Jurnal Matematika UNAND
Vol. **IX** No. **2** Hal. 146 – 153
Edisi April 2020
ISSN : 2303–291X
e-ISSN : 2721–9410

BILANGAN BULAT GAUSSIAN $\mathbb{Z}[i]$

ELIZA SURYA NINGSIH*, YANITA, NOVA NOLIZA BAKAR
Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : elizasuryaningsih03@gmail.com, yanita@sci.unand.ac.id, novanoliza@sci.unand.ac.id

Diterima 17 Februari 2020 Direvisi 7 Maret 2020 Dipublikasikan 29 April 2020

Abstrak. Tulisan ini membahas tentang bilangan bulat Gaussian $\mathbb{Z}[i]$. Bilangan bulat Gaussian didefinisikan sebagai himpunan dari bilangan $a+bi$ dengan a, b adalah bilangan bulat dan $i^2 = -1$. Bilangan bulat Gaussian dibentuk dari bilangan bulat sehingga sifat-sifat dari bilangan bulat Gaussian juga ada pada bilangan bulat. Pada tulisan ini dikaji sifat-sifat yang terkait dengan bilangan bulat Gaussian, diantaranya norm, keterbagian, teorema pembagian, algoritma Euclidean, teorema Bezout, dan faktorisasi tunggal.

Kata Kunci: Bilangan bulat Gaussian, bilangan bulat, norm, keterbagian, teorema pembagian, algoritma Euclidean, teorema Bezout, faktorisasi tunggal

1. Pendahuluan

Pada awalnya bilangan hanya digunakan untuk mengingat jumlah. Namun dalam perkembangannya setelah para ilmuan matematika menambahkan simbol-simbol dan kata-kata yang tepat untuk mendefinisikan bilangan, bilangan menjadi hal yang penting bagi kehidupan. Tidak bisa dipungkiri bahwa dalam kehidupan sehari-hari selalu bertemu dengan bilangan. Sesuai dengan perkembangan kehidupan, konsep bilangan juga ikut berkembang sehingga ada yang disebut dengan bilangan bulat, bilangan rasional, bilangan irrasional, bilangan kompleks, dan bilangan bulat Gaussian.

Teori bilangan merupakan salah satu cabang matematika yang memperlajari tentang siat-sifat bilangan bulat. Bilangan bulat dapat diperluas dengan tambahan bilangan i (bilangan imajiner)[1]. Dengan kata lain, bilangan bulat diperluas menjadi bilangan $a + bi$ dengan a dan b adalah bilangan bulat dan $i^2 = -1$[2]. Himpunan bilangan yang diperluas ini disebut bilangan bulat Gaussian[6]. Bilangan bulat Gaussian diperkenalkan oleh Johann Carl Friedrich Gauss disimbolkan dengan $\mathbb{Z}[i]$, yaitu $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi|a, b \in \mathbb{Z}\}$ [2].

Oleh karena bilangan bulat Gaussian dibentuk dari bilangan bulat, maka sifat-sifat pada bilangan bulat juga ada pada bilangan bulat Gaussian. Dalam tugas

*penulis korespondensi

akhir ini akan dikaji beberapa sifat-sifat dari bilangan bulat Gaussian, seperti sifat pembagian, algoritma Euclidean dan Bezout, sifat-sifat faktorisasi untuk bilangan bulat Gaussian dan faktorisasi tunggal.

2. Landasan Teori

2.1. *Pengertian Bilangan Bulat*

Bilangan bulat adalah himpunan dari semua bilangan (bukan pecahan) yang terdiri dari bilangan bulat negatif $\{\cdots, -3, -2, -1\}$, nol, dan bilangan bulat positif $\{1, 2, 3, \cdots, \}$.

Suatu himpunan bilangan bulat positif berlaku sifat *Well Ordering Principle*, yaitu setiap himpunan tak kosong S yang unsur-unsurnya adalah bilangan bulat positif, memuat unsur terkecil. [4]

2.2. *Induksi Matematika*

Induksi matematika adalah salah satu metode yang dapat digunakan dalam pembuktian pernyataan matematika. Berikut ini dijelaskan langkah-langkah dari induksi matematika. Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan tentang suatu bilangan bulat dengan variabel n. Misalkan n_0 adalah bilangan bulat. $P(n)$ adalah benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$ jika memenuhi pernyataan: [4]

(1) Langkah basis: $P(n)$ benar jika $n = n_0$,
(2) langkah induksi: andaikan $P(n)$ benar untuk $n_0 \leq n \leq n_k$ maka $P(n)$ benar untuk $n = k + 1$.

2.3. *Sifat-sifat Bilangan Bulat*

Definisi 2.1. [3] *Bilangan bulat b dikatakan terbagi oleh bilangan bulat $a \neq 0$ ditulis $a \mid b$, jika terdapat bilangan bulat c sedemikian sehingga $b = ac$. Notasi $a \nmid b$ untuk menyatakan bilangan bulat b tidak habis dibagi oleh a.*

Definisi 2.2. [6] *(Algoritma pembagian). Jika $a, b \in \mathbb{Z}$ dan $b > 0$, terdapat bilangan $q, r \in \mathbb{Z}$ yang masing-masing tunggal sehingga $a = bq + r$ dengan $0 \leq r < b$.*

Definisi 2.3. [3] *Misalkan a dan b adalah bilangan bulat, dengan minimal salah satunya tidak nol. Faktor persekutuan terbesar dari a dan b, ditulis fpb(a,b), adalah bilangan bulat positif d yang memenuhi :*

(a) $d|a$ dan $d|b$,
(b) jika $c|a$ dan $c|b$ maka $c \leq d$.

Definisi 2.4. [3] *Dua bilangan bulat a dan b, tak keduanya nol, dikatakan relatif prima jika $fpb(a, b) = 1$.*

Misalkan diberikan bilangan bulat a dan b dengan $a > b > 0$. Berikut ini langkah-

langkah dari algoritma Euclidean adalah: [3]

$$\begin{aligned}
a &= q_1 b + r_1 && 0 \le r_1 < b \\
b &= q_2 r_1 + r_2 && 0 \le r_2 < r_1 \\
r_1 &= q_3 r_2 + r3 && 0 \le r_3 < r_2 \\
&\vdots \\
r_{n-2} &= q_n r_{n-1} + r_n && 0 \le r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} &= q_{n+1} r_n + 0.
\end{aligned}$$

Proses ini pasti berhenti sampai diperoleh suatu $r_{n+1} = 0$. Sisa terakhir r_n dari pembagian di atas yang bukan nol adalah $fpb(a, b)$.

Teorema 2.5. [3] *(Teorema Bezout). Misalkan $a, b \in \mathbb{Z}$, tak keduanya nol, maka terdapat bilangan bulat x dan y sedemikian sehingga $fpb(a, b) = ax + by$.*

Definisi 2.6. [3] *Suatu bilangan bulat $p > 1$ disebut bilangan prima, jika dan hanya jika p habis dibagi dengan 1 dan bilangan p sendiri. Bilangan bulat yang besar dari 1 yang bukan prima disebut komposit.*

Teorema 2.7. [3] *Jika p adalah bilangan prima dan $p \mid ab$, maka $p \mid a$ atau $p \mid b$.*

Akibat 2.8. [3] *Jika p adalah bilangan prima dan $p|a_1 a_2 \cdots a_n$ maka $p \mid a_k$ untuk suatu k, dengan $1 \le k \le n$.*

Akibat 2.9. [3] *Jika $p, q_1, q_2, \cdots, q_n$ adalah bilangan prima dan $p \mid q_1 q_2 \cdots q_n$ maka $p = q_k$ untuk suatu k, dengan $1 \le k \le n$.*

Teorema 2.10. [3] *Setiap bilangan bulat $n > 1$ dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari prima yang tunggal.*

3. Pembahasan

3.1. *Norm*

Definisi 3.1. [5] *Untuk $\alpha = a + bi \in \mathbb{Z}[i]$, norm dari α yang dinotasikan dengan $N(\alpha)$ adalah*

$$N(\alpha) = \alpha\bar{\alpha} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

Teorema 3.2. [5] *(Norm bersifat multiplikatif). Untuk α dan $\beta \in \mathbb{Z}[i]$, maka*

$$N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta).$$

Bukti. Ambil $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ dengan $\alpha = a + bi$ dan $\beta = c + di$, maka diperoleh :

$$\begin{aligned}
(\alpha\beta) &= (a + bi)(c + di) \\
&= ac + adi + bci + bdi^2 \\
&= (ac - bd) + (ad + bc)i.
\end{aligned}$$

Perhatikan:

$$\begin{aligned} N(\alpha\beta) &= N((ac-bd)(ad+bc)i) \\ &= (ac-bd)^2+(ad+bc)^2 \\ &= (a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2) \\ &= a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2) \\ &= (a^2+b^2)(c^2+d^2) \\ &= N(\alpha)N(\beta) \end{aligned}$$

□

Definisi 3.3. [8] *Misalkan* $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$. *Jika* α *adalah faktor unit dari* $\mathbb{Z}[i]$ *maka* $N(\alpha) = 1$.

Sehingga faktor unit dari $\mathbb{Z}[i]$ adalah $1, -1, i, -i$.

3.2. *Keterbagian pada* $\mathbb{Z}[i]$

Definisi 3.4. [5] *Misalkan* $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$, α *membagi* β *(ditulis* $\alpha \mid \beta$*), jika* $\beta = \alpha\gamma$ *untuk suatu* $\gamma \in \mathbb{Z}[i]$. *Bilangan* α *dikatakan pembagi atau faktor dari* β.

Teorema 3.5. [5] *Bilangan bulat Gaussian* $\alpha = a+bi$ *dapat dibagi dengan bilangan bulat* c *jika dan hanya jika* $c \mid a$ *dan* $c \mid b$ *di* $\mathbb{Z}$.

Bukti.

$\Longrightarrow$ Diketahui $c \mid \alpha$ berarti $\alpha = ck$ dengan $k \in \mathbb{Z}[i]$ sehingga $k = m + ni$, untuk m, $n \in \mathbb{Z}$. Selanjutnya,

$$\begin{aligned} \alpha &= ck \\ a+bi &= c(m+ni) \\ a+bi &= cm+cni \end{aligned}$$

sehingga setara dengan $a = cm$ dan $b = cn$, untuk $m, n \in \mathbb{Z}$. Terbukti bahwa $c \mid a$ dan $c \mid b$.
$\Longleftarrow$ Diketahui $c \mid a$ dan $c \mid b$ berarti $a = ck_1$ dan $b = ck_2$, untuk $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Selanjutnya,

$$\begin{aligned} a+bi &= ck_1 + ck_2 i \\ &= c(k_1 + k_2 i) \\ &= cd \quad \textit{untuk suatu } d = k_1 + k_2 i. \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $c|a+bi$. □

3.3. *Teorema pembagian pada* $\mathbb{Z}[i]$

Teorema 3.6. [5] *(Teorema pembagian). Untuk* α, $\beta \in \mathbb{Z}[i]$ *dengan* $\beta \neq 0$, *terdapat* γ, $\rho \in \mathbb{Z}[i]$ *sedemikian sehingga* $\alpha = \beta\gamma + \rho$ *dan* $N(\rho) < N(\beta)$. *Dengan memilih* ρ *jadi* $N(\rho) \leq (1/2)N(\beta)$.

Bukti.

Misalkan α, $\beta \in \mathbb{Z}[i]$ dengan $\beta \neq 0$. Akan dicari $\gamma, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ dengan $\alpha = \beta\gamma + \rho$ dan $N(\rho) \leq N(\beta)$.
Tulis

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\bar{\beta}}{\beta\bar{\beta}} = \frac{\alpha\bar{\beta}}{N(\beta)} = \frac{m+ni}{N(\beta)} \tag{3.1}$$

dengan menggunakan teorema pembagian pada $\mathbb{Z}$ berdasarkan Definisi 2.3., $m = N(\beta)q_1 + r_1$ dan $n = N(\beta)q_2 + r_2$, untuk suatu q_1 dan $q_2 \in \mathbb{Z}$ dan $0 \leq\mid r_1 \mid, \mid r_2 \mid\leq (1/2)N(\beta)$. Maka,

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{N(\beta)q_1 + r_1 + (N(\beta)q_2 + r_2)i}{N(\beta)} = q_1 + q_2 i + \frac{r_1 + r_2 i}{N(\beta)}. \tag{3.2}$$

Pilih $\gamma = q_1 + q_2 i$ maka persamaan (3.2) menjadi,

$$\alpha - \beta\gamma = \frac{r_1 + r_2 i}{\bar{\beta}}. \tag{3.3}$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan $N(\alpha - \beta\gamma) \leq (1/2)N(\beta)$, dimana $\alpha - \beta\gamma = \rho$ dengan menggunakan teorema pembagian pada $\mathbb{Z}$.
Ambil norm dari kedua sisi pada persamaan (3.3), sehingga dapat ditulis

$$N(\alpha - \beta\gamma) = N(\frac{r_1 + r_2 i}{\bar{\beta}}) = \frac{N(r_1 + r_2 i)}{N(\bar{\beta})} = \frac{r_1^2 + r_2^2}{N(\beta)}.$$

Oleh karena $0 \leq |r_1|, |r_2| \leq (1/2)N(\beta)$, maka

$$N(\alpha - \beta\gamma) = \frac{r_1^2 + r_2^2}{N(\beta)} \leq \frac{0 + (1/4)N(\beta)^2}{N(\beta)} = 1/4N(\beta) \leq 1/2N(\beta). \qquad \square$$

3.4. *Algoritma Euclidean pada* $\mathbb{Z}[i]$

Definisi 3.7. [8] *Untuk suatu $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$, faktor persekutuan terbesar dari α dan β, dinotasikan $fpb(\alpha, \beta)$ adalah bilangan bulat Gaussian γ yang tak nol, sedemikian sehingga $\gamma \mid \alpha$ dan $\gamma \mid \beta$ dengan norm yang kecil.*

Teorema 3.8. [5] *(Algoritma Euclidean). Misalkan α, $\beta \in \mathbb{Z}[i]$ yang tak nol. Terapkan teorema pembagian secara rekursif, dan buat pembagi dan sisanya dalam satu pembagi baru di berikutnya, yang sisanya bukan nol:*

$$\begin{aligned}
\alpha &= \gamma_1\beta + \rho_1, && N(\rho_1) < N(\beta) \\
\beta &= \gamma_2\rho_1 + \rho_2, && N(\rho_2) < N(\rho_1) \\
\rho_1 &= \gamma_3\rho_2 + \rho_3, && N(\rho_3) < N(\rho_2) \\
&\vdots \\
\rho_{n-1} &= \gamma_{n+1}\rho_n.
\end{aligned}$$

Sisa terakhir tak nol dapat dibagi oleh semua pembagi umum dari α dan β, sehingga $\rho_n = fpb(\alpha, \beta)$.

3.5. *Teorema Bezout pada* $\mathbb{Z}[i]$

Teorema 3.9. [5] *Jika δ adalah faktor persekutuan terbesar dari dua bilangan bulat Gaussian α dan β, yang tak nol, maka $\delta = \alpha x + \beta y$ untuk suatu $x, y \in \mathbb{Z}[i]$.*

Bukti.

Diketahui $\delta = fpb(\alpha, \beta)$ untuk suatu $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$. Akan ditunjukkan bahwa $\delta = \alpha x + \beta y$ untuk suatu $x, y \in \mathbb{Z}[i]$. Misalkan δ sebagai kombinasi linier dari α dan β, yaitu $\delta = \alpha x + \beta y$. Untuk menunjukkan bahwa δ adalah faktor persekutuan terbesar dari α dan β, akan ditunjukkan δ membagi habis α dan β. Dengan algoritma pembagian misalkan $\alpha = \delta q + r$ dengan $N(r) < N(\delta)$. Untuk selanjutnya penjelasan ini analog dengan bukti Teorema 2.5. pada bilangan bulat. □

3.6. *Faktorisasi tunggal pada* $\mathbb{Z}[i]$

Faktorisasi adalah suatu cara untuk membentuk suatu unsur dalam suatu himpunan menjadi hasil kali dua atau lebih unsur lain di himpunan tersebut.

Definisi 3.10. *[5] Misalkan α adalah bilangan bulat Gaussian dengan N(α) > 1. Bilangan α dikatakan komposit jika mempunyai sebuah faktor non trivial. Jika α hanya memiliki faktor trivial, maka α disebut prima.*

Faktorisasi non trivial merupakan suatu faktor dengan $N(\alpha) > 1$, dimana terdapat faktor-faktor dari α, yaitu: $\pm 1, \pm i, \pm i\alpha$, dan $\pm\alpha$. Selain dari faktorisasi non trivial disebut dengan faktorisasi trivial.

Teorema 3.11. *[5] Jika norm dari bilangan bulat Gaussian adalah prima di $\mathbb{Z}$, maka bilangan bulat Gaussian juga prima di $\mathbb{Z}[i]$.*

Bukti.

Misalkan $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ dengan $N(\alpha)$ adalah prima di $\mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan α adalah prima di $\mathbb{Z}[i]$. Misalkan α adalah hasil kali dari dua unsur β dan γ di $\mathbb{Z}[i]$, yaitu $\alpha = \beta\gamma$. Oleh karena $N(\alpha)$ prima maka $N(\alpha)$ adalah hasil kali n dengan dirinya. Sehingga $N(\beta) = 1$ atau $N(\gamma) = 1$. □

Contoh 3.12. Misalkan faktorisasi dari $7 + i$ adalah $i(1 - 7i)$ dan $(1 - 2i)(1 + 3i)$. $N(7 + i) = 7^2 + 1^2 = 50$ berdasarkan Teorema 3.13. bilangan $7 + i$ bukan bilangan prima. Bilangan $(1 + 2i)(1 - 2i)$ adalah faktorisasi dari 5. $(1 + 2i)(1 - 2i)$ disebut dengan faktorisasi non trivial, karena 5 hanya memiliki faktorisasi non trivial maka 5 adalah komposit di $\mathbb{Z}[i]$ tetapi prima di $[\mathbb{Z}]$.

Lema 3.13. *[5] Misalkan π adalah prima di $\mathbb{Z}[i]$. Untuk suatu bilangan bulat Gaussian $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_r$, jika $\pi \mid \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_r$ maka $\pi \mid \alpha_j$.*

Bukti.

Diketahui π adalah prima di $\mathbb{Z}[i]$ dan $\pi \mid \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_r$ untuk suatu $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{Z}[i]$. Akan ditunjukkan $\pi \mid \alpha_j$.

(1) Langkah basis: Untuk $r = 1$, maka $\pi \mid \alpha_1$.
(2) Langkah induksi: Andaikan benar untuk $r \geq 2$ yaitu $\pi \mid \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_{r-1}$ maka $p \mid \alpha_k$ dimana $1 \leq j \leq r-1$. Akan dibuktikan benar untuk $\pi \mid \alpha_1\ \alpha_2\ \cdots \alpha_r$ dimana $1 \leq j \leq r$. Misalkan $a = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_{r-1}$ dan $b = \alpha_r$ maka $\pi \mid ab$. Jika $\pi \mid a$ berarti $\pi \mid \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_{r-1}$, sesuai dengan pengandaian maka $\pi \mid \alpha_k$. Jika $\pi \nmid a$ maka $\pi \mid b$ berarti $\pi \mid \alpha_r$ dimana $1 \leq j \leq r$. Jadi benar untuk $\pi \mid \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_r$ maka $\pi \mid \alpha_j$. □

Teorema 3.14. *[5] (Faktorisasi Tunggal). Untuk setiap $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ dengan $N(\alpha) > 1$ mempunyai faktorisasi tunggal menjadi bilangan prima jika*

$$\alpha = \pi_1\pi_2 \cdots \pi_r = \pi_1^{'}\pi_2^{'} \cdots \pi_s^{'},$$

dimana π_i dan $\pi_j^{'}$ adalah prima di $\mathbb{Z}[i]$, maka $r = s$.

Bukti.

Diketahui $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ dengan $N(\alpha) > 1$ mempunyai faktorisasi tunggal menjadi bilangan prima. Diketahui

$$\alpha = \pi_1\pi_2 \cdots \pi_r$$

dimana π_i adalah prima. Asumsikan bahwa $\pi_1 \leq \pi_2 \leq \cdots \leq \pi_r$.
Dengan menggunakan induksi dari $N(\alpha)$ maka

(1) Untuk $N(\alpha) = 2$, maka α adalah prima.
(2) Asumsikan $n \geq 3$ dan setiap bilangan Gaussian dengan $n > N > 1$ mempunyai faktorisasi prima yang tunggal, sehingga

$$\alpha = \pi_1\pi_2 \cdots \pi_r$$

dimana π_i adalah prima dan $\pi_1 \leq \pi_2 \leq \cdots \leq \pi_r$. Misalkan terdapat faktorisasi prima lain $n = \pi_1^{'}\pi_2^{'} \cdots \pi_s^{'}$ dimana $\pi_1^{'}, \pi_2^{'}, \cdots, \pi_s^{'}$ adalah prima dan $\pi_1^{'} \leq \pi_2^{'} \leq \cdots \leq \pi_s^{'}$. Berdasarkan Teorema 3.6.1, $\pi_1 \mid n$ berarti $\pi_1 \mid \pi_1^{'}\pi_2^{'} \cdots\ \pi_s^{'}$ maka $\pi_1 \mid \pi_j^{'}$ untuk suatu j, dan $\pi_1^{'} \mid \pi_1\pi_2 \cdots \pi_s$ maka $\pi_1^{'} \mid \pi_s$ untuk suatu s. Jika $\pi_1 \geq \pi_1^{'}$ dan $\pi_1^{'} \geq \pi_1$ maka $\pi_1 = \pi_1^{'}$. Sehingga bilangan prima pertama dari kedua per- samaan adalah

$$\pi_2 \cdots \pi_r = \pi_2^{'} \cdots \pi_s^{'}.$$

Oleh karena masing-masing persamaan mempunyai faktorisasi prima sehingga dapat dikatakan $r = s$ dan $\pi_2 = \pi_2^{'}, \cdots, \pi_r = \pi_s^{'}$. Terbukti bahwa untuk setiap bilangan bulat Gaussian dengan $N(\alpha) > 1$ mempunyai faktorisasi prima yang tunggal. □

4. Kesimpulan

Berdasarkan penelitian ini diperoleh bahwa sifat-sifat pada bilangan bulat Gaussian sama dengan sifat-sifat pada bilangan bulat. Akan tetapi sifat-sifat pada bilangan bulat Gaussian dalam perhitungannya menggunakan norm dari bilangan bulat Gaussian. Adapun sifat-sifat pada bilangan bulat Gaussian, adalah:

(1) Untuk $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$, norm dari α yang dinotasikan dengan $N(\alpha)$ adalah $N(a+bi) = a^2 + b^2$.
(2) (Keterbagian). Untuk setiap $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$, jika $\alpha \mid \beta$ maka terdapat bilangan $\gamma \in \mathbb{Z}[i]$ sedemikian sehingga $\beta = \alpha\gamma$.
(3) (Teorema pembagian). Untuk $\alpha,\ \beta \in \mathbb{Z}[i]$ dengan $\beta \neq 0$, terdapat $\gamma,\ \rho \in \mathbb{Z}[i]$ sedemikian sehingga $\alpha = \beta\gamma + \rho$ dan N (ρ)<N (β).
(4) Algoritma Euclidean adalah untuk mencari faktor persekutuan terbesar dari dua bilangan dengan jumlah yang besar dengan menggunakan teorema pembagian pada bilangan bulat Gaussian.
(5) (Teorema Bezout). Jika $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ dan $\delta = fpb(\alpha, \beta)$ maka $\delta = \alpha x + \beta y$ untuk suatu $x, y \in \mathbb{Z}[i]$.
(6) (Faktorisasi tunggal). Untuk setiap $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ dengan $N(\alpha) > 1$ mempunyai faktorisasi tunggal menjadi bilangan prima jika

$$\alpha = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_r = \pi_1^{'} \pi_2^{'} \cdots \pi_s^{'},$$

dimana π_i dan $\pi_j^{'}$ adalah prima di $\mathbb{Z}[i]$, maka $r = s$.

Daftar Pustaka

[1] Barnett, dan Heine J. 2007. *"Gaussian Integers and Dedekind's Creation of an Ideal: A Number Theory Project.* Colorado State University, United State of Amerika.
[2] Benjier, H. A., dan Evelyn, G. C. 1965. Novelty Journals. *Divisibility Test for Gaussian Integers.* **4**: 9 − 16
[3] Burton, D. M. 1980. *Elementary Number Theory.* University Of New Hampshire, United State of Amerika.
[4] Clark, W. E. 2003. *Elementary Number Theory.* University of South Florida, United State of Amerika.
[5] Conrad, K. 2013. *The Gaussian Integers.* McGill University, United State of Amerika.
[6] Dummit, D. S., dan Foote, R. M. 2004. *Abstract Algebra* . Third Edition, United State of Amerika.
[7] Fariz, M. ,I Gede, A. W. W., dan Ni, W. S. 2019. *Ekivalensi Ideal Hampir Prima dan Ideal Prima pada Bilangan Bulat Gauss.*
[8] May, Catrina, A. 2015. *Application of the Euler Phi Function in the Set of Gaussian Integers.* University of North Georgia, United State of Amerika.