UKURAN LUAR LEBESGUE DI $\mathbb{R}^n$

NURUL FATIHAH, HARIPAMYU*, SHELVI EKARIANI

*Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : nurulfatihah1802@gmail.com, haripamyu@sci.unand.ac.id,
shelviekariani@sci.unand.ac.id*

Diterima 17 Februari 2020 Direvisi 7 Maret 2020 Dipublikasikan 29 April 2020

Abstrak. Beberapa kekurangan dari konsep *jumlah Riemann* diatasi dengan cara memperumum konsep tersebut. Dalam perumuman ini digunakan konsep mengenai *ukuran* dan *himpunan terukur*; pada himpunan-himpunan tak kosong di $\mathbb{R}^n$, dikenal ukuran khusus yang disebut dengan *ukuran Lebesgue*, yang diperoleh dari pembatasan *ukuran luar Lebesgue* pada koleksi dari semua *himpunan (terukur) Lebesgue*. Ukuran luar Lebesgue juga digunakan dalam pemverifikasian apakah suatu subhimpunan di $\mathbb{R}^n$ merupakan himpunan Lebesgue. Dalam tulisan ini diperkenalkan dan dijelaskan tentang sebuah metode yang dapat digunakan untuk mengonstruksi suatu ukuran luar, bentuk pendefinisian ukuran luar Lebesgue, beserta sifat-sifat dari ukuran luar Lebesgue, yang didasarkan kepada definisi ukuran luar dan sebuah teorema tentang pengonstruksian suatu ukuran luar.

Kata Kunci: ukuran luar Lebesgue, himpunan Lebesgue, ukuran Lebesgue

1. Pendahuluan

Pada [1], diketahui bahwa fungsi *Dirichlet* pada $[0, 1]$, yaitu

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jika } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{jika } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

untuk setiap $x \in [0, 1]$, merupakan salah satu contoh fungsi diskontinu yang memiliki jumlah Riemann atas, yaitu 1, yang berbeda dengan jumlah Riemann bawahnya, yaitu selalu bernilai 0, untuk setiap partisi dari $[0, 1]$. Hal ini menyebabkan limit dari jumlah-jumlah Riemann atasnya tidaklah sama dengan limit dari jumlah-jumlah Riemann bawahnya, sehingga fungsi ini tidaklah terintegralkan Riemann pada $[0, 1]$.

Pendekatan integral dari suatu fungsi dengan menggunakan konsep jumlah Riemann ternyata memiliki beberapa kekurangan. Diantaranya, tidak ada jaminan bahwa limit dari barisan fungsi-fungsi yang terintegralkan Riemann juga akan merupakan fungsi yang terintegralkan Riemann. Di samping itu, fungsi-fungsi yang

*penulis korespondensi

tidak terintegralkan Riemann juga semakin banyak seiring dengan semakin berkembangnya ilmu matematika. Kenyataan ini menuntut perlunya dibuat suatu perumuman dari konsep jumlah Riemann [1]. Perumuman konsep jumlah Riemann ini dilakukan dengan memperumum cara pemartisian domain dari fungsinya ke dalam pemartisiannya menjadi sub-sub **himpunan terukur** dari domain fungsi tersebut. Selanjutnya, konsep "panjang" dari suatu interval juga diperumum menjadi suatu konsep baru yang disebut dengan "**ukuran**" dari suatu himpunan terukur [6]. Gagasan mengenai ukuran ini diperkenalkan pada awal abad ke-20 M melalui penelitian dari Henri Lebesgue (1875-1941 M), penemu teori modern tentang ukuran dan integral [4].

Sebelum melakukan pemartisian suatu himpunan X menjadi sub-sub himpunan terukur, yang dalam hal ini adalah pemartisian domain dari suatu fungsi, diperlukan suatu fungsi himpunan yang disebut dengan suatu **ukuran luar** pada X . Ukuran luar ini terdefinisi pada koleksi dari semua subhimpunan X , sedemikian sehingga dengan fungsi ini dapat diverifikasi apakah suatu subhimpunan dari X adalah terukur atau tidak. Sementara itu, dikatakan bahwa pembatasan suatu ukuran luar μ^* hanya pada koleksi dari semua himpunan yang terukur oleh μ^* akan menghasilkan suatu ukuran pada koleksi tersebut. Selanjutnya, pada himpunan dari semua bilangan riil berdimensi- n , yang dinotasikan dengan $\mathbb{R}^n$, diperkenalkan suatu ukuran luar khusus yang dikenal dengan nama **ukuran luar Lebesgue**. Setiap subhimpunan dari $\mathbb{R}^n$ yang terukur oleh ukuran luar Lebesgue ini nantinya disebut dengan **himpunan (terukur) Lebesgue**. Lebih lanjut, ukuran yang dihasilkan dari pembatasan ukuran luar Lebesgue hanya pada koleksi dari semua himpunan terukur Lebesgue dinamakan dengan **ukuran Lebesgue** [3]. Ukuran inilah yang nantinya akan digunakan dalam teori **pengintegralan Lebesgue** yang merupakan suatu perumuman dari teori pengintegralan Riemann [6].

Ukuran luar pada suatu himpunan tak kosong X dapat dikonstruksi dengan menggunakan sebuah teorema mengenai pengonstruksian suatu ukuran luar. Pada makalah ini, akan diperkenalkan dan dijelaskan sebuah metode mengenai pengonstruksian suatu ukuran luar, bentuk pendefinisian ukuran luar Lebesgue, serta sifat-sifat yang berlaku pada ukuran luar Lebesgue, yang didasarkan kepada definisi ukuran luar dan sebuah teorema tentang pengonstruksian suatu ukuran luar.

2. Ruang Terukur dan Beberapa Teori Terkait

Teori mengenai ruang terukur memiliki kaitan dengan **himpunan terhitung**. Suatu himpunan dikatakan terhitung jika himpunan tersebut berhingga atau terbilang.

Definisi 2.1. [1] (i) *Himpunan kosong dikatakan memiliki 0 elemen.*

(ii) *Jika $n \in \mathbb{N}$, suatu himpunan S dikatakan memiliki n elemen apabila terdapat suatu bijeksi dari himpunan $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ ke S .*

(iii) *Suatu himpunan S dikatakan **berhingga** apabila S kosong atau memiliki n elemen untuk suatu $n \in \mathbb{N}$.*

(iv) *Suatu himpunan S dikatakan **tak berhingga** apabila S bukan himpunan berhingga.*

Himpunan terhitung diperkenalkan dengan definisi sebagai berikut.

Definisi 2.2. [1] (i) Suatu himpunan S dikatakan **terbilang** (atau **tak berhingga terhitung**) jika terdapat suatu bijeksi dari $\mathbb{N}$ ke S .
(ii) Suatu himpunan S dikatakan **terhitung** jika S berhingga atau S terbilang.
(iii) Suatu himpunan S dikatakan **tak terhitung** jika S bukan himpunan terhitung.

Himpunan bilangan riil diperluas, yang disimbolkan dengan $\overline{\mathbb{R}}$, didefinisikan sebagai $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} = [-\infty, \infty]$ [6].

Definisi 2.3. [3] Misalkan X adalah suatu himpunan tak kosong dan $\mathcal{P}(X)$ adalah koleksi dari semua subhimpunan X . Suatu fungsi $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ disebut **suatu ukuran luar pada X** apabila memenuhi ketiga kondisi berikut.

- (i) $\mu^*(\emptyset) = 0$.
- (ii) $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ jika $A \subseteq B \subseteq X$.
- (iii) $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ untuk setiap barisan (A_n) dari sub-sub himpunan dari X .

Misalkan $N \in \mathbb{N}$ dan $A_1, \dots, A_N \subseteq X$ sebarang. Dengan mengasumsikan bahwa $A_n = \emptyset$ untuk setiap $n > N$, dari sifat (iii) ukuran luar μ^* di atas dapat diketahui bahwa $\mu^*(\bigcup_{n=1}^N A_n) = \mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) = \sum_{n=1}^N \mu^*(A_n)$, yaitu $\mu^*(\bigcup_{n=1}^N A_n) \leq \sum_{n=1}^N \mu^*(A_n)$.

Proposisi 2.4. [3] Jika I terhitung dan $I = \{i_1, i_2, \dots\}$ adalah suatu penomoran sebarang dari I , maka $\sum_{i \in I} a(i) = \sum_{k=1}^{\infty} a(i_k)$ untuk semua $a : I \rightarrow [0, \infty]$.

Proposisi 2.5. [3] Jika $I = \bigcup_{k \in K} J_k$ dengan K adalah suatu himpunan tak kosong terindeks dan masing-masing J_k tak kosong dan saling lepas, maka untuk setiap $a : I \rightarrow [0, \infty]$ berlaku $\sum_{i \in I} a(i) = \sum_{k \in K} (\sum_{i \in J_k} a(i))$.

3. Pembahasan

Pada dasarnya terdapat dua metode dalam mengonstruksi ukuran luar pada suatu himpunan X . Metode pertama dimulai dengan suatu koleksi $\mathcal{C}$ sebarang dari sub-sub himpunan dari X dan suatu fungsi τ pada $\mathcal{C}$. Sementara itu, metode kedua dimulai dengan suatu fungsi linier kontinu pada suatu ruang dari fungsi-fungsi kontinu [3]. Adapun metode pengonstruksian ukuran luar yang akan diperkenalkan dan dijelaskan pada makalah ini adalah metode pertama, yang mana metode ini merupakan suatu metode yang didasarkan kepada sebuah teorema tentang pengonstruksian suatu ukuran luar.

Suatu koleksi $\mathcal{K}$ dari himpunan-himpunan disebut sebagai suatu **selimut** dari suatu himpunan E apabila E termuat di dalam gabungan dari semua himpunan yang termuat di koleksi $\mathcal{K}$ [2]. Anggap bahwa X adalah suatu himpunan tak kosong. Misalkan $\mathcal{C}$ adalah suatu koleksi dari sub-sub himpunan dari X dan $E \subseteq X$. Koleksi terhitung $\mathcal{K} = \{C_j\}_{j=1}^{\infty}$ disebut dengan suatu **selimut terhitung dari E dengan elemen-elemen dari $\mathcal{C}$** apabila $E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$ dan $C_1, C_2, \dots \in \mathcal{C}$. Untuk memudahkan penulisan dalam bahasan ini, koleksi dari *semua* selimut terhitung dari E dengan elemen-elemen dari $\mathcal{C}$ dinotasikan dengan $\mathcal{K}_{\mathcal{C}}(E)$. Jadi,

$$\mathcal{K}_{\mathcal{C}}(E) = \{\mathcal{K} = \{C_j\}_{j=1}^{\infty} \mid E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \text{ dan } C_1, C_2, \dots \in \mathcal{C}\}.$$

Anggap X adalah suatu himpunan tak kosong.

Teorema 3.1. [3] Misalkan $\mathcal{C}$ adalah suatu koleksi dari sub-sub himpunan dari X , memuat setidaknya $\emptyset$, dan $\tau : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$ adalah suatu fungsi sebarang dengan $\tau(\emptyset) = 0$. Jika didefinisikan bahwa

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \tau(C_j) \mid \{C_j\}_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{K}_{\mathcal{C}}(E) \right\}$$

untuk setiap $E \subseteq X$, dengan kesepakatan bahwa $\inf \emptyset = \infty$, maka μ^* adalah suatu ukuran luar pada X .

Bukti. Dari definisi μ^* di atas, perhatikan bahwa $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$. Notasikan

$$\mathcal{T}_{\mathcal{C}}(E) = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \tau(C_j) \mid \{C_j\}_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{K}_{\mathcal{C}}(E) \right\} \quad (3.1)$$

sedemikian sehingga $\mu^*(E) = \inf \mathcal{T}_{\mathcal{C}}(E)$ untuk setiap $E \subseteq X$, dengan kesepakatan bahwa $\inf \emptyset = \infty$.

Catatan: Dari penotasian (3.1) di atas, perhatikan bahwa

$${}''\mathcal{T}_{\mathcal{C}}(E) = \emptyset \text{ jika dan hanya jika } \mathcal{K}_{\mathcal{C}}(E) = \emptyset {}''.$$

(i) Akan dibuktikan bahwa $\mu^*(\emptyset) = 0$.

Perhatikan bahwa $\emptyset \subseteq \cup_{j=1}^{\infty} \emptyset$ dan $\emptyset \in \mathcal{C}$. Berarti $\{\emptyset, \emptyset, \dots\} \in \mathcal{K}_{\mathcal{C}}(\emptyset)$, sedemikian sehingga dari (3.1) diketahui bahwa $\sum_{j=1}^{\infty} \tau(\emptyset) \in \mathcal{T}_{\mathcal{C}}(\emptyset)$. Oleh karena itu, diperoleh $\mu^*(\emptyset) = \inf \mathcal{T}_{\mathcal{C}}(\emptyset) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \tau(\emptyset) = \sum_{j=1}^{\infty} 0 = 0$. Disimpulkan, $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(ii) Akan dibuktikan bahwa $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ untuk setiap $A, B \subseteq X$ dengan $A \subseteq B$.

Ambil sebarang $A, B \subseteq X$ dengan $A \subseteq B$, akan ditunjukkan $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

(Kasus 1) Jika $\mathcal{K}_{\mathcal{C}}(B) = \emptyset$, didapatkan $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}(B) = \emptyset$. Oleh karena itu, $\mu^*(B) = \inf \mathcal{T}_{\mathcal{C}}(B) = \inf \emptyset = \infty$, sedemikian sehingga pertaksamaan $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ otomatis terpenuhi.

(Kasus 2) Jika $\mathcal{K}_{\mathcal{C}}(B) \neq \emptyset$, ambil sebarang selimut terhitung $\{C_j\}_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{K}_{\mathcal{C}}(B)$ sedemikian sehingga

$$B \subseteq \cup_{j=1}^{\infty} C_j ; \quad C_1, C_2, \dots \in \mathcal{C}. \quad (3.2)$$

Karena $A \subseteq B$, maka dari (3.2) diperoleh $A \subseteq \cup_{j=1}^{\infty} C_j ; \quad C_1, C_2, \dots \in \mathcal{C}$ sedemikian sehingga $\{C_j\}_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{K}_{\mathcal{C}}(A)$. Jadi, disimpulkan bahwa $\mathcal{K}_{\mathcal{C}}(B) \subseteq \mathcal{K}_{\mathcal{C}}(A)$. Akibatnya, $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}(B) \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{C}}(A)$ sedemikian sehingga $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

Jadi, dari **Kasus 1** dan **Kasus 2**, terbukti bahwa $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ untuk setiap $A, B \subseteq X$ dengan $A \subseteq B$.

(iii) Akan dibuktikan bahwa $\mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ untuk setiap barisan (A_n) dari sub-sub himpunan dari X .

Ambil sebarang barisan (A_n) dari sub-sub himpunan dari X , akan ditunjukkan bahwa $\mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$.

- (Kasus 1) Jika terdapat A_n dengan $\mu^*(A_n) = \infty$ untuk suatu $n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) = \infty$, maka $\mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ otomatis terpenuhi.
- (Kasus 2) Jika tidak terdapat A_n dengan $\mu^*(A_n) = \infty$ untuk suatu $n \in \mathbb{N}$, yaitu jika $\mu^*(A_n) < \infty$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka $\inf \mathcal{T}_{\mathcal{C}}(A_n) < \infty$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}(A_n) \neq \emptyset$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Oleh karena itu, haruslah $\mathcal{K}_{\mathcal{C}}(A_n) \neq \emptyset$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Dari definisi μ^* bahwa $\mu^*(A_n) = \inf \mathcal{T}_{\mathcal{C}}(A_n)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, perhatikan bahwa untuk setiap $\epsilon > 0$ dan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, akan selalu terdapat $\sum_{j=1}^{\infty} \tau(C_{(n,j)}) \in \mathcal{T}_{\mathcal{C}}(A_n)$ sedemikian sehingga

$$\sum_{j=1}^{\infty} \tau(C_{(n,j)}) < \mu^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}. \quad (3.3)$$

Selanjutnya, dari (3.3), diperoleh selimut terhitung $\{C_{(n,j)}\}_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{K}_{\mathcal{C}}(A_n)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Berarti $A_n \subseteq \cup_{j=1}^{\infty} C_{(n,j)}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$\cup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} (\cup_{j=1}^{\infty} C_{(n,j)}) = \cup_{(n,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} C_{(n,j)}. \quad (3.4)$$

Misalkan koleksi $\{C_{(n,j)} \mid (n,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$ dari elemen-elemen $\mathcal{C}$ yang memenuhi (3.3) dan (3.4) di atas dengan $\mathcal{K}$, yaitu

$$\mathcal{K} = \{C_{(n,j)} \mid (n,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}. \quad (3.5)$$

Dengan menggunakan sebarang penomoran dari $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, perhatikan bahwa koleksi $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{C}$ dari sub-sub himpunan dari X ini dapat dinyatakan sebagai

$$\mathcal{K} = \{C_1, C_2, \dots\}. \quad (3.6)$$

Dari (3.5) dan (3.4) perhatikan bahwa $\mathcal{K} \in \mathcal{K}_{\mathcal{C}}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)$. Oleh karena itu, dengan menggunakan (3.6), diperoleh

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tau(C_k) \in \mathcal{T}_{\mathcal{C}}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n). \quad (3.7)$$

Sementara itu, (3.6) dan Proposisi 2.4 mengimplikasikan bahwa $\sum_{C \in \mathcal{K}} \tau(C) = \sum_{k=1}^{\infty} \tau(C_k)$ sedemikian sehingga, dari (3.7), diperoleh $\sum_{C \in \mathcal{K}} \tau(C) \in \mathcal{T}_{\mathcal{C}}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)$. Oleh karena itu,

$$\mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{C \in \mathcal{K}} \tau(C). \quad (3.8)$$

Selanjutnya, perhatikan dari (3.5) bahwa $\mathcal{K} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{K}_n$, dengan $\mathcal{K}_n = \{C_{(n,j)} \mid j \in \mathbb{N}\}$. Karena dalam hal ini tidak ada jaminan bahwa $\mathcal{K}_{n_1}$ dan $\mathcal{K}_{n_2}$ saling lepas untuk setiap $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ dengan $n_1 \neq n_2$, maka Proposisi 2.5 mengimplikasikan

$$\sum_{C \in \mathcal{K}} \tau(C) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} (\sum_{C \in \mathcal{K}_n} \tau(C)). \quad (3.9)$$

Karena $\sum_{n \in \mathbb{N}} (\sum_{C \in \mathcal{K}_n} \tau(C)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\sum_{j \in \mathbb{N}} \tau(C_{(n,j)}))$, maka, dari (3.9), diperoleh

$$\sum_{C \in \mathcal{K}} \tau(C) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} (\sum_{j \in \mathbb{N}} \tau(C_{(n,j)})). \quad (3.10)$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}
 \mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) &\leq \Sigma_{C \in \mathcal{K}} \tau(C) && (\text{dari (3.8)}) \\
 &\leq \Sigma_{n \in \mathbb{N}} (\Sigma_{j \in \mathbb{N}} \tau(C_{(n,j)})) && (\text{dari (3.10)}) \\
 &= \Sigma_{n=1}^{\infty} (\Sigma_{j=1}^{\infty} \tau(C_{(n,j)})) \\
 &< \Sigma_{n=1}^{\infty} (\mu^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}) && (\text{dari (3.3)}) \\
 &= \Sigma_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \epsilon \Sigma_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \epsilon \\
 &= \Sigma_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \epsilon \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \epsilon \\
 &= \Sigma_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \epsilon,
 \end{aligned}$$

yaitu diperoleh $\mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) < \Sigma_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \epsilon$. Karena $\epsilon > 0$ sebarang, maka disimpulkan $\mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \Sigma_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$.

Jadi, dari **Kasus 1** dan **Kasus 2**, terbukti bahwa $\mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \Sigma_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ untuk setiap barisan (A_n) dari sub-sub himpunan dari X .

Dengan demikian, dari (i), (ii), dan (iii), terbukti bahwa μ^* adalah suatu ukuran luar pada X . $\square$

Contoh 3.2. [3] Misalkan $\mathcal{C} = \emptyset \cup \{\{a, b\} \mid a, b \in \mathbb{N}\}$ dan $\tau : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$ didefinisikan dengan $\tau(\emptyset) = 0$ dan $\tau(C) = 2$ untuk setiap $C \in \mathcal{C}$ lainnya. Akan ditentukan ukuran luar $\mu^*(E)$ untuk setiap $E \subseteq \mathbb{N}$ dengan menggunakan pendefinisian μ^* yang diberikan oleh Teorema 3.1.

Pertama-tama, definisikan

$$\mu^*(E) = \inf \{ \Sigma_{j=1}^{\infty} \tau(C_j) \mid \{C_j\}_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{K}_{\mathcal{C}}(E) \}$$

untuk setiap $E \subseteq \mathbb{N}$, dengan kesepakatan bahwa $\inf \emptyset = \infty$. Ambil sebarang himpunan tak kosong $E \subseteq \mathbb{N}$. Dari Definisi 2.2, $\mathbb{N}$ merupakan himpunan terbilang sedemikian sehingga $\mathbb{N}$ juga merupakan himpunan terhitung. Oleh karena itu, $E \subseteq \mathbb{N}$ dapat dinyatakan sebagai $\{e_1, \dots, e_N\}$ untuk suatu $N \in \mathbb{N}$ dengan $e_1, \dots, e_N \in \mathbb{N}$. Selanjutnya, untuk setiap $E = \{e_1, \dots, e_N\}$, definisikan

$$C_j = \begin{cases} \{e_j, e_{N+1-j}\} & \text{untuk } 1 \leq j \leq k_E \\ \emptyset & \text{untuk } j > k_E \end{cases}$$

dengan

$$k_E = \begin{cases} N/2 & \text{jika } N \text{ genap} \\ (N+1)/2 & \text{jika } N \text{ ganjil} \end{cases}$$

sedemikian sehingga $E \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} C_j$ dan $C_1, C_2, \dots \in \mathcal{C}$. Berarti $\{C_j\}_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{K}_{\mathcal{C}}(E)$. Perhatikan bahwa $\cup_{n=1}^{\infty} C_j = E$ dengan $C_{j_1} \cap C_{j_2} = \emptyset$ untuk setiap $j_1, j_2 \in \mathbb{N}$ dengan $j_1 \neq j_2$, sehingga jelas

$$\begin{aligned}
 \mu^*(E) &= \inf \{ \Sigma_{j=1}^{\infty} \tau(C_j) \mid \{C_j\}_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{K}_{\mathcal{C}}(E) \} \\
 &= \Sigma_{j=1}^{\infty} \tau(C_j) \mid C_j = \begin{cases} \{e_j, e_{N+1-j}\} & \text{untuk } 1 \leq j \leq k_E \\ \emptyset & \text{untuk } j > k_E \end{cases} \\
 &= \Sigma_{j=1}^{k_E} \tau(C_j) + \Sigma_{j=k_E+1}^{\infty} \tau(C_j)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{k_E} \tau(\{e_j, e_{N+1-j}\}) + \sum_{j=k_E+1}^{\infty} \tau(\emptyset) \\
&= \sum_{j=1}^{k_E} 2 + \sum_{j=k_E+1}^{\infty} 0 \\
&= k_E(2) + 0 \\
&= 2k_E \\
&= \begin{cases} 2(N/2) & \text{jika } N \text{ genap} \\ 2((N+1)/2) & \text{jika } N \text{ ganjil} \end{cases} \\
&= \begin{cases} N & \text{jika } N \text{ genap} \\ N+1 & \text{jika } N \text{ ganjil} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Jadi, ukuran luar $\mu^*(E)$ yang diperoleh untuk setiap $E = \{e_1, \dots, e_N\} \subseteq \mathbb{N}$ dengan menggunakan pendefinisian μ^* di atas adalah

$$\mu^*(E) = \begin{cases} N & \text{jika } N \text{ genap} \\ N+1 & \text{jika } N \text{ ganjil} \end{cases}.$$

Volume dari setiap interval $I = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$ didefinisikan oleh $\text{vol}_n(I) = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)$. Misalkan $\mathcal{C}$ adalah koleksi dari semua interval buka I di $\mathbb{R}^n$ dan fungsi $\tau : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$ didefinisikan sebagai $\tau(I) = \text{vol}_n(I)$ untuk setiap $I = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n) \in \mathcal{C}$. Selanjutnya, definisikan

$$m_n^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}_n(I_j) \mid \{I_j\}_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{K}_{\mathcal{C}}(E) \right\} \quad (3.11)$$

untuk setiap $E \subseteq \mathbb{R}^n$, dengan $\mathcal{K}_{\mathcal{C}}(E)$ adalah koleksi dari semua selimut terhitung dari E dengan elemen-elemen dari $\mathcal{C}$. (Karena $\mathbb{R}^n = \cup_{k=1}^{\infty} (-k, k) \times \dots \times (-k, k)$, dalam hal ini, dapat diamati bahwa akan selalu terdapat suatu selimut terhitung dari E dengan elemen-elemen dari $\mathcal{C}$ untuk setiap $E \subseteq \mathbb{R}^n$ [3]. Dengan kata lain, akan selalu terdapat $\{I_j\}_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{K}_{\mathcal{C}}(E)$ sedemikian sehingga $\mathcal{K}_{\mathcal{C}}(E) \neq \emptyset$. Oleh karena itu, $\{\sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}_n(I_j) \mid \{I_j\}_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{K}_{\mathcal{C}}(E)\} \neq \emptyset$ untuk setiap $E \subseteq \mathbb{R}^n$.)

Perhatikan bahwa kondisi-kondisi yang diberikan di atas memenuhi semua asumsi untuk pengonstruksian suatu ukuran luar pada $\mathbb{R}^n$ yang diberikan oleh Teorema 3.1. Dari teorema tersebut, dapat disimpulkan bahwa m_n^* adalah suatu ukuran luar pada $\mathbb{R}^n$.

Definisi 3.3. [3] Ukuran luar m_n^* yang diberikan oleh (3.11) disebut dengan **ukuran luar Lebesgue (berdimensi- n) pada $\mathbb{R}^n$** .

Ukuran luar Lebesgue memenuhi semua sifat ukuran luar yang diberikan oleh Definisi 2.3.

Akibat 3.4. [5] Ukuran luar Lebesgue $m_n^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ memenuhi sifat-sifat sebagai berikut.

- (i) $m_n^*(\emptyset) = 0$.
- (ii) $m_n^*(A) \leq m_n^*(B)$ untuk setiap $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ dengan $A \subseteq B$.
- (iii) $m_n^*(\cup_{i=1}^{\infty} (A_i)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m_n^*(A_i)$ untuk setiap barisan $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ dari sub-sub himpunan dari $\mathbb{R}^n$.

Proposisi 3.5. [6] Ukuran luar Lebesgue dari suatu himpunan terhitung adalah nol.

Bukti. Misalkan $C = \{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ adalah sebarang himpunan terhitung di $\mathbb{R}^n$ untuk suatu $n \in \mathbb{N}$; $c_k = (c_{k_1}, \dots, c_{k_n})$ dan $c_{k_1}, \dots, c_{k_n} \in \mathbb{R}$, untuk setiap $k = 1, 2, \dots$. Misalkan $\epsilon > 0$ sebarang. Untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, definisikan I_k di $\mathbb{R}^n$ dengan

$$I_k = (c_{k_1} - \sqrt[n]{\frac{\epsilon}{2^{k+n}}}, c_{k_1} + \sqrt[n]{\frac{\epsilon}{2^{k+n}}}) \times \dots \times (c_{k_n} - \sqrt[n]{\frac{\epsilon}{2^{k+n}}}, c_{k_n} + \sqrt[n]{\frac{\epsilon}{2^{k+n}}}).$$

Koleksi terhitung $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ dari interval-interval buka di $\mathbb{R}^n$ ini adalah suatu selimut terhitung dari C . Oleh karena itu, dari definisi m_n^* , diperoleh

$$0 \leq m_n^*(C) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}_n(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(2 \sqrt[n]{\frac{\epsilon}{2^{k+n}}} \right)^n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon.$$

Jadi, karena $0 \leq m_n^*(C) \leq \epsilon$ untuk sebarang $\epsilon > 0$, disimpulkan bahwa $m_n^*(C) = 0$. Dengan demikian, karena untuk sebarang himpunan terhitung C di $\mathbb{R}^n$ diperoleh $m_n^*(C) = 0$, maka terbukti bahwa ukuran luar Lebesgue dari suatu himpunan terhitung (di $\mathbb{R}^n$) adalah nol. $\square$

4. Kesimpulan

- (1) Salah satu metode untuk mengonstruksi suatu ukuran luar pada suatu himpunan tak kosong diberikan oleh Teorema 3.1.
- (2) Ukuran luar Lebesgue merupakan ukuran luar khusus pada $\mathbb{R}^n$, sebagaimana yang diberikan oleh persamaan (3.11).
- (3) Ukuran luar Lebesgue memenuhi semua sifat ukuran luar yang diberikan oleh Definisi 2.3.
- (4) Ukuran luar Lebesgue dari suatu himpunan terhitung adalah nol.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terimakasih kepada Bapak Jenizon, Bapak Ahmad Iqbal Baqi, dan Bapak Mahdhivan Syafwan yang telah membantu dengan memberikan masukan dan saran dalam penulisan makalah ini.

Daftar Pustaka

- [1] Bartle, R.G., Sherbert, D.R., 2011, *Introduction to Real Analysis*, Edisi ke-4, John Wiley & Sons, New York
- [2] Jain, P.K., Gupta, V.P., 1986, *Lebesgue Measure and Integration*, Edisi ke-1, John Wiley & Sons, New York
- [3] Papadimitrakakis, M., 2004, *Measure Theory*, University of Crete, Heraklion
- [4] Petrovai, D.M., 2014, Lebesgue-Stieltjes Measure on $\mathbb{R}$, *ScienceDirect*, **12**: halaman 234 - 239
- [5] Petrovai, D.M., 2015, The Lebesgue Measure on $\mathbb{R}^n$, *ScienceDirect*, **19**: halaman 789 - 792
- [6] Royden, H.L., Fitzpatrick, P.M., 2010, *Real Analysis*, Edisi ke-4, Prentice Hall, New Jersey