Jurnal Matematika UNAND
Vol. **IX** No. **2** Hal. 70 – 75
Edisi April 2020
ISSN : 2303–291X
e-ISSN : 2721–9410

BILANGAN KROMATIK LOKASI UNTUK GRAF POHON PISANG $B_{n,k}$

MELATI NUR*, DES WELYYANTI, NARWEN
Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : melatin13@gmail.com,wely@sci.unand.ac.id, narwen@sci.unand.ac.id

Diterima 17 Februari 2020 Direvisi 7 Maret 2020 Dipublikasikan 29 April 2020

Abstrak. Penelitian ini mengkaji kembali makalah [1] tentang penentuan bilangan kromatik lokasi untuk graf pohon pisang, $\chi_L(B_{n,k})$. Misalkan S_k adalah graf bintang dengan k titik. *Graf pohon pisang*, $B_{n,k}$ adalah suatu graf yang dibentuk oleh n buah graf bintang S_k dengan $n \geq 1$ dan $k \geq 2$, dimana satu daun dari setiap graf bintang S_k dihubungkan ke suatu titik baru yang disebut dengan *titik akar*. Bilangan kromatik lokasi dari $B_{n,k}$ adalah minimum dari banyaknya warna yang digunakan sedemikian sehingga $B_{n,k}$ mempunyai pewarnaan lokasi, dinotasikan dengan $\chi_L(B_{n,k})$.

Kata Kunci: Bilangan Kromatik Lokasi, Graf Bintang, Graf pohon pisang

1. Pendahuluan

Tahun 1736, seorang matematikawan Swiss yang bernama Leonhard Euler diperkirakan sebagai orang yang pertama kali menulis artikel ilmiah di bidang teori graf. Artikel ini membahas permasalahan ada atau tidaknya struktur yang dikenal sebagai sirkuit Euler pada graf terhubung daratan kota Konigsberg dan pulau kecil di tengah sungai Pregel yang dihubungkan oleh tujuh buah jembatan.

Selama kurang lebih seratus tahun, ilmu teori graf belum mendapat perhatian para matematikawan penting dalam sejarah. Sampai masalah pewarnaan peta diperkenalkan oleh Francis Guthrie pada tahun 1852, yang menyadari bahwa untuk mewarnai peta wilayah Britania Raya dibutuhkan empat warna yang berbeda, sehingga setiap dua daerah yang bersebelahan selalu memiliki dua warna yang berbeda. Sejak saat itu, teori graf menjadi bahan penelitian yang sangat menarik perhatian para matematikawan besar.

Bilangan kromatik lokasi pertama kali diperkenalkan oleh Chartand dkk (2002) [3]. Selanjutnya, Chartrand dkk. [4] memperoleh graf berorder n yang mempunyai bilangan kromatik lokasi $n - 1$. Berdasarkan penelitian Asmiati pada tahun 2017 [1], telah diperoleh bilangan kromatik lokasi graf pohon pisang, $B_{n,k}$, dengan $n \geq 1$

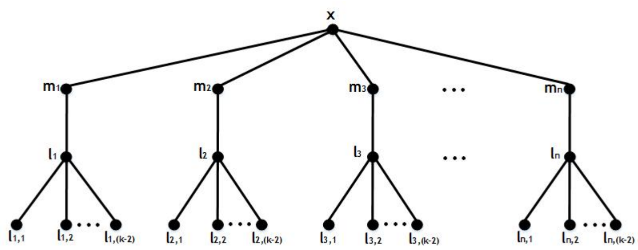
*penulis korespondensi

dan $k \geq 2$. Dengan demikian, pada tulisan ini membahas kembali bilangan kromatik lokasi untuk graf pohon pisang, $B_{n,k}$ dengan $n \geq 1$ dan $k \geq 2$.

2. Definisi dan Terminologi Graf

Graf G adalah pasangan himpunan V dan E, dituliskan $G = (V, E)$, dimana V adalah suatu himpunan titik (*vertex*) yang tidak kosong dan E adalah himpunan sisi (*edge*) yang terdiri dari pasangan terurut dari titik-titik berbeda dari V. Misalkan $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ adalah himpunan titik yang berisi n titik di G dan $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ adalah himpunan sisi yang berisi m sisi di G. secara umum, untuk menotasikan sisi dapat ditulis dengan v_iv_j atau v_jv_i. **Graf Bintang, (S_k)** adalah graf terhubung yang mempunyai satu titik berderajat $k-1$ yang disebut pusat dan $k-1$ buah titik lainnya berderajat satu.

Misalkan S_k adalah graf bintang dengan k titik. *Graf pohon pisang*, $B_{n,k}$ adalah suatu graf yang dibentuk oleh n buah graf bintang S_k dengan $n \geq 1$ dan $k \geq 2$, dimana satu daun dari setiap graf bintang S_k dihubungkan ke suatu titik baru yang disebut dengan *titik akar*. Titik akar dinotasikan dengan x. Titik yang berjarak satu dari titik akar x disebut dengan *titik tengah*, dinotasikan dengan m_i untuk $i \in [1, n]$. Titik pusat dari setiap S_k, dinotasikan dengan l_i. Daun ke-j dari titik pusat l_i dinotasikan dengan $l_{i,j}$, untuk $i \in [1, n]$ dan $j \in [1, k-2]$ [5].



Gambar 1. Graf Pohon Pisang, $B_{n,k}$

Bilangan kromatik dari G adalah bilangan asli terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pewarnaan-k titik. Bilangan kromatik dari G dinotasikan dengan $\chi(G)$. Misalkan $\chi(G) = k$, ini berarti titik-titik di G paling kurang diwarnai dengan k warna dan tidak dapat diwarnai dengan $k-1$ warna. Jika titik-titik di G diwarnai dengan k warna maka tidak ada titik yang bertetangga mempunyai warna yang sama. Misalkan c adalah suatu pewarnaan titik pada graf G dengan $c(u) \neq c(v)$, untuk titik u dan v yang bertetangga di G. Misalkan C_i himpunan titik yang diberi warna i dengan $1 \leq i \leq k$, disebut **kelas warna**, dimana $\Pi = \{C_1, C_2, \cdots, C_k\}$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas-kelas warna dari $V(G)$. **Kode warna** $c_\Pi(v)$ dari v adalah $k-$pasang terurut $(d(v, C_1),\ d(v, C_2), \cdots, d(v, C_k))$ dimana $d(v, C_i) = min\{d(v, x) : x \in C_i\}$, untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik di G memiliki kode warna yang berbeda, maka c disebut **pewarnaan lokasi** dari G. **Bilangan kromatik lokasi** dari G adalah minimum dari banyaknya warna yang digunakan sedemikian sehingga G mempunyai pewarnaan lokasi, dinotasikan dengan $\chi_L(G)$. Karena setiap pewarnaan lokasi juga merupakan suatu pewarnaan, maka $\chi(G) \leq \chi_L(G)$.

Pada tahun 2002, Chartrand dkk. telah memberikan Teorema dasar dari bilangan kromatik lokasi suatu graf. Berikut ini merupakan beberapa teori yang terkait dengan bilangan kromatik lokasi. Didefinisikan $N(v)$ sebagai himpunan yang berisi semua titik yang menjadi tetangga dari v.

Teorema 2.1. [3] *Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada graf terhubung G. Jika u dan v adalah dua titik yang berbeda di G sedemikian sehingga $d(u,w) = d(v,w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u,v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$. Secara khusus jika u dan v titik-titk yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) \neq N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.*

Akibat 2.2. [3] *Misalkan G adalah graf terhubung dengan satu titik yang bertetangga dengan k daun, maka $\chi_L(G) \geq k+1$.*

3. Bilangan Kromatik Lokasi untuk Graf Pohon Pisang, $B_{n,k}$

Pada sub bab ini membahas kembali mengenai bilangan kromatik lokasi untuk graf pohon pisang, $B_{n,k}$ dengan $n \geq 1$ dan $k \geq 2$. Sedangkan, untuk $k = 1$ adalah graf bintang dengan $n+1$ titik sehingga diperoleh $\chi_L(B_{n,1}) = n+1$. Selanjutnya, untuk $\chi_L(B_{1,2}) = \chi_L(B_{1,3}) = 3$.

Lema dan Teorema berikut menjelaskan tentang bilangan kromatik lokasi untuk graf pohon pisang, $B_{n,k}$ dengan $n \geq 1$ dan $k \geq 2$.

Lema 3.1. *[1] Jika c adalah suatu pewarnaan $(a+2)$-lokasi pada $B_{n,k}$ dengan $a \geq 1$ dan $k = 2,3$, maka $n \leq (a+1)^2$.*

Bukti. Misalkan c adalah suatu pewarnaan $(a+2)$-lokasi pada $B_{n,k}$ dengan $a \geq 1$ dan $k = 2,3$. Untuk titik tengah $m_i,\ i \in [1,n]$ banyaknya titik tengah m_i yang menerima warna yang sama tidak melebihi $(a+1)$. Misalkan $c(x) = 1$ diperoleh maksimum banyaknya n adalah $(a+1)^2$. Jadi, $n \leq (a+1)^2$. □

Teorema 3.2. *[1] Diberikan graf pohon pisang $B_{n,k}$ dengan $k \geq 2$.*

(a) Jika $a \geq 1$, $a^2 < n \leq (a+1)^2$ dan $k = 2,3$, maka $\chi_L(B_{n,k}) = a+2$.
(b) Jika $k \geq 4$ dan $1 \leq n \leq k-2$, maka $\chi_L(B_{n,k}) = k-1$, kecuali $B_{2,4}$, $\chi_L(B_{2,4}) = 4$.

Bukti.
Kasus a. Berdasarkan Lema 3.1, untuk $a \geq 1$, $n > a^2$ dan $k = 2,3$ terdapat pewarnaan $(a+2)$-lokasi untuk $B_{n,k}$. Jadi, $\chi_L(B_{n,k}) \geq a+2$.

Sedangkan untuk $n > (a+1)^2$, $a \geq 1$ dan $k = 2,3$. Berdasarkan Lema 3.1, terdapat pewarnaan $(a+1)+2$-lokasi untuk $B_{n,k}$. Akibatnya $\chi_L(B_{n,k}) \geq (a+1)+2$. Jadi, untuk $1^2 < n \leq (a+1)^2$ diperoleh $\chi_L(B_{n,k}) \geq (a+2)$.

Untuk batas atas $k = 2,3$ dan $a^2 < n \leq (a+1)^2$. Misalkan c adalah suatu pewarnaan $(a+2)$ untuk $B_{n,k}$. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $c(x) = 1$

dan $c(m_i) \in \{2, 3, \cdots, a+2\}$. Karena $a^2 < n \leq (a+1)^2$ maka jumlah $c(m_i)$ penerima warna yang sama dimana $c(m_i) \neq 1$, tidak melebihi $(a+1)$. Selanjutnya, misalkan $c(m_i) = c(m_j)$ $i \neq j$ diperoleh bahwa $c(l_i) \neq c(l_j)$. Khusus untuk $k = 3$, $c(l_{i,1}) = c(m_i)$ untuk setiap i.

Akan ditunjukkan kode warna untuk setiap $v \in V(B_{n,k})$ adalah berbeda.

Kasus a.1 $c(x) = c(l_i)$.

Karena untuk setiap $c(m_i)$ memiliki warna yang berbeda, maka $c_\Pi(x)$ memuat paling sedikit dua komponen yang bernilai 1. Jika $c(m_i) = c(l_{i,1})$ maka $d(l_i, m_i) = d(l_{i,1}, l_1) = 1$. Akibatnya $c_\Pi(l_i)$ memuat tepat satu komponen yang bernilai 1. Jadi, $c_\Pi(x) \neq c_\Pi(l_i)$.

Kasus a.2 $c(m_i) = c(m_j), i \neq j$.

Jika $c(m_i) = c(m_j)$ untuk $i \neq j$ maka $c(l_i) \neq c(l_j)$. Sedangkan, jika $c(m_i) = c(m_j)$ dan $c(l_i) = c(l_j)$, $i \neq j$ maka $c_\Pi(m_i) = c_\Pi(m_j)$. Jadi, $c(l_i) \neq c(l_j)$.

Kasus a.3 $c(m_i) = c(l_j), i \neq j$.

Karena $c(x) = 1$ dan misalkan $c(m_i) = c(l_j)$, $i \neq j$, diperoleh bahwa $d(m_i, x) = 1$. Jadi, $c_\Pi(m_i)$ pada ordinat pertama memuat komponen bernilai 1. Sedangkan untuk $c(l_j)$, misalkan $c(l_{j,1}) \neq 1$ diperoleh $c_\Pi(l_j)$ pada ordinat pertama memuat komponen bernilai 2. Jadi $c_\Pi(m_i) \neq c_\Pi(l_j)$.

Kasus a.4 $c(m_i) = c(l_{i,1})$.

Karena $c(x) = 1$ dan $c(m_i) = c(l_{i,1})$ diperoleh $d(m_i, x) = 1$ dan $d(l_{i,1}, x) = 3$. Jadi $c_\Pi(m_i) \neq c_\Pi(l_{i,1})$.

Kasus a.5 $c(m_i) = c(l_{j,1}), i \neq j$.

Jika $c(m_i) = c(l_{j,1}), i \neq j$ maka haruslah $c(m_i) \neq c(m_j)$ atau $c(l_i) \neq c(l_j)$. Jadi $c_\Pi(l_{i,1}) \neq c_\Pi(l_{j,1})$.

Kasus a.6 $c(l_i) = c(l_j), i \neq j$.

Karena $c(m_i) \neq c(m_j)$ atau $c(l_{i,1}) \neq c(l_{j,1})$, akibatnya $c_\Pi(l_i) \neq c_\Pi(l_j)$.

Kasus a.7 $c(l_i) = c(l_{j,1}), i \neq j$.

Misalkan $c(x) = 1$, $c(l_i) = c(l_{j,1})$, $c(m_i) = c(m_j)$ dan $c(l_{i,1}) = c(l_j) \neq 1$. Akibatnya $c_\Pi(l_i)$ dan $c_\Pi(l_{j,1})$ berbeda paling tidak pada ordinat pertama. Andaikan $c(l_{i,1}) = c(l_j) = 1$, maka $c_\Pi(l_i)$ dan $c_\Pi(l_{j,1})$ paling tidak berbeda pada komponen kedua. Jadi $c_\Pi(l_i) \neq c_\Pi(l_{j,1})$.

Kasus a.8 $c(l_{i,1}) = c(l_{j,1}), i \neq j$.

Jika $c(l_{i,1}) = c(l_{j,1}), i \neq j$, maka haruslah $c(m_i) \neq c(m_j)$ atau $c(l_i) \neq c(l_j)$. Jadi, karena $c(m_i) \neq c(m_j)$ atau $c(l_i) \neq c(l_j)$, maka $c_\Pi(l_{i,1}) \neq c_\Pi(l_{j,1})$.

Dari semua kasus, karena kode warna untuk semua titik $B_{n,k}$ untuk $k = 2, 3$ dengan $a^2 < n \leq (a+1)^2$ adalah berbeda, maka c adalah pewarnaan lokasi. Jadi, untuk $a^2 < n \leq (a+1)^2$ diperoleh $\chi_L(B_{n,k}) \leq (a+2)$.

Kasus b. Berdasarkan Akibat 2, batas bawah trivial untuk $k \geq 4$ dan $1 \leq n \leq k-2$ karena l_i untuk setiap $i \in [1, n]$ bertetangga dengan $(k-2)$ daun maka $\chi_L(B_{n,k}) \geq k-1$.

Misalkan c adalah suatu pewarnaan $k-1$ pada $B_{n,k}$ dan $c(x) = 1$, $c(l_i) = i+1$ untuk setiap $i \in [1, n]$, $c(m_i) \in \{2, 3, ..., k-1\} \setminus \{c(l_i)\}$ untuk setiap $i \in [1, n]$ dan untuk $c(l_{i,j}) \in \{1, 2, ..., k-1\} \setminus \{c(l_i)\}$ untuk setiap $i \in [1, n]$, $j \in [1, k-2]$. Misalkan

$c(l_i) = 1$ maka kode warna untuk m_i akan sama dengan salah satu daun l_i. Jadi, $c(l_i) \neq 1$.

Akan ditunjukkan bahwa kode warna untuk setiap $v \in V(B_{n,k})$ berbeda.

Kasus b.1 Jika $c(x) = c(l_{i,k})$, pandang dua kasus berikut :

- Untuk $n = 1$. Jika $c(l_i) = p$, maka $c_\Pi(x) \neq c_\Pi(l_{i,k})$.
  Misalkan $c(x) = c(l_{i,k})$, $n = 1$ dan $c(l_i) = p$ diperoleh $d(x, l_i) = 2$ dan $d(l_i, l_{i,k}) = 1$. Akibatnya kode warna berbeda paling tidak pada ordinat ke p. Jadi, $c_\Pi(x) \neq c_\Pi(l_{i,k})$.
- Untuk $n \geq 2$. Jika $c(m_i) \neq c(m_j), i \neq j$, maka $c_\Pi(x) \neq c_\Pi(l_{i,j})$.
  Misalkan $c(x) = c(l_{i,k})$ dan $c(m_i) \neq c(m_j)$, $i \neq j$, akan diperoleh $c_\Pi(x)$ memuat paling sedikit dua komponen yang bernilai 1. Sedangkan, untuk $c_\Pi(l_{i,j})$ memuat tepat satu komponen yang bernilai 1. Akibatnya, $c_\Pi(x) \neq c_\Pi(l_{i,j})$. Misalkan $c(m_i) = q$ untuk setiap i akan diperoleh $c_\Pi(x) \neq c_\Pi(l_{i,k})$ karena berbeda paling tidak di ordinat ke q.

Kasus b.2 Jika $c(m_i) = c(l_{i,j})$ maka $c_\Pi(m_i) \neq c_\Pi(l_{i,j})$.

Misalkan $c(m_i) = c(l_{i,j})$ akan diperoleh $c_\Pi(m_i)$ memuat paling sedikit dua komponen yang bernilai 1. Sedangkan, untuk $c_\Pi(l_{i,j})$ memuat tepat satu komponen yang bernilai 1. Jadi $c_\Pi(m_i) \neq c_\Pi(l_{i,j})$.

Kasus b.3 Jika $c(m_i) = c(m_j), i \neq j$ maka $c_\Pi(m_i) \neq c_\Pi(m_j)$.

Jika $c(m_i) = c(m_j), i \neq j$ maka haruslah $c(l_i) \neq c(l_j)$. Misalkan $c(m_i) = c(m_j)$ dan $c(l_i) = c(l_j)$, $i \neq j$ akan diperoleh $c_\Pi(m_i) = c_\Pi(m_j)$. Jadi, karena $c(l_i) \neq c(l_j)$ maka $c_\Pi(m_i) \neq c_\Pi(m_j)$.

Kasus b.4 Jika $c(m_i) = c(l_j), i \neq j$ maka $c_\Pi(m_i) \neq c_\Pi(l_j)$.

Misalkan $c(m_i) = c(l_j)$, $i \neq j$ diperoleh $c_\Pi(m_i)$ memuat tepat dua komponen yang bernilai 1. Sedangkan untuk $c_\Pi(l_j)$, karena titik l_i bertetangga dengan 3 daun maka $c_\Pi(l_j)$ memuat paling sedikit tiga komponen yang bernilai 1. Akibatnya $c_\Pi(m_i) \neq c_\Pi(l_j)$.

Kasus b.5 Jika $c(l_i) = c(l_{s,t}), i \neq s$, maka $c_\Pi(l_i) \neq c_\Pi(l_{s,j})$.

Misalkan $c(l_i) = c(l_{s,t})$, $i \neq s$. Karena titik l_i bertetangga dengan 2 daun, diperoleh $c_\Pi(l_i)$ memuat paling sedikit dua komponen yang bernilai 1. Sedangkan untuk $c_\Pi(l_{i,j})$ memuat tepat satu komponen yang bernilai 1. Jadi, $c_\Pi(l_i) \neq c_\Pi(l_{s,j})$.

Kasus b.6 Jika $c(l_{i,k}) = c(l_{s,t})$, $c(l_i) = x$ $c(l_s) = y$, maka $c_\Pi(l_{i,k}) \neq c_\Pi(l_{s,t})$.

Misalkan $c(l_{i,k}) = c(l_{s,t})$, $c(l_i) = x$ dan $c(l_s) = y$. Karena $c(l_i) \neq c(l_s)$ akan diperoleh $c_\Pi(l_{i,k})$ akan berbeda di ordinat ke x dan $c_\Pi(l_{s,t})$ akan berbeda di ordinat ke y. Jadi $c_\Pi(l_{i,k}) \neq c_\Pi(l_{s,t})$.

Berdasarkan semua kasus diatas, karena kode warna untuk setiap titik di $B_{n,k}$ berbeda maka c adalah suatu pewarnaan lokasi. Jadi untuk $k \geq 4$, $1 \leq n \leq k-2$, diperoleh $\chi_L(B_{n,k}) \geq k - 1$. □

4. Kesimpulan

Misalkan S_k adalah graf bintang dengan k titik. *Graf pohon pisang*, $B_{n,k}$ adalah suatu graf yang dibentuk oleh n buah graf bintang S_k dengan $n \geq 1$ dan $k \geq 2$, dimana satu daun dari setiap graf bintang S_k dihubungkan ke suatu titik baru yang disebut dengan *titik akar*.

Pada penelitian ini telah dikaji kembali makalah [1] tentang penentuan bilangan kromatik lokasi dari graf pohon pisang, $\chi_L(B_{n,k})$, $n \geq 1$ dan $k \geq 2$. Diperoleh bahwa

$$\chi_L(B_{n,k}) = \begin{cases} a+2, \ a \geq 1, \ a^2 < n \leq (a+1)^2, \ k = 2,3 \\ k-1, \ 1 \leq n \leq k-2, \ k \geq 4, \\ 4, \qquad n = 2, \ k = 4. \end{cases}$$

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Lyra Yulianti, Ibu Susila Bahri dan Bapak Budi Rudianto selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran dalam penulisan makalah ini.

Daftar Pustaka

[1] Asmiati, Locating Chromatic Number of Banana Tree, *International Mathematical Forum*, Vol. 12, 2017, no. 1, 39 – 45.
[2] Bondy, J.A dan Murty, U.S.R. 1976. *Graph Theory with Application.* London: The Macmillan Press LTD.
[3] Chartrand, G.,dkk., The Locating - Chromatic Number of a Graph, *Bull. Inst. Combin. Appl.*, Vol. 36, 2002, 89 – 101.
[4] Chartrand, G.,dkk., Graph of Order n With Locating-Chromatic Number $n-1$, *Discrete Mathematics,* **269**, 2003, 65 – 79.
[5] Chen,W.C., Lu.H.I., Yeh.Y.N., Operations of Interlaced Trees and Graceful Trees, *Southeast Asian Bull. Math.*, 1997, 4 : 337 – 348.