^* = \frac{S_n}{n} - \mu$  maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\frac{S_n}{n} - \mu| < \varepsilon) = 1.$$

Hal ini menunjukkan  $\frac{S_n}{n} \rightarrow \mu$  in probability. □

### 3. Contoh Penerapan Pembuktian Hukum Lemah Bilangan Besar Dengan Menggunakan Fungsi Karakteristik Pada Sebaran Seragam

Misalkan  $X \sim UNIF(0, 1)$  dengan fungsi kepekatan peluangnya  $f(x) = 1$ ,  $0 < x < 1$ . Nilai harapan dari peubah acak  $X$  adalah  $E(X) = \frac{1}{2}$ , dan fungsi karakteristik dari  $X$  adalah

$$E[e^{itx}] = \int_0^1 e^{itx} dx = \frac{1}{it} e^{itx} \Big|_0^1 = \frac{1}{it} e^{it(1)} - \frac{1}{it} e^{it(0)} = \frac{e^{it} - 1}{it}.$$

Akan dibuktikan bahwa  $\frac{S_n}{n} \rightarrow \frac{1}{2}$  in probability. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \varphi_{S_n^*}(t) &= E[e^{itS_n^*}] = E[e^{it(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2})}], \\ &= E[e^{it[\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{1}{2}]}], \\ &= E[e^{i\frac{t}{n}X_1} e^{i\frac{t}{n}X_2} \dots e^{i\frac{t}{n}X_n} e^{-i\frac{t}{2}}]. \end{aligned}$$

Dari premis diketahui bahwa  $X_1, X_2, \dots, X_n$  saling bebas, maka diperoleh

$$E[e^{itS_n^*}] = E[e^{i(\frac{t}{n})X_1}] E[e^{i(\frac{t}{n})X_2}] \dots E[e^{i(\frac{t}{n})X_n}] E[e^{-i\frac{t}{2}}]$$

di mana  $E[e^{i\frac{t}{n}X}] = \int_0^1 e^{i\frac{t}{n}X} dx = \frac{1}{i\frac{t}{n}} e^{i\frac{t}{n}X} \Big|_0^1 = \frac{1}{i\frac{t}{n}} e^{i\frac{t}{n}(1)} - \frac{1}{i\frac{t}{n}} e^{i\frac{t}{n}(0)} = \frac{e^{i\frac{t}{n}} - 1}{i\frac{t}{n}}$

Dengan demikian, dapat dinyatakan

$$\begin{aligned} E[e^{itS_n^*}] &= \left(\frac{e^{i\frac{t}{n}} - 1}{i\frac{t}{n}}\right) \left(\frac{e^{i\frac{t}{n}} - 1}{i\frac{t}{n}}\right) \dots \left(\frac{e^{i\frac{t}{n}} - 1}{i\frac{t}{n}}\right) E[e^{-i\frac{t}{2}}] \\ &= \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right) \varphi_{X_2}\left(\frac{t}{n}\right) \dots \varphi_{X_n}\left(\frac{t}{n}\right) e^{-i\frac{t}{2}} \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa  $X_n$  adalah barisan peubah acak yang terdistribusi secara bebas dan identik, maka

$$\begin{aligned} \varphi_{S_n^*}(t) &= \left[\frac{e^{i\frac{t}{n}} - 1}{i\frac{t}{n}}\right]^n e^{-i\frac{t}{2}}, \\ &= \exp \left[ \ln \left[ \left(\frac{e^{i\frac{t}{n}} - 1}{i\frac{t}{n}}\right)^n e^{-i\frac{t}{2}} \right] \right], \\ &= \exp \left[ n \ln \left( \frac{e^{i\frac{t}{n}} - 1}{i\frac{t}{n}} \right) - i\frac{t}{2} \right]. \end{aligned}$$

Sehingga untuk  $n \rightarrow \infty$ , maka

$$\varphi\left(\frac{t}{n}\right) \rightarrow \varphi(0) = E[e^{i(0)X}] = E[e^0] = E(1) = 1.$$

Dengan demikian

$$\varphi_{S_n^*}(t) = \exp \left[ -i \frac{t}{2} \right].$$

Perhatikan bahwa

$$|\varphi_{S_n^*}(t)| = |e^{it\mu}| = \sqrt{\cos^2(-\frac{t}{2}) + \sin^2(-\frac{t}{2})} = \sqrt{1} = 1.$$

Karena  $|\varphi_{S_n^*}(t)| = 1$  mengakibatkan  $E[e^{itS_n^*}] = 1$ , sehingga  $itS_n^* = 0$  atau  $S_n^* = 0$ . Hal ini berarti bahwa  $P(S_n^* = 0) = 1$ , hal ini menunjukkan bahwa  $S_n^* \rightarrow 0$  *in probability*. Berdasarkan Definisi 2.2 maka  $S_n^* \rightarrow 0$  *in probability* adalah bila

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P([S_n^* - 0] < \varepsilon) = 1.$$

Karena  $S_n^* = \frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}$ , maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Hal ini berarti  $S_n^* \rightarrow 0$  *in probability*.

#### 4. Kesimpulan

Hukum Lemah Bilangan Besar menggambarkan stabilitas dari peubah-peubah acak dalam jumlah besar. Secara matematis, Hukum Lemah Bilangan Besar dapat dinyatakan bahwa jika  $\{X_n\}$  merupakan barisan peubah acak yang terdistribusi secara bebas dan identik dengan mean  $\mu$  dan varian yang terbatas, dan jika dengan  $S_n = \sum_{i=1}^n X_n$ , maka  $\frac{S_n}{n} \rightarrow \mu$  *in probability*. Hukum ini telah dibuktikan dalam beberapa referensi dengan cara menganalisis perilaku peubah acak  $S_n$  dan hubungannya dengan  $\mu$ . Selain dengan cara tersebut telah diterapkan pola pembuktiannya dengan menggunakan fungsi karakteristik. Fungsi karakteristik adalah salah satu jenis transformasi yang sering digunakan pada teori peluang dan statistik.

#### 5. Ucapan Terima Kasih

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa dalam penyusunan paper ini tidak terlepas dari dukungan, dorongan, kerjasama maupun bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada bapak Dodi Devianto, ibu Hazmira Yozza, bapak Narwen, ibu Lyra Yulianti dan bapak Yudi Andriasdi yang telah bersedia membaca, menelaah, dan menguji naskah makalah ini.

#### Daftar Pustaka

- [1] Casella, G. dan R. L. Berger. 1990. *Statistical Inference*. Ed. Ke-1 Wadsworth & Brooks/Cole, Pacific Grove, California.
- [2] Chung, K.L. 2001. *A Course In Probability Theory*. Third Edition. Academy Press, San Diego.
- [3] Spiegel, M.R. 1964. *Peubah Kompleks*. Polytechnic Institute Rensselaer.