

SIFAT-SIFAT MODUL NOETHERIAN

SILVIA MARTASARI, I MADE ARNAWA*, NOVA NOLIZA BAKAR

*Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : silviamartasari705@gmail.com, arnawa@sci.unand.ac.id, novanoliza@sci.unand.ac.id*

Diterima 17 Februari 2020 Direvisi 7 Maret 2020 Dipublikasikan 29 April 2020

Abstrak. Diberikan R adalah suatu ring komutatif dengan unsur satuan dan M adalah suatu grup abelian (hampir selalu terhadap penjumlahan). Suatu modul atas ring R (R -modul) adalah suatu grup abelian M yang dilengkapi dengan dua operasi dan memenuhi syarat-syarat tertentu. Suatu submodul S dari modul M analog dengan subgrup H dari grup G . Modul Noetherian merupakan salah satu jenis modul. Modul Noetherian merupakan modul yang memenuhi kondisi rantai naik (*ascending chain condition*) atas submodul-submodulnya. Modul yang dibangkitkan secara berhingga disebut dengan modul Noetherian. Penelitian ini bertujuan untuk memperoleh sifat-sifat dari modul Noetherian.

Kata Kunci: Modul, Modul Noetherian, Kondisi rantai naik

1. Pendahuluan

Suatu ruang vektor V atas lapangan F adalah suatu himpunan V yang memiliki elemen vektor-vektor, $\bar{0}$ (vektor nol) dan perkalian skalar antara vektor dengan elemen di F dan memenuhi kondisi tertentu. Suatu modul atas ring R merupakan perluasan dari ruang vektor V atas lapangan F .

Modul atas ring R adalah suatu grup abelian (terhadap penjumlahan) bersamaan dengan pemetaannya yang memenuhi syarat-syarat tertentu. Ring R disebut dengan ring dasar dari modul tersebut. Untuk suatu ring R yang tidak komutatif, maka modul atas ring R tersebut harus memenuhi syarat sebagai modul kiri dan modul kanan. Suatu submodul S dari modul M analog dengan subgrup H dari grup G .

Terdapat beberapa jenis modul, diantaranya : modul Dedekind, modul proyektif, modul bebas, modul torsi, modul Noetherian, dll. Tugas akhir ini membahas tentang modul Noetherian dan sifat-sifat dari modul Noetherian. Modul Noetherian merupakan modul yang memenuhi kondisi rantai naik atas submodul-submodulnya. Modul yang dibangkitkan secara berhingga disebut dengan modul Noetherian. [9].

*penulis korespondensi

2. LANDASAN TEORI

2.1. Definisi Grup dan Ring

Definisi 2.1. [5] Himpunan tak-kosong G disebut grup jika pada G didefinisikan operasi $*$ sedemikian sehingga:

- (1) Jika $a, b \in G$, mengakibatkan $a * b \in G$. (Dideskripsikan bahwa G tertutup terhadap operasi $*$).
- (2) Diberikan $a, b, c \in G$, maka $a * (b * c) = (a * b) * c$. (Dideskripsikan bahwa hukum asosiatif berlaku di G).
- (3) Terdapat $e \in G$ yang tunggal sedemikian sehingga $a * e = e * a = a$, untuk setiap $a \in G$. (e disebut elemen identitas di G).
- (4) Untuk setiap $a \in G$ terdapat $b \in G$, sedemikian sehingga $a * b = b * a = e$ (b ditulis a^{-1} dan b tersebut adalah invers dari a di G).

Definisi 2.2. [5] Grup G disebut grup abelian jika $a * b = b * a$ untuk setiap $a, b \in G$.

Definisi 2.3. [5] Himpunan $H \subseteq G$ yang tak kosong disebut subgrup dari G jika H membentuk grup atas operasi yang sama di G .

Definisi 2.4. [5] Himpunan tak kosong R disebut sebagai ring (gelanggang) jika R memiliki dua operasi, yakni $+$ dan $\cdot$ sedemikian sehingga:

- (1) $a, b \in R$ mengakibatkan $a + b \in R$.
- (2) $a + b = b + a$ untuk setiap $a, b \in R$.
- (3) $(a + b) + c = a + (b + c)$ untuk setiap $a, b, c \in R$.
- (4) Terdapat $0 \in R$ sedemikian sehingga $a + 0 = a$ untuk setiap $a \in R$.
- (5) Diberikan $a \in R$, terdapat elemen $b \in R$ sedemikian sehingga $a + b = 0$ (b ditulis sebagai $-a$).
- (6) Untuk setiap $a, b \in R$ mengakibatkan $a \cdot b \in R$.
- (7) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ untuk setiap $a, b, c \in R$.
- (8) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ dan $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ untuk setiap $a, b, c \in R$.

Definisi 2.5. [9] Suatu ring R disebut ring komutatif jika $ab = ba$ untuk setiap $a, b \in R$.

Definisi 2.6. [5] Suatu ring R disebut sebagai ring dengan unsur satuan (ring with unit) bila terdapat $1 \in R$ sedemikian sehingga $a \cdot 1 = a$ untuk setiap $a \in R$.

2.2. Ruang Vektor

Definisi 2.7. [6] Suatu ruang vektor V atas lapangan F adalah suatu himpunan V yang memiliki elemen vektor-vektor, $\bar{0}$ (vektor nol) dan perkalian skalar antara vektor dengan elemen di F yang memenuhi kondisi berikut:

- (1) Untuk setiap $u, v, w \in V$, berlaku:

$$u + v \in V.$$

$$\bar{0} + v = v.$$

$$u + v = v + u.$$

$$u + (v + w) = (u + v) + w.$$

(2) Untuk setiap $u, v \in V$ dan $r, s \in F$

$$rv \in V.$$

$$1v = v.$$

$$0v = \bar{0}.$$

$$r(u + v) = ru + rv.$$

$$(r + s)u = ru + su.$$

$$(rs)v = r(sv).$$

2.3. Modul dan Submodul

Definisi 2.8. [4] Misalkan R adalah suatu ring komutatif dengan unsur satuan. Suatu modul atas ring R (R -modul) adalah suatu grup abelian M (hampir selalu terhadap penjumlahan) bersama dengan pemetaan:

$$\circ : R \times M \longrightarrow M$$

$$(r, m) \longmapsto r \times m = rm$$

yang memenuhi syarat berikut:

(1) M merupakan grup abelian terhadap penjumlahan.

(2) Untuk setiap $r, s \in R$ dan $u, v \in M$, berlaku:

$$(a) \quad r(u + v) = ru + rv.$$

$$(b) \quad (r + s)u = ru + su.$$

$$(c) \quad (rs)u = r(su).$$

$$(d) \quad 1u = u.$$

Definisi 2.9. [4] Misalkan M suatu R -modul. Suatu submodul dari M adalah suatu sub himpunan N dari M sedemikian sehingga:

(1) $(S, +)$ merupakan grup abelian terhadap operasi "+", yaitu S merupakan subgrup di $(M, +)$.

(2) $(\forall r \in R)(\forall s \in S) \quad r \circ s \in S$.

2.4. Submodul yang Dibangkitkan oleh Suatu Himpunan

Definisi 2.10. [4] Misalkan M adalah R -modul dan $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq M$ dan $\langle X \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n r_i x_i \mid \forall r_i \in R \right\}$. Modul M disebut dibangkitkan secara berhingga jika $M = \langle X \rangle$.

2.5. Homomorfisma Modul

Definisi 2.11. [4] Misalkan M dan N adalah R -modul. Suatu fungsi $f : M \longrightarrow N$ adalah homomorfisma R -modul jika untuk setiap $m_1, m_2 \in M$ dan $r \in R$ memenuhi:

$$(1) \quad f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2).$$

$$(2) \quad f(rm_1) = rf(m_1).$$

Diberikan homomorfisma R -modul $f : M \longrightarrow M'$. Kernel dari f adalah $\text{Ker}(f) = \{m \in M | f(m) = 0\}$, sedangkan bayangan dari f adalah $\text{Im}(f) = \{f(m) \in M' | m \in M\}$.

Lema 2.12. [4] Diberikan homomorfisma R -modul $f : M \longrightarrow M'$

- (1) $\text{Ker}(f)$ merupakan submodul di M .
- (2) $\text{Im}(f)$ merupakan submodul di M' .

Berikut merupakan definisi dari monomorfisma modul, epimorfisma modul dan isomorfisma modul.

Definisi 2.13. [10] Diberikan fungsi $f : M \longrightarrow M'$ merupakan homomorfisma R -modul.

- (1) Fungsi f disebut monomorfisma R -modul jika f injektif (1-1).
- (2) Fungsi f disebut epimorfisma R -modul jika f surjektif (onto).
- (3) Fungsi f disebut isomorfisma R -modul jika f bijektif (injektif dan surjektif).

Misal M dan N adalah R -modul dikatakan saling isomorfik jika terdapat suatu isomorfisma R -modul dari M ke N , selanjutnya dinotasikan dengan $M \cong N$.

Teorema 2.14. [4] Diberikan M dan N adalah R -modul. Jika fungsi $f : M \longrightarrow N$ merupakan homomorfisma R -modul, maka berlaku $M/\text{Ker}(f) \cong \text{Im}(f)$.

3. Modul Noetherian

Berikut merupakan definisi mengenai modul Noetherian dan sifat-sifat modul Noetherian.

3.1. Konsep Dasar dan Definisi

Definisi 3.1. [2] Misalkan M adalah suatu R -modul kiri. Modul M disebut R -modul Noetherian jika setiap barisan rantai naik dari submodul-submodul di M yaitu $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \dots$, terdapat k bilangan bulat positif, sehingga $M_k = M_{k+1} = M_{k+2} = \dots$.

Untuk lebih memahami mengenai definisi di atas, diberikan contoh mengenai modul Noetherian.

Contoh 3.2. Diberikan ring $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Z}$ adalah suatu $\mathbb{Z}$ -modul. Misalkan

$$2\mathbb{Z} = \{2k | k \in \mathbb{Z}\}$$

$$3\mathbb{Z} = \{3k | k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\vdots$$

$$n\mathbb{Z} = \{nk | k \in \mathbb{Z}\}$$

adalah submodul-submodul dari $\mathbb{Z}$. Akan dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}$ adalah suatu modul Noetherian dengan langkah-langkah sebagai berikut.

Akan dibuktikan bahwa submodul-submodul dari $\mathbb{Z}$ memenuhi suatu kondisi rantai naik. Perhatikan bahwa:

Misal $M_1 = 32\mathbb{Z}$, $M_2 = 16\mathbb{Z}$, $M_3 = 8\mathbb{Z}$, $M_4 = 4\mathbb{Z}$, $M_5 = 2\mathbb{Z}$ dan $M_6 = \mathbb{Z}$ yang memenuhi kondisi

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq M_4 \subseteq M_5 \subseteq M_6.$$

Jadi, jika $M_n \subset M_{n+1} \subset M_{n+2} \subset \dots$ dengan $n \in \mathbb{Z}$ dan $m_i > m_{i+1}$ dimana m_i adalah pembangkit dari M_i , maka paling banyak terdapat sebanyak n submodul, sehingga $\mathbb{Z}$ membentuk suatu kondisi rantai naik. Karena submodul-submodul dari $\mathbb{Z}$ memenuhi kondisi rantai naik, maka $\mathbb{Z}$ adalah suatu modul Noetherian.

3.2. Sifat-Sifat Modul Noetherian

Selanjutnya akan dibahas mengenai sifat-sifat modul Noetherian.

Teorema 3.3. [2] Diberikan R ring dan M adalah suatu R -modul. M modul Noetherian, maka setiap submodul dari M dibangkitkan secara berhingga.

Bukti. Misalkan R suatu ring dan M adalah suatu R -modul Noetherian. Misal modul M dibangkitkan secara berhingga, sehingga terdapat himpunan hingga $S = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset M$ sehingga $M = \{r_0a_0 + r_1a_1 + r_2a_2 + \dots + r_na_n \mid \text{untuk setiap } r_1, r_2, \dots, r_n \in R\}$. Akan ditunjukkan bahwa setiap submodul dari M dibangkitkan secara berhingga.

Misal N adalah submodul dari M dan $a_0 \in N$, akan ditunjukkan bahwa N dibangkitkan secara berhingga. Karena N submodul maka $N \neq \emptyset$, sehingga terdapat minimal satu unsur di N . Misalkan $a_0 \in N$

- (1) Proses ke-1. $N = \langle a_0 \rangle$ maka N dibangkitkan secara berhingga. Jika $N \neq \langle a_0 \rangle$ maka terdapat $a_1 \in N$, tetapi $a_1 \notin \langle a_0 \rangle$,
- (2) Proses ke-2. Jika $N = \langle a_0, a_1 \rangle$ maka N dibangkitkan secara berhingga. Jika $N \neq \langle a_0, a_1 \rangle$ maka terdapat $a_2 \in N$ tetapi $a_2 \notin \langle a_0, a_1 \rangle$,
- (3) Proses ke-3. Jika $N = \langle a_0, a_1, a_2 \rangle$ maka N dibangkitkan secara berhingga. Jika $N \neq \langle a_0, a_1, a_2 \rangle$ maka terdapat $a_3 \in N$ tetapi $a_3 \notin \langle a_0, a_1, a_2 \rangle$,
- $\vdots$
- (4) Proses ke- r . Jika $N = \langle a_0, a_1, a_2, \dots, a_{r-1} \rangle$ maka N dibangkitkan secara berhingga. Jika $N \neq \langle a_0, a_1, a_2, \dots, a_{r-1} \rangle$ maka terdapat $a_r \in N$ tetapi $a_r \notin \langle a_0, a_1, a_2, \dots, a_{r-1} \rangle$

Jika kasus ini diteruskan maka akan diperoleh suatu barisan modul naik $\langle a_0 \rangle \subset \langle a_0, a_1 \rangle \subset \langle a_0, a_1, a_2 \rangle \subset \dots$, dimana $\langle a_0, a_1, a_2, \dots, a_r \rangle$ adalah submodul dari M yang dibangkitkan oleh $a_0, a_1, a_2, \dots, a_r$.

Andaikan N tidak dibangkitkan secara berhingga maka barisan submodul-submodul naik

- (1) Proses 1. $N \neq \langle a_0 \rangle$,
- (2) Proses 2. $N \neq \langle a_0, a_1 \rangle$,
- (3) Proses 3. $N \neq \langle a_0, a_1, a_2 \rangle, \vdots$

Karena N submodul dari M , maka $N = \langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle \subset M$. Ini tidak mungkin karena M dibangkitkan secara berhingga, maka N haruslah dibangkitkan secara

berhingga. □

Selanjutnya akan diberikan contoh bukan modul Noetherian.

Contoh 3.4. Diberikan $\mathbb{Z}[X] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m \mid a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{Z}\}$ suatu $\mathbb{Z}$ -modul. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}[X]$ bukan modul Noetherian.

Misal $\mathbb{Z}[X]$ dibangun secara berhingga oleh F dan misalkan $\mathbb{Z}[X]$ dibangun secara berhingga oleh $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$.

Jika k adalah bilangan bulat positif yang lebih besar dari semua derajat polinom $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$, maka $x^k \in \mathbb{Z}[X]$ tetapi x^k tidak dapat dinyatakan sebagai $x^k = a_0f_0(x) + a_1f_1(x) + a_2f_2(x) + \cdots + a_nf_n(x)$ untuk setiap $a_i \in \mathbb{Z}$. Ini kontradiksi bahwa $\mathbb{Z}[X]$ dibangun secara hingga oleh $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ atas $\mathbb{Z}$, sehingga $\mathbb{Z}[X]$ bukan modul Noetherian.

Menurut Frank W. Anderson dan Kent R. Fuller, misalkan terdapat suatu relasi $\leq$ atas himpunan P adalah suatu pasangan terurut atas P yang memenuhi sifat reflektif ($a \leq a$), transitif (jika $a \leq b$ dan $b \leq c$ maka $a \leq c$), dan anti-simetri (jika $a \leq b$ dan $b \leq a$ maka $a = b$). Suatu pasangan $(P, \leq)$ yang terdiri dari suatu himpunan dan suatu pasangan terurut atas himpunan disebut poset.

Definisi 3.5. [10] Misalkan P sebagai poset. Elemen $m \in P$ disebut sebagai elemen maksimal di P jika $x \in P$ dan $x \geq m$ maka $m = x$.

Selanjutnya akan di bahas mengenai sifat modul Noetherian yaitu memiliki elemen maksimal.

Teorema 3.6. [2] Diberikan R ring dan M adalah suatu R -modul. Jika M modul Noetherian, maka setiap himpunan tak kosong S yang anggota-anggotanya adalah submodul-submodul dari M mempunyai elemen maksimal.

Bukti. Misalkan R suatu ring dan M adalah suatu R -modul Noetherian. M dibangkitkan secara berhingga. Akan ditunjukkan bahwa jika M adalah suatu R -modul Noetherian maka untuk setiap himpunan S submodul dari M mempunyai elemen maksimal.

Misal $S = \{N_i \mid N_i \text{ submodul dari } M\}$. Akan ditunjukkan S mempunyai elemen maksimal. Misalkan $N_0 \in S$.

- (1) Proses ke-1. Jika N_0 elemen maksimal di S , maka S memiliki elemen maksimal. Jika N_0 bukan elemen maksimal, maka terdapat $N_1 \in S$, sehingga $N_0 \subset N_1$,
- (2) Proses ke-2. Jika N_1 elemen maksimal di S , maka S memiliki elemen maksimal. Jika N_1 bukan elemen maksimal, maka ada $N_2 \in S$, sehingga $N_0 \subset N_1 \subset N_2$,
- (3) Proses ke-3. Jika N_2 elemen maksimal di S , maka S memiliki elemen maksimal. Jika N_2 bukan elemen maksimal, maka ada $N_3 \in S$, sehingga $N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset N_3$.

Jika S tidak mempunyai elemen maksimal, maka diperoleh

$N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \cdots$, dimana $N_0 \neq N_1 \neq N_2 \neq \cdots$.

Misal $L = N_0 \cup N_1 \cup N_2 \cup \cdots$, akan ditunjukkan bahwa L adalah submodul dari M .

- (a) Ambil $x_1, x_2 \in L$, akan ditunjukkan bahwa $x_1 - x_2 \in L$
 Karena $x_1, x_2 \in L$ dan $L = N_0 \cup N_1 \cup N_2 \cup \dots$, maka $x_1 \in N_i$ untuk suatu $i = 1, 2, 3, \dots$ dan $x_2 \in N_j$ untuk suatu $j = 1, 2, 3, \dots$. Tanpa mengurangi keberlakuan secara umum, misal $i < j$. Karena $N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \dots$ dan $i < j$ maka $N_i \subseteq N_j$, akibatnya $x_1, x_2 \in N_j$, selanjutnya karena N_i submodul dari M , maka $x_1 - x_2 \in N_j$, sehingga $x_1 - x_2 \in L$.
- (b) Ambil $r \in R$ dan $x_1 \in L$ (misalkan $x_1 \in N_i$). Akan ditunjukkan bahwa $rx_1 \in L$.
 Karena $x_1 \in N_i$ dan N_i adalah submodul dari M , maka $rx_1 \in N_i$, sehingga $rx_1 \in L$.

Karena (a) dan (b) terbukti, maka L adalah submodul dari M .

Karena L adalah submodul dari M maka L juga dibangkitkan secara berhingga. Karena $N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset L$ dan L dibangkitkan secara berhingga dan $L \in S$, maka L merupakan elemen maksimal. $\square$

Selanjutnya akan dibahas mengenai *image homomorfik* M' dan submodul dari modul Noetherian adalah Noetherian.

Proposisi 1. [2] *Setiap image homomorfik M' dari modul Noetherian M adalah Noetherian.*

Bukti. Misalkan M' adalah image homomorfik dan M modul Noetherian. Akan ditunjukkan bahwa M' modul Noetherian.

Misalkan M suatu R -modul Noetherian dan misal fungsi $f : M \longrightarrow L$ merupakan homomorfisma R -modul.

Misalkan $\text{Ker}(f)$ adalah K dan $\text{Im}(f)$ adalah M' . Maka berdasarkan Teorema 2.6.1 M' dapat ditulis $M' \cong M/K$, dimana K merupakan submodul dari M dan M' merupakan submodul dari L .

Misalkan N submodul dari M yang memuat K . Akan ditunjukkan bahwa N/K adalah submodul dari M/K .

- (1) Ambil $x \in N/K$, dimana $x = a + K$ untuk suatu $a \in N$. Karena N submodul dari M , maka $a \in M$, akibatnya $x = a + K \in M/K$. Karena $x \in M/K$ maka $N/K \subset M/K$.
 Karena $N \subset M$, maka terdapat $0 \in N$, sehingga terdapat $0 + K \in N/K$. Akibatnya $N/K \neq \emptyset$.
- (2) Ambil $x, y \in N/K$, dimana $x = a + K$ dan $y = b + K$ untuk suatu $a, b \in N$, maka $a + K, b + K \in N/K$. Akan ditunjukkan bahwa $x - y \in N/K$.
 $x - y = (a + K) - (b + K) = (a - b) + K = c + K$, untuk suatu $c = a - b \in N$, sehingga terbukti bahwa $x - y \in N/K$.
- (3) Ambil $x \in N/K$, dimana $x = a + K$ untuk suatu $a \in N$ maka $a + K \in N/K$ dan $r \in R$. Akan ditunjukkan bahwa $r(a + K) \in N/K$.
 $r(a + K) = ra + K$, karena N submodul di M , maka $ra \in N$, sehingga terbukti bahwa $r(a + K) \in N/K$.

Dari (1), (2) dan (3), dapat disimpulkan bahwa N/K adalah submodul dari M/K . Karena M adalah R -modul Noetherian dan N adalah submodul dari M , maka berdasarkan *Teorema 3.1.1* N adalah submodul dari M yang dibangkitkan secara berhingga. Misalkan N dibangkitkan oleh $x_1, x_2, \dots, x_r$, akibatnya $x_1 + K, x_2 + K, \dots, x_r + K$ membangkitkan N/K .

Karena N/K adalah submodul dari M/K yang dibangkitkan secara berhingga, maka M/K haruslah Noetherian. Sehingga M' adalah Noetherian. $\square$

Proposisi 2. [2] *Setiap submodul dari modul Noetherian adalah Noetherian.*

Bukti. Misal M adalah modul Noetherian dan N adalah submodul dari M . Untuk semua submodul dari N adalah submodul dari M juga, sehingga untuk setiap kondisi rantai naik dari submodul-submodul dari N adalah kondisi rantai naik dari submodul-submodul dari M . Akibatnya, jika M adalah modul Noetherian, maka N juga Noetherian. $\square$

4. Kesimpulan

- (1) Berdasarkan *Teorema 3.2.1*. Diberikan R ring dan M adalah suatu R -modul. Jika M modul Noetherian, maka setiap submodul dari M dibangkitkan secara berhingga.
- (2) Berdasarkan *Teorema 3.2.2*. Diberikan R ring dan M adalah suatu R -modul. Jika M modul Noetherian, maka setiap himpunan tak kosong S yang anggotanya adalah submodul-submodul dari M mempunyai elemen maksimal.
- (3) Berdasarkan *Proposisi 3.2.1*. Setiap image homomorfik M' dari modul Noetherian M adalah Noetherian.
- (4) Berdasarkan *Proposisi 3.2.2*. Setiap submodul dari modul noetherian adalah Noetherian.

5. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Monika Rianti Helmi, Bapak Syafrizal Sy dan Ibu Maiyastri yang telah memberikan bimbingan, masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Adkins, William, A dan Weintraub, Steven, H. 1992. *Algebra An Approach via Module Theory*. Springer-Verlag, USA.
- [2] Bhattacharya, P, B dan Jain, S, K. 1977. *First Course in Rings, Fields and Vector Spaces*. Wiley Eastern Limited, New Delhi.
- [3] Friedberg, Stephen H., Insel Arnold J., Spence, Lawrence E. 1997. *Linear Algebra*. 4th Edition. Pearson, USA.
- [4] Harley, B dan Hawkes, T, O. 1970. *Rings, Modules and Linear Algebra*. Chapman and Hall, London.
- [5] Herstein, I.N. 1996. *Abstract Algebra*. 3rd Edition. Prentice Hall, Inc, New Jersey.

- [6] Jacob, Bill. 1990. *LINEAR ALGEBRA* . W.H Freeman and Company, New York.
- [7] Lidl, R dan Pilz, G. 1998. *Applied Abstract Algebra*. 2nd Edition. Springer-Verlag, New York.
- [8] Roman, Steven. 2008. *Advanced Linier Algebra*. 3rd Edition. Springer, USA.
- [9] Rotman, Joseph J. 2002. *Anvanced Modern Algebra*. Prentice Hall, English.
- [10] W. Anderson, Frank dan Kent R. Fuller. 1992. *Rings and Categories of Modules*. 2nd Edition. Springer-Verlag, New York.