

GRAF AJAIB TOTAL

RIZA YANI

*Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
echa.humairoh@gmail.com*

Abstract. A *total labeling* of a graph with p vertices and q edges is defined as a one-to-one map taking the vertices and edges onto the integers $1, 2, \dots, p + q$. Such a labeling is *vertex magic* if the sum of the label on a vertex and the labels on its incident edges is a constant independent of the choice of vertex, and *edge magic* if the sum of an edge label and the labels of the endpoints of the edge is constant. In this paper we examine graphs possessing a labeling that is simultaneously vertex magic and edge magic. Such graphs appear to be rare.

Kata Kunci: total magic labeling, vertex magic, edge magic

1. Pendahuluan

Suatu pelabelan dari graf $G = (V, E)$ adalah suatu pemetaan bijektif dari $V \cup E$ ke subhimpunan bilangan asli. Apabila daerah asal dari pemetaan hanya himpunan titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik. Apabila daerah asalnya hanya himpunan sisi, maka pelabelan disebut pelabelan sisi. Apabila daerah asal merupakan gabungan dari himpunan titik dan sisi, maka pelabelan disebut pelabelan total.

Sebuah pelabelan total sisi ajaib pada graf $G = (V, E)$ adalah pemetaan satu-satu λ dari $V(G) \cup E(G)$ pada $\{1, 2, \dots, p + q\}$, dengan p adalah banyaknya titik di G dan q adalah banyaknya sisi di G , sedemikian sehingga untuk setiap sisi xy di G berlaku $\lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y) = k$, untuk suatu bilangan bulat k positif.

Sebuah pelabelan total titik ajaib pada graf G adalah pemetaan satu-satu λ dari $V(G) \cup E(G)$ pada $\{1, 2, \dots, p + q\}$ sedemikian sehingga untuk setiap titik x di G berlaku $\lambda(x) + \sum_{xy \in E} \lambda(xy) = h$, untuk suatu bilangan bulat h positif.

Dalam banyak kasus, menarik untuk membahas tentang jumlah semua label yang berhubungan dengan sebuah pelabelan graf. Misal λ adalah pelabelan total dari graf G . Maka bobot titik x dan sisi xy untuk pelabelan total λ adalah :

$$\begin{aligned}\omega t(x) &= \lambda(x) + \sum_{xy \in E} \lambda(xy), \\ \omega t(xy) &= \lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y).\end{aligned}$$

Misalkan λ adalah suatu pelabelan titik ajaib total, maka jumlah semua bobot

titiknya adalah:

$$\begin{aligned}
 hp &= \sum_{x \in V} \lambda(x) + 2 \sum_{y \in E} \lambda(y) \\
 &= 1 + 2 + \cdots + (p + q) + \sum_{y \in E} \lambda(y) \\
 &= \frac{1}{2}(p + q)(p + q + 1) + \sum_{y \in E} \lambda(y). \tag{1.1}
 \end{aligned}$$

Hal yang sama, jika μ adalah sebuah pelabelan sisi ajaib total, maka jumlah semua bobot sisinya adalah:

$$\begin{aligned}
 kq &= \sum_{x \in V} d(x)\mu(x) + \sum_{y \in E} \mu(y) \\
 &= \frac{1}{2}(p + q)(p + q + 1) + \sum_{x \in V} (d_x - 1)\mu(x), \tag{1.2}
 \end{aligned}$$

di mana d_x adalah derajat dari x .

Persamaan (1.1) dapat digunakan untuk mencari batas atas dan bawah untuk h .

$$1 + 2 + \cdots + q \leq \sum_{y \in E} \lambda(y) \leq (p + 1) + (p + 2) + \cdots + (p + q) \tag{1.3}$$

Pendekatan yang sama, persamaan (1.2) dapat digunakan untuk mencari batas atas dan bawah dari k .

$$1 + 2 + \cdots + p \leq \sum_{x \in V} (d_x - 1)\mu(x) \leq (q + 1) + (q + 2) + \cdots + (q + p) \tag{1.4}$$

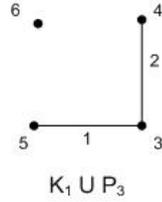
2. Graf Ajaib Total

Lema 2.1. *Tidak ada graf ajaib yang mempunyai dua titik terisolasi atau sebuah sisi terisolasi.*

Bukti. Misalkan G adalah graf ajaib total, dengan konstanta titik ajaib h dan konstanta sisi ajaib k . Misalkan x dan y adalah dua titik terisolasi di G . Misalkan λ adalah pelabelan ajaib total pada G . Karena x dan y adalah dua titik terisolasi, maka haruslah $h = \lambda(x) = \lambda(y)$, hal yang tidak mungkin terjadi pada suatu pelabelan.

Selanjutnya, misalkan terdapat sisi terisolasi uv pada graf ajaib total H . Misalkan f adalah pelabelan ajaib total pada H dengan konstanta titik ajaib h' dan konstanta sisi ajaib k' . Karena $h' = f(u) + f(uv) = f(v) = f(uv)$, maka haruslah $f(u) = f(v)$, hal yang juga tidak mungkin terjadi pada suatu pelabelan. \square

Lema 2.2. *Jika sebuah graf dengan satu titik terisolasi adalah total ajaib, maka graf G yang berasal dari penghapusan titik terisolasi mempunyai pelabelan ajaib dengan konstanta titik ajaib $|V(G)| + |E(G)| + 1 = p + q + 1$.*

Gambar 2.1. Pelabelan ajaib total pada $K_1 \cup P_3$.

Pada Gambar 2.1 diberikan pelabelan terhadap $K_1 \cup P_3$ yang merupakan ilustrasi dari Lema 2.2.

Dari gambar di atas, $|V(G)| + |E(G)| + 1 = 3 + 2 + 1 = 6$, sehingga konstanta dari graf $K_1 \cup P_3$ adalah 6.

Teorema 2.3. *Misalkan graf ajaib total G mempunyai daun x , maka komponen dari G yang memuat x adalah graf bintang.*

Bukti. Misalkan λ adalah pelabelan total ajaib pada graf G dengan konstanta titik h dan konstanta sisi k , akan ditunjukkan komponen dari G yang memuat x adalah graf bintang.

Misalkan x adalah sebuah daun dengan tetangga y . Karena G adalah ajaib total, maka

$$\lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y) = k. \quad (2.1)$$

$$\lambda(x) + \lambda(xy) = h. \quad (2.2)$$

Diperoleh

$$\begin{aligned} h + \lambda(y) &= k \\ \lambda(y) &= k - h. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Dari Lema 2.1, y mempunyai sebuah tetangga, misalkan z , maka dari persamaan 2.3 diperoleh label sisi yz , $\lambda(yz)$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \lambda(y) + \lambda(yz) + \lambda(z) &= k, \\ k - h + \lambda(yz) + \lambda(z) &= k, \\ \lambda(yz) &= h - \lambda(z), \end{aligned}$$

sehingga diperoleh batas bawah untuk bobot titik z , $\omega(z)$ adalah:

$$\omega(z) \geq \lambda(z) + \lambda(yz) = h.$$

Nilai $\omega(z) = \lambda(z) + \lambda(yz)$ hanya apabila z mempunyai derajat 1.

Selanjutnya, andaikan z mempunyai tetangga, misalkan t . Maka bobot sisi zt dan bobot titik z adalah

$$\begin{aligned} \lambda(z) + \lambda(zt) + \lambda(t) &= k, \\ \lambda(z) + \lambda(zt) + \lambda(yz) &= h. \end{aligned}$$

Diperoleh,

$$\begin{aligned}\lambda(z) + \lambda(z_t) + h - \lambda(z) &= h, \\ \lambda(z_t) + h &= h, \\ \lambda(z_t) &= 0.\end{aligned}$$

Hal ini tidak mungkin karena pelabelan graf merupakan suatu pemetaan satu-satu yang memetakan himpunan dari elemen-elemen graf ke himpunan bilangan bulat positif. Maka dapat dibuktikan bahwa setiap titik yang bertetangga dengan y mempunyai derajat 1, dan komponen G yang memuat y adalah sebuah bintang dengan pusat y . \square

Akibat 2.4. *Graf ajaib total terhubung yang memuat satu titik berderajat satu hanyalah P_3 .*

Setiap graf pohon non-trivial mempunyai paling sedikit dua titik yang berderajat 1, maka graf pohon ajaib yang mungkin hanyalah K_1 dan bintang. Karena pada [4] telah dibuktikan bahwa $K_{m,n}$ tidak mempunyai pelabelan titik ajaib apabila $|m-n| > 1$, maka tidak ada graf bintang yang lebih besar dari $K_{1,2}$ yang merupakan graf titik ajaib.

Akibat 2.5. *Graf pohon yang merupakan ajaib total hanya K_1 dan P_3 .*

Sebuah graf ajaib total tidak bisa mempunyai dua bintang sebagai komponen, karena masing-masing titik pusat dari graf bintang tersebut harus menerima label $k-h$. Hal ini menunjukkan bahwa komponen dari graf ajaib total dapat memuat paling banyak satu K_1 dan paling banyak satu bintang, dan semua komponen yang lain mempunyai derajat minimum paling sedikit 2, dan akibatnya graf tersebut mempunyai banyak sisi sama dengan banyak titik.

Akibat 2.6. *Graf hutan yang bersifat ajaib total hanyalah $K_1 \cup P_3$.*

Teorema 2.7. *Graf ajaib total dengan komponen K_1 hanya $K_1 \cup P_3$ dan K_1 itu sendiri.*

Bukti. Misalkan $K_1 \cup G$ adalah graf ajaib total. K_1 mempunyai titik x , dan G mempunyai banyak titik p dan banyak sisi q . G boleh mempunyai sebuah bintang sebagai komponen, tapi komponen lain memiliki derajat minimal paling tidak 2, maka $q \geq p-1$. Dari Lema 2.2, diperoleh bahwa $h = \lambda(x) = p + q + 1$.

G adalah ajaib total dengan konstanta titik h , dari persamaan 2.2:

$$\begin{aligned} hp &= \frac{1}{2}(p+q)(p+q+1) + \sum_{y \in E} \lambda(y), \\ (p+q+1)p &= \frac{1}{2}(p+q)(p+q+1) + \sum_{y \in E} \lambda(y), \\ 2(p+q+1)p &= (p+q)(p+q+1) + 2 \sum_{y \in E} \lambda(y), \\ 2p(p+q+1) - [(p+q)(p+q+1)] &= 2 \sum_{y \in E} \lambda(y), \\ (p+q+1)[2p - (p+q)] &= 2 \sum_{y \in E} \lambda(y), \\ (p+q+1)(p-q) &= 2 \sum_{y \in E} \lambda(y), \end{aligned}$$

maka,

$$\sum_{y \in E} \lambda(y) = \frac{1}{2}(p+q+1)(p-q).$$

Berdasarkan persamaan (1.3),

$$\sum \lambda(y) \geq \frac{1}{2}q(q+1)$$

maka,

$$\begin{aligned} q(q+1) &\leq (p+q+1)(p-q), \\ 2q(q+1) &\leq p(p+1). \end{aligned}$$

Jelas bahwa

$$q < p,$$

sehingga,

$$q = p - 1,$$

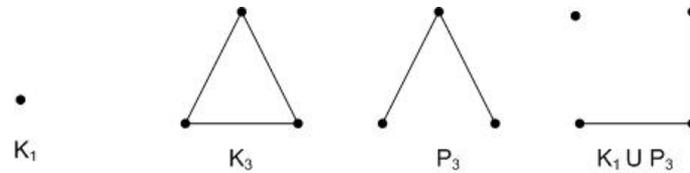
dan,

$$\begin{aligned} 2(p^2 - p) &= p^2 + p, \\ p &= 3. \end{aligned}$$

Graf G dengan $p = 3$ dan $q = p - 1 = 3 - 1 = 2$ hanyalah P_3 . Dapat disimpulkan bahwa graf ajaib total dengan komponen K_1 hanya $K_1 \cup P_3$ dan K_1 itu sendiri. \square

3. Contoh-contoh Graf Ajaib Total

Di bawah ini adalah tiga contoh graf terhubung yang berukuran kecil yang merupakan graf ajaib total.



Gambar 3.1. Contoh Graf Total Ajaib

Contoh graf ajaib total yang jelas adalah graf yang terdiri dari satu titik saja, K_1 . Terdapat empat kemungkinan pelabelan total ajaib dari segitiga K_3 . Jika himpunan dari pelabelan titik dinotasikan dengan S_v , maka pelabelannya adalah:

$$h = 9, k = 12, S_v = \{4, 5, 6\},$$

$$h = 10, k = 11, S_v = \{2, 4, 6\},$$

$$h = 11, k = 10, S_v = \{1, 3, 5\},$$

$$h = 12, k = 9, S_v = \{1, 2, 3\}.$$

Lintasan P_3 mempunyai dua kemungkinan pelabelan.

$$h = 6, k = 9, \text{Label} = 4, 2, 3, 1, 5,$$

$$h = 7, k = 8, \text{Label} = 3, 4, 1, 2, 5.$$

Graf $K_1 \cup P_3$ hanya mempunyai satu kemungkinan pelabelan ajaib total, di mana P_3 dilabeli dengan $h = 6$, sehingga titik terisolasi dilabeli dengan 6.

4. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Lyra Yulianti, Bapak Budi Rudianto, Bapak Narwen, Bapak Admi Nazra, dan Bapak Zulakmal yang telah memberikan masukan dan saran, sehingga tulisan ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Baca, M. dan Miler, M. 2008. *Super Edge Antimagic Graph*. Brown Walker Press, Bocca Raton-Florida
- [2] Baskoro, E.T., Miller, M., Slamun and Wallis, W.D., *Edge-Magic Total Labellings*, Austral. J. Combin. **22** (2000), 177-190.
- [3] Exoo G., Ling, C.C.H., McSorley, J.P., Phillips, N.C.K, Wallis, W.D., *Totally Magic Graphs*, Discrete Mathematics. **254** (2002) : 103-113.
- [4] Gallian, J.A., *A dynamic survey of graph labeling*, The Electronic Journal of Combinatorics (2011), #DS6.
- [5] MacDougall, J., Miller, M., Slamun and Wallis, W.D. *Vertex-magic total labellings*. Utilitas Math, to appear
- [6] West, D.B. 2001. *Introduction to Graph Theory*. Prentice-Hall, United States of America