Jurnal Matematika UNAND
Vol. **IX** No. **2** Hal. 154 – 161
Edisi April 2020
ISSN : 2303–291X
e-ISSN : 2721–9410

PENENTUAN HARGA OPSI TIPE EROPA DENGAN MENGGUNAKAN MODEL BLACK SCHOLES FRAKSIONAL

FITRI SABRINA, DODI DEVIANTO*, FERRA YANUAR
Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : fitrisabrina09@gmail.com, ddevianto@sci.unand.ac.id, ferrayanuar@sci.unand.ac.id

Diterima 17 Februari 2020 Direvisi 7 Maret 2020 Dipublikasikan 29 April 2020

Abstrak. Harga opsi tipe Eropa dapat ditentukan dengan model *Black Scholes* fraksional dengan waktu jatuh tempo dapat difraksional menggunakan parameter *Hurst*. Gerak Brown fraksional ini dapat diformulasikan ke dalam persamaan diferensial stokastik untuk menentukan model *Black Scholes* fraksional. Data harga saham *Microsoft Corporation* (MC) dari tanggal 1 Oktober 2018 sampai 30 September 2019 dapat dibentuk ke dalam model *Black Scholes* fraksional. Pada saat harga pelaksanaan saham MC meningkat, harga opsi *call* tipe Eropa semakin menurun dan untuk harga opsi *put* tipe Eropa semakin meningkat.

Kata Kunci: Diferensial stokastik, opsi tipe Eropa, model *Black Scholes* fraksional

1. Pendahuluan

Dalam dunia keuangan, keberadaan pasar uang (*money market*) dan pasar modal (*capital market*) termasuk ke dalam pasar keuangan (*financial market*). Pasar uang terdiri atas surat berharga yang berjangka pendek seperti deposito dan SBPU (Surat Berharga Pasar Uang), sedangkan pasar modal terdiri dari pasar saham, pasar obligasi dan pasar untuk derivatif (turunan dari suatu aset). Dalam berinvestasi para investor dapat membuat keputusan untuk membeli aset yang diperdagangkan langsung di pasar keuangan atau membeli derivasi atau turunan dari aset tersebut, salah satunya adalah opsi [8].

Opsi adalah suatu hak yang didasari pada kontrak/perjanjian antara dua pihak untuk membeli atau menjual aset pada harga kesepakatan tertentu dan waktu tertentu. Berdasarkan jenis hak yang diberikan, opsi dapat dibedakan menjadi dua bagian yaitu opsi *call* dan opsi *put*. Opsi *call* adalah suatu kontrak/perjanjian antara dua pihak yang memberikan hak kepada pihak yang membeli opsi (*holder*) untuk membeli opsi dari pihak yang menjual opsi (*writer*) pada harga dan jangka waktu yang ditentukan. Opsi *put* adalah suatu kontrak/perjanjian antara dua pihak

*penulis korespondensi

yang memberikan hak kepada pihak yang membeli opsi (*holder*) untuk menjual opsi yang dimilikinya kepada penjual opsi (*writer*) pada harga dan jangka waktu yang ditentukan [3].

Berdasarkan periode waktu penggunaan opsi, opsi dapat dibedakan menjadi dua yaitu opsi tipe Eropa dan opsi tipe Amerika. Opsi yang dapat dilaksanakan pada saat jatuh tempo saja disebut opsi tipe Eropa. Opsi yang dapat dilaksanakan sebelum atau pada saat jatuh tempo disebut opsi tipe Amerika [3].

Model penetapan harga opsi mulai berkembang sejak dirumuskan oleh Fisher Black dan Mayor Scholes pada tahun 1973 yang dikenal dengan model *Black Scholes* [3]. Dalam membentuk suatu model *Black Scholes* terdapat beberapa faktor yang akan mempengaruhi yaitu harga saham, harga pelaksanaan, tingkat suku bunga bebas resiko, waktu jatuh tempo dan nilai volatilitas harga saham.

Model *Black Scholes* merupakan model penilaian harga opsi yang banyak digunakan di dunia keuangan, penilaian opsi dari *Black Scholes* ini dimaksudkan untuk opsi Eropa. Pada penelitian ini model *Black Scholes* dapat diperumum menjadi model *Black Scholes* fraksional dengan menggunakan parameter *Hurst* untuk menentukan harga opsi tipe Eropa. Berdasarkan penelitian Podlubny, turunan berorde fraksional telah berhasil memodelkan dengan baik permasalahan dalam bidang sains seperti teori kontrol dan mekanika fluida [6]. Oleh karena itu pada penelitian ini akan dilakukan penurunan model *Black Scholes* fraksional untuk harga opsi tipe Eropa dan menentukan nilai opsi *call* dan opsi *put* tipe Eropa pada data harga saham harian Microsoft Corporation.

2. Landasan Teori

2.1. *Persamaan Diferensial Stokastik untuk Harga saham*

Persamaan diferensial stokastik diperoleh dengan menggunakan formula Ito atau biasa disebut Lema Ito yang dinyatakan sebagai berikut:

Lema 2.1. *(Lema Ito)*[3] *Misalkan proses X(t) memenuhi persamaan* $dX(t) = u(X(t),t)dt + v(X(t),t)dB(t)$ *dan fungsi* $Y(t) = f(X(t),t)$ *adalah kontinu serta turunan* $f_t(X(t),t)$, $f_x(X(t),t)$, $f_{xx}(X(t),t)$ *kontinu. Maka* $Y(t) = f(X(t),t)$ *memenuhi persamaan*

$$dY(t) = f_t(X(t),t)dt + f_x(X(t),t)dX(t) + \tfrac{1}{2}f_{xx}(X(t),t)(dX(t))^2,$$

dengan

$$f_t = \tfrac{\partial f}{\partial t}, f_X = \tfrac{\partial f}{\partial X},\ f_{XX} = \tfrac{\partial^2 f}{\partial X^2},$$

dan

$$\begin{gathered}(dt^2) = dB(t)dt = dtdB(t) = 0\\ (dB(t))^2 = dt\end{gathered}$$

Bila harga saham pada waktu t yang dinotasikan dengan S(t) dimodelkan dengan gerak Brown, maka perubahan harga saham tersebut ditulis sebagai berikut:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t).$$

Berdasarkan [2], apabila harga saham S(t) mengikuti model saham pada persamaan $dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t)$, maka bentuk persamaan diferensial stokastik untuk $X(t) = F(S(t), t)$ dengan $t \in [0, \infty)$ dapat dinyatakan dalam bentuk

$$dX(t) = \left(\mu S(t)\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right) dt + \sigma S(t)\frac{\partial f}{\partial s} dB(t).$$

Teorema 2.2. [3] *Logaritma harga saham pada saat jatuh tempo membentuk sebaran normal dengan* $\mu = \ln S(0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T$ *dan* $Var(\ln S(t)) = \sigma^2 T$.

2.2. *Model Black Scholes*

Dalam menentukan harga opsi *call* dan opsi *put* tipe Eropa, dapat digunakan model *Black Scholes* yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2.3. [3] *Model Black Scholes untuk opsi call pada opsi saham tipe Eropa dapat dinyatakan sebagai berikut:*

$$C = S(0)N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2),$$

dengan

$$\begin{aligned} d_1 =& \frac{\ln(\frac{S(0)}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}, \\ d_2 =& \frac{\ln(\frac{S(0)}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \end{aligned}$$

Teorema 2.4. [3] *Model Black Scholes untuk opsi put tipe Eropa dapat dinyatakan sebagai berikut:*

$$P = Ke^{-rT}N(-d_2) - S(0)N(-d_1),$$

dengan

$$\begin{aligned} d_1 =& \frac{\ln(\frac{S(0)}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2 =& \frac{\ln(\frac{S(0)}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \end{aligned}$$

3. Model Black Scholes Fraksional

Pada pembahasan ini, dilakukan penurunan model *Black Scholes* fraksional dengan parameter *Hurst* dan mengikuti gerak Brown fraksional. Model *Black Scholes* fraksional dapat ditentukan dengan proses stokastik yang dimulai dengan menentukan model harga sahamnya mengikuti gerak Brown fraksional. Model harga saham yang dipengaruhi oleh μ dan σ dengan masing-masing bergantung pada S dan t dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB_H(t).$$

Apabila harga saham $S(t)$ mengikuti model saham pada persamaan $dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB_H(t)$, maka bentuk persamaan diferensial stokastik untuk $X(t) = f(S(t), t)$ dapat dinyatakan dalam bentuk

$$dX(t) = \left(\mu S(t)\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right) dt + \sigma S(t)\frac{\partial f}{\partial s} dB_H(t).$$

Karena harga saham $S(t)$ mengikuti distribusi lognormal, maka dengan menggunakan Teorema 2.2 logaritma harga saham pada saat jatuh tempo mempunyai sebaran normal dengan $\mu = lnS(0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T^{2H}$ dan $Var = \sigma^2 T^{2H}$.

3.1. *Penurunan Model Black Scholes Fraksional untuk Opsi Tipe Eropa*

Penurunan model *Black Scholes* fraksional untuk opsi *call* dan opsi *put* dilakukan dengan merujuk pada [3] dan [1]. Untuk opsi *call* tipe Eropa, nilai harapan *payoff* dari opsi *call* pada saat jatuh tempo adalah:

$$E[\max(S(t) - K, 0)], \tag{3.1}$$

didefinisikan $g(S(t))$ adalah fungsi kepekatan peluang dari S(t), maka:

$$E[\max(S(t) - K, 0)] = \int_K^\infty (S(t) - K)g(S(t))dS(t). \tag{3.2}$$

Dengan nilai tengah $m = \ln S(0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T^{2H}$ dan standar deviasi $s = \sigma\sqrt{T^{2H}}$. Selanjutnya didefinisikan sebuah peubah

$$Q = \frac{\ln S(t) - m}{s}. \tag{3.3}$$

Substitusikan nilai tengah m dan standar deviasi s ke persamaan (3.3) maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$Q = \frac{1}{\sigma\sqrt{T^{2H}}}(\ln S(t) - \ln S(0)) - \frac{1}{\sigma\sqrt{T^{2H}}}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T^{2H}. \tag{3.4}$$

Peubah Q juga berdistribusi normal dengan nilai tengah 0 dan standar deviasi 1, dan fungsi kepekatan peluang dari Q dinyatakan dengan $h(Q)$, yaitu:

$$h(Q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Q^2}{2}}. \tag{3.5}$$

Persamaan (3.3) dapat dinyatakan sebagai:

$$S(t) = e^{Qs+m}. \tag{3.6}$$

Perubahan batas integral pada persamaan (3.2) berdasarkan Q adalah sebagai berikut:

- ⋄ Jika $S(t) = \infty$ maka $Q = \infty$
- ⋄ Jika $S(t) = K$ maka $Q = \frac{lnK - m}{s}$.

Dengan menggunakan persamaan (3.5) dan (3.6) serta perubahan batas integral, maka persamaan (3.2) menjadi:

$$\begin{aligned} E[max(S(t)-K,0)] &= \int_{\frac{\ln K-m}{s}}^{\infty} (e^{Qs+m}-K)h(Q)dQ \\ &= \int_{\frac{\ln K-m}{s}}^{\infty} e^{Qs+m}h(Q)dQ - K\int_{\frac{\ln K-m}{s}}^{\infty} h(Q)dQ, \end{aligned} \tag{3.7}$$

sedangkan

$$\begin{aligned} e^{Qs+m}h(Q) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-Q^2+2Qs+2m)}{2}} \\ &= e^{\frac{m+s^2}{2}}h(Q-s). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Substitusi persamaan (3.8) ke dalam persamaan (3.7), diperoleh:

$$E[\max(S(t)-K,0)] = e^{\frac{m+s^2}{2}}\int_{\frac{\ln K-m}{s}}^{\infty} h(Q-s)dQ - K\int_{\frac{\ln K-m}{s}}^{\infty} h(Q)dQ. \tag{3.9}$$

Jika $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}y^2}dy$ menyatakan notasi dari fungsi distribusi normal baku kumulatif, maka:

$$E[\max(S(t)-K,0)] = e^{\frac{m+s^2}{2}}\left[N\left(\frac{-\ln K+m}{s}+s\right)\right] - K\left[N\left(\frac{-\ln K+m}{s}\right)\right]. \tag{3.10}$$

Kemudian substitusikan nilai m dan s ke persamaan (3.10), maka diperoleh:

$$\begin{aligned} & e^{\frac{m+s^2}{2}}\int_{\frac{\ln K-m}{s}}^{\infty} h(Q-s)dQ - K\int_{\frac{\ln K-m}{s}}^{\infty} h(Q)dQ \\ &= e^{\frac{m+\sigma^2T^{2H}}{2}}\left[N\left(\frac{ln\frac{S(0)}{K}+r(T^{2H})+\frac{\sigma^2}{2}(T^{2H})}{\sigma\sqrt{T^{2H}}}\right)\right] - \left[KN\left(\frac{\ln\frac{S(0)}{K}+r(T^{2H})-\frac{\sigma^2}{2}(T^{2H})}{\sigma\sqrt{T^{2H}}}\right)\right] \\ &= e^{\frac{m+\sigma^2T^{2H}}{2}}N(d_1) - KN(d_2). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Dari argumentasi penilaian risiko netral, harga opsi *call* tipe Eropa yang dilambangkan dengan C adalah nilai harapan yang di diskon pada suku bunga bebas risiko yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$C = e^{-rT}E[\max(S(t)-K,0)] \tag{3.12}$$

dengan substitusi persamaan (3.10) dan persamaan (3.12) diperoleh model *Black Scholes* fraksional untuk opsi *call* tipe Eropa yaitu:

$$C = S(0)N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2), \tag{3.13}$$

dengan

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S(0)}{K})+r(T^{2H})+\frac{\sigma^2}{2}(T^{2H})}{\sigma\sqrt{T^{2H}}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(\frac{S(0)}{K})+r(T^{2H})-\frac{\sigma^2}{2}(T^{2H})}{\sigma\sqrt{T^{2H}}}$$

Setelah diketahui model *Black Scholes* fraksional untuk opsi *call* tipe Eropa, dapat ditentukan model *Black Scholes* fraksional untuk opsi *put* tipe Eropa dengan menggunakan *put call parity* dan Teorema 2.4 yang dinyatakan sebagai berikut:

$$P = Ke^{-rT}N(-d_2) - S(0)N(-d_1). \tag{3.14}$$

Dari model *Black Scholes* dapat dikonfirmasi secara matematis untuk opsi *call* sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial K} =& \frac{\partial(S(0)N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2))}{\partial K}\\ =& - e^{-rT}N(d_2) \quad < 0,\end{aligned}$$

persamaan $\frac{\partial C}{\partial K} < 0$ dapat dijelaskan bahwa untuk harga pelaksanaan yang berbeda diperoleh harga opsi *call* yang selalu menurun.
Sedangkan untuk opsi *put*:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial K} =& \frac{\partial(Ke^{-rT}N(-d_2) - S(0)N(-d_1))}{\partial K}\\ =& e^{-rT}N(-d_2) \quad > 0,\end{aligned}$$

persamaan $\frac{\partial P}{\partial K} > 0$ dapat dijelaskan bahwa untuk harga pelaksanaan yang berbeda diperoleh harga opsi *put* yang selalu meningkat.

4. Penerapan model *Black Scholes* fraksional

Pada bagian ini akan diterapkan model *Black Scholes* fraksional ke dalam data saham *Microsoft Corporation* pada tanggal 1 Oktober 2018 sampai 30 September 2019 yang diakses langsung dari [7]. Faktor yang mempengaruhi dalam perhitungan model *Black Scholes* fraksional yang pertama adalah nilai volatilitas yang dihitung dengan mencari simpangan baku dan logaritma natural *return* saham [5] yaitu

$$\begin{aligned}\sigma =& \sqrt{n * SR_t}\\ =& \sqrt{252 * 0,00028}\\ =& 0,26995\end{aligned}$$

dengan

$$SR_t = \frac{\sum_{t=1}^{n}(R_t - \overline{R}_t)}{n-1}$$

$$\overline{R}_t = \frac{\sum_{t=1}^{n} R_t}{n}$$

$$R_t = ln\frac{S_t}{S_{t-1}}$$

Suku bunga bebas resiko (r) didapat dari suku bunga sertifikat Bank Indonesia [4] berjangka selama waktu penelitian yang diuji perbulan yaitu dari tanggal 1 Oktober 2018 sampai 30 September 2019 yaitu 0,0585, harga saham awal tanggal 1 Oktober 2018 (S_0):115,61000 dolar, waktu jatuh tempo pada hari terakhir perdagangan yaitu tanggal 30 September 2019 maka $T = \frac{250}{252} = 0.99206$ [3], harga pelaksanaan (K): 126, 127, 128, 129, 130.

Langkah pertama, untuk harga pelaksanaan 126 dolar dengan nilai parameter Hurst (H): $\frac{1}{2}$ diperoleh nilai d_1=0,03022 dan d_2=-0,23866. Selanjutnya dapat dicari nilai N(d_1), N(d_2), N($-d_1$) dan N($-d_2$) dimana itu merupakan fungsi distribusi kumulatif sebaran normal baku. Kemudian dengan menggunakan model *Black Scholes* fraksional dihitung harga opsi *call* dengan harganya yaitu C = 10,96473 dan harga opsi *put* dengan harganya yaitu P = 14,25037. Langkah selanjutnya, dengan cara yang sama diperoleh harga opsi *call* dan opsi *put* untuk harga pelaksanaan yang berbeda dengan H=$\frac{1}{2}$ dapat dilihat pada tabel 1

Tabel 1. Harga Opsi Tipe Eropa Dengan Model *Black Scholes* fraksional dengan H=$\frac{1}{2}$

Harga Opsi Tipe Eropa			
No	Harga Pelaksanaan	Opsi Call	Opsi Put
1	126	10,96473	14,25037
2	127	10,58729	14,81655
3	128	10,22049	15,39337
4	129	9,86415	15,98065
5	130	9,51810	16,57822

Dengan cara yang sama, dapat ditentukan model *Black Scholes* fraksional dengan nilai H=$\frac{3}{4}$ dengan harga pelaksanaan 126, 127, 128, 129 dan 130 dapat dilihat pada tabel 2

Tabel 2. Harga Opsi Tipe Eropa Dengan Model *Black Scholes* fraksional dengan H=$\frac{3}{4}$

Harga Opsi Tipe Eropa			
No	Harga Pelaksanaan	Opsi Call	Opsi Put
1	126	10,97708	14,26272
2	127	10,59965	14,82891
3	128	10,23284	15,40572
4	129	9,87649	15,99298
5	130	9,53042	16,59053

Berdasarkan kedua tabel diatas, didapatkan nilai untuk opsi tipe Eropa menggunakan model *Black Scholes* fraksional dengan parameter H=$\frac{1}{2}$ dan H=$\frac{3}{4}$. Selanjutnya dari segi harga pelaksanaan untuk opsi *call* tipe Eropa dapat dilihat bahwa semakin tinggi harga pelaksanaan untuk opsi *call*, maka semakin rendah nilai opsi call tersebut. Sebaliknya untuk opsi *put* tipe Eropa, semakin tinggi harga pelaksanaan untuk opsi *put*, nilai opsi *put* juga semakin tinggi.

5. Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan diperoleh model *Black Scholes* fraksional dengan opsi *call* dan opsi *put* tipe Eropa adalah sebagai berikut:

$$C = S(0)N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$$
$$P = Ke^{-rT}N(-d_2) - S(0)N(-d_1)$$

dengan

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S(0)}{K}) + r(T^{2H}) + \frac{\sigma^2}{2}(T^{2H})}{\sigma\sqrt{T^{2H}}}$$
$$d_2 = \frac{\ln(\dfrac{S(0)}{K}) + r(T^{2H}) - \dfrac{\sigma^2}{2}(T^{2H})}{\sigma\sqrt{T^{2H}}}$$

Berdasarkan data saham Microsoft Coorporation, dilakukan perhitungan nilai opsi tipe Eropa menggunakan model *Black Scholes* fraksional dengan parameter H=$\frac{1}{2}$, H=$\frac{1}{4}$, dan H=$\frac{3}{4}$ dan harga pelaksanaan yang berbeda-beda. Dari segi harga pelaksanaan yang berbeda-beda, untuk opsi *call* tipe Eropa dapat dilihat bahwa semakin tinggi harga pelaksanaan untuk opsi *call*, maka semakin rendah nilai opsi call tersebut. Sebaliknya untuk opsi *put* tipe Eropa, semakin tinggi harga pelaksanaan untuk opsi *put*, nilai opsi *put* juga semakin tinggi. Hal ini juga sesuai dengan kenyataan bahwa $\frac{\partial C}{\partial K} < 0$ dan $\frac{\partial P}{\partial K} > 0$.

Daftar Pustaka

[1] Devianto, D dan RA, Kiky. 2014. Model Black Scholes dan Rasio Lindung Nilai untuk Opsi Saham Tipe Eropa dengan Pembagian Dividen (Studi Kasus pada Saham Bank of America Corporation). *EKSAKTA*, 2: 9 – 16.

[2] Capinski, M and T. Zastawniak. 2004. *Mathematics for Finance:An Introduction to Financial Engineering*. Springer Undergraduate Mathematics Series. London: Spinger-Verlag.

[3] Hull, J.C. 2003. *Option Future and Other Derivative Eight Edition*. New York: Practice Hall.

[4] Suku Bunga BI. 2019. www.bi.go.id. [Diakses pada 1 Oktober 2019].

[5] Susanti, D dan Devianto, D. 2014. Penurunan Model Black Scholes dengan Persamaan Diferensial Stokastik untuk Opsi Tipe Eropa. *Jurnal Matematika UNAND*, 3: 17 – 26.

[6] Thomas and Henrik. 2011. *A Note On Wick Products And The Fractional Black Scholes Model*. (Departement Of Finance, Stockholm Chools Of Economics).

[7] Yahoo finance. 2018. Closing price Microsoft Corporation. Tersedia: http://www.yahoofinance.com [1 Oktober 2019].

[8] Yuliandi, TM dkk. 2016. Perbandingan Metode Black Scholes dan Simulasi Monte Carlo dalam Penentuan Harga Opsi Tipe Eropa. *Jurnal Matematika UNAND*, 5: 7 - 16.