DIMENSI METRIK DARI GRAF *BUCKMINSTERFULLERENE*

ADEK HAYATI PUTRI, LYRA YULIANTI, DES WELYYANTI

*Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : adkhaput10@gmail.com*

Diterima 29 November 2019 Direvisi 3 Desember 2019 Dipublikasikan 28 Desember 2019

Abstrak. Penelitian ini bertujuan menentukan dimensi metrik dari salah satu graf *Fullerene* yaitu graf *Buckminsterfullerene* yang memiliki 60 titik. Satu-satunya graf dengan dimensi metrik satu adalah graf lintasan P_n dengan $n \geq 2$ sehingga tidak mungkin graf *Buckminsterfullerene* memiliki dimensi metrik satu. Dari hasil penelitian ini diperoleh bahwa dimensi metrik dari graf *Buckminsterfullerene* adalah tiga.

Kata Kunci: Dimensi metrik, himpunan pemisah, graf *Fullerene*, graf *Buckminsterfullerene*

1. Pendahuluan

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada abad ke-18. Salah satu kajian dalam teori graf adalah dimensi metrik yang pertama kali diperkenalkan oleh F. Harary dan R. A. Miltner pada tahun 1976. Akhter dkk. [1] menunjukkan bahwa dimensi metrik dari graf $(3,6)$ -*Fullerene* dan $(4,6)$ -*Fullerene* adalah tiga. Pada [1]. diberikan masalah terbuka yang berkaitan dengan graf $(5,6)$ -*Fullerene* yang memuat graf C_5 dan C_6 . Salah satu bentuk sederhana dari graf $(5,6)$ -*Fullerene* adalah graf *Buckminsterfullerene*. Penelitian ini bertujuan menentukan dimensi metrik dari salah satu graf *Fullerene* yaitu graf *Buckminsterfullerene* yang memiliki 60 titik.

2. Landasan Teori

2.1. Definisi dan Terminologi Teori Graf

Graf G adalah pasangan himpunan $(V(G), E(G))$ dinotasikan $G = (V, E)$, dengan $V(G)$ adalah suatu himpunan berhingga titik (*vertex*) yang tak kosong, kardinalitas dari $V(G)$ yang dinotasikan dengan $|V(G)|$ disebut orde dan $E(G)$ adalah himpunan sisi (*edge*) yang menghubungkan dua titik pada graf G tersebut, kardinalitas dari $E(G)$ yang dinotasikan dengan $|E(G)|$ disebut ukuran. Jalan (*walk*) dari titik v_0 ke titik v_n di G adalah barisan berhingga dari titik-titik dan sisi-sisi di G dapat

ditulis $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n$ sedemikian sehingga $v_{i-1} \in E(G)$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Jika titik-titik dan sisi-sisi dari jalan yang dilewati berbeda maka dikatakan lintasan (*path*). Banyaknya sisi yang terdapat pada suatu lintasan disebut panjang lintasan. Jarak adalah panjang lintasan terpendek dari titik u ke v , dinotasikan $d(u, v)$.

Diameter suatu graf terhubung G adalah maksimum jarak antara titik-titik di G , dimana graf terhubung adalah graf yang setiap pasang titik pada $u, v \in V(G)$ terdapat suatu lintasan yang menghubungkan u dan v . Graf regular adalah graf yang setiap titiknya berderajat sama, dimana derajat suatu titik di G adalah banyaknya sisi yang terkait dengan v , dinotasikan dengan $\deg(v)$. Graf planar adalah graf yang dapat digambarkan pada bidang datar dengan sisi tidak saling memotong (bersilangan).

2.2. Graf Fullerene

Fullerene adalah molekul polihedral yang seluruhnya terbuat dari atom karbon. Molekul polihedral adalah kumpulan dari beberapa atom yang ada didalam susunan tertentu yang diperlukan oleh gaya kimia atau ikatan kimia. *Fullerene* dapat direpresentasikan dengan atom sebagai titik dan ikatan antar atom sebagai sisi [2]. (Lihat Gambar 1).

Gambar 1. Contoh Fullerene

Dari Gambar 1 dapat dilihat jika *Fullerene* tersebut dikonstruksi dalam bidang datar maka akan menghasilkan Graf *Fullerene* yang memuat graf C_5 atau C_6 . **Graf *Fullerene*** adalah graf yang setiap titiknya berderajat tiga dan memiliki sisi yang tidak saling memotong. Jika graf *Fullerene* mempunyai titik $n = 20$ maka graf tersebut dinamakan **graf Dodecahedral** dan jika graf *Fullerene* mempunyai titik $n = 60$ maka graf tersebut dinamakan **graf Buckminsterfullerene** [2]. (Lihat Gambar 2)

2.3. Graf Buckminsterfullerene

Graf *Buckminsterfullerene* diperoleh dari beberapa graf *cycle* dengan cara sebagai berikut. Graf C_5 berada pada bagian terluar dan bagian dalam, dinotasikan dengan C_5 dan C_5^* . Graf C_5 dan C_5^* dihubungkan oleh sisi pada masing masing titiknya,

 Gambar 2. (a) Graf Dodecahedral, (b) Graf *Buckminsterfullerene*

setiap sisi pada graf C_5^* diberi penambahan dua titik, masing-masing titik pada graf C_5^* dihubungkan oleh sisi, dimana pada setiap sudutnya membentuk C_5 yang baru dan diantara C_5 tersebut membentuk C_6 yang baru. Hubungkan setiap titik pada C_5^* dengan sisi sehingga membentuk graf *Buckminsterfullerene*. (Lihat Gambar 3).

 Gambar 3. Tahapan Membentuk Graf *Buckminsterfullerene*

Dari Gambar 3 diperoleh graf C_5 dan C_6 seminimal mungkin dengan titik sebanyak 60 [2]. Berdasarkan Gambar 2.3.2 dapat dilihat bahwa Graf *Buckminsterfullerene* berasal dari $C_5 \cup C_{15} \cup C_{20} \cup C_{15}^* \cup C_5^*$ dengan penambahan beberapa sisi

sebagai berikut:

$$V(G) = \{v_i \mid 1 \leq i \leq 5\} \cup \{w_j \mid 1 \leq j \leq 15\} \cup \{x_k \mid 1 \leq k \leq 20\} \\ \cup \{y_j \mid 1 \leq j \leq 15\} \cup \{z_i \mid 1 \leq i \leq 5\}.$$

$$E(G) = \{v_l v_{l+1} \mid 1 \leq l \leq 4\} \cup \{v_1 v_5\} \cup \{w_m w_{m+1} \mid 1 \leq m \leq 14\} \cup \{w_1 w_{15}\} \\ \cup \{x_n x_{n+1} \mid 1 \leq n \leq 19\} \cup \{x_1 x_{20}\} \cup \{y_m y_{m+1} \mid 1 \leq m \leq 14\} \cup \{y_1 y_{15}\} \\ \cup \{z_l v_{l+1} \mid 1 \leq l \leq 4\} \cup \{z_1 z_5\} \cup \{w_1 v_1, w_4 v_5, w_7 v_4, w_{10} v_3, w_{13} v_2, \\ x_1 w_{15}, x_2 w_2, x_5 w_3, x_6 w_5, x_9 w_6, x_{10} w_8, x_{13} w_9, x_{14} w_{11}, x_{17} w_{12}, x_{18} w_{14}, \\ y_1 x_{20}, y_2 x_3, y_4 x_4, y_5 x_7, y_7 x_8, y_8 x_{11}, y_{10} x_{12}, y_{11} x_{15}, y_{13} x_{16}, y_{14} x_{19}, \\ z_1 y_{15}, z_2 y_3, z_3 y_6, z_4 y_9, z_5 y_{12}\}.$$

Gambar 4. Graf *Buckminsterfullerene*

2.4. Dimensi Metrik pada Graf

Misalkan G adalah graf terhubung yang berordo n dengan u dan v adalah titik-titik dalam G maka jarak antara u dan v , dinotasikan $d(u, v)$, adalah panjang lintasan terpendek antara kedua titik tersebut di G . Misalkan terdapat himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\} \subset V(G)$, dengan $V(G)$ adalah himpunan titik yang tak kosong maka **representasi titik** v terhadap W , dinotasikan $r(v|W)$, didefinisikan sebagai k -vektor

$$r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k)).$$

Jika untuk setiap dua titik u dan v di G berlaku bahwa $r(u|W) \neq r(v|W)$, maka W dinamakan **himpunan pemisah** untuk G . Himpunan pemisah dengan kardinalitas minimum dinamakan **himpunan pemisah minimum**, dan kardinalitas dari

himpunan pemisah minimum dinamakan **dimensi metrik** (*metric dimension*) dari G , dinotasikan $\dim(G)$ [3]. Teorema 2.1 berikut menjelaskan bahwa satu-satunya graf dengan dimensi metrik 1 adalah graf lintasan P_n dengan $n \geq 2$.

Teorema 2.1. [3] Misalkan G adalah graf terhubung dengan banyak titik n . Maka $\dim(G) = 1$ jika dan hanya jika $G = P_n$ dengan $n \geq 2$.

3. Dimensi Metrik dari Graf Buckminsterfullerene

Pada bab ini akan dibahas mengenai dimensi metrik dari graf *Buckminsterfullerene* dengan 60 titik. Dari Teorema 2.1 dapat dilihat bahwa satu-satunya graf dengan dimensi metrik 1 adalah graf lintasan P_n dengan $n \geq 2$, sehingga tidak mungkin graf *Buckminsterfullerene* memiliki dimensi metrik 1.

Teorema 3.1. Jika G adalah graf *Buckminsterfullerene* yang memiliki 60 titik maka $\dim(G) = 3$.

Bukti. Untuk membuktikan bahwa $\dim(G) = 3$ maka akan ditunjukkan bahwa $\dim(G) \leq 3$ dan $\dim(G) \geq 3$.

- (1) Untuk menunjukkan $\dim(G) \leq 3$, ambil tiga titik pada graf G , yaitu $W = \{v_1, v_2, x_{10}\}$, seperti yang dapat dilihat pada Gambar 5.

Gambar 5. Graf G dengan $W = \{v_1, v_2, x_{10}\}$

Notasikan $r(v|W) = (d(v, v_1), d(v, v_2), d(v, x_{10})), \forall v \in V(G)$. Maka di-

peroleh representasi semua titik pada graf G terhadap W adalah :

$$\begin{aligned}
r(v_1|W) &= (0, 1, 5), & r(w_2|W) &= (2, 3, 6), \\
r(v_2|W) &= (1, 0, 5), & r(w_3|W) &= (3, 4, 5), \\
r(v_3|W) &= (2, 1, 4), & r(w_4|W) &= (2, 3, 4), \\
r(v_4|W) &= (2, 2, 3), & r(w_5|W) &= (3, 4, 3), \\
r(v_5|W) &= (1, 2, 4), & r(w_6|W) &= (4, 4, 2), \\
r(w_1|W) &= (1, 2, 6), & r(w_7|W) &= (3, 3, 2), \\
\\
r(w_8|W) &= (4, 4, 1), & r(w_{14}|W) &= (3, 2, 7), \\
r(w_9|W) &= (4, 3, 2), & r(w_{15}|W) &= (2, 3, 7), \\
r(w_{10}|W) &= (3, 2, 3), & r(x_1|W) &= (3, 4, 8), \\
r(w_{11}|W) &= (4, 3, 4), & r(x_2|W) &= (3, 4, 7), \\
r(w_{12}|W) &= (3, 2, 5), & r(x_3|W) &= (4, 5, 7), \\
r(w_{13}|W) &= (2, 1, 6), & r(x_4|W) &= (5, 6, 6), \\
r(x_5|W) &= (4, 5, 5), & r(x_{11}|W) &= (6, 6, 1), \\
r(x_6|W) &= (4, 5, 4), & r(x_{12}|W) &= (6, 5, 2), \\
r(x_7|W) &= (5, 6, 3), & r(x_{13}|W) &= (5, 4, 3), \\
r(x_8|W) &= (6, 6, 2), & r(x_{14}|W) &= (5, 4, 4), \\
r(x_9|W) &= (5, 5, 1), & r(x_{15}|W) &= (6, 5, 5), \\
r(x_{10}|W) &= (5, 5, 0), & r(x_{16}|W) &= (5, 4, 6), \\
r(x_{17}|W) &= (4, 3, 6), & r(y_3|W) &= (6, 7, 6), \\
r(x_{18}|W) &= (4, 3, 7), & r(y_4|W) &= (6, 7, 5), \\
r(x_{19}|W) &= (5, 4, 8), & r(y_5|W) &= (6, 7, 4), \\
r(x_{20}|W) &= (4, 5, 9), & r(y_6|W) &= (7, 8, 4), \\
r(y_1|W) &= (5, 6, 8), & r(y_7|W) &= (7, 7, 3), \\
r(y_2|W) &= (5, 6, 7), & r(y_8|W) &= (7, 7, 2), \\
r(y_9|W) &= (8, 7, 3), & r(y_{15}|W) &= (6, 6, 7), \\
r(y_{10}|W) &= (7, 6, 3), & r(z_1|W) &= (7, 7, 6), \\
r(y_{11}|W) &= (7, 6, 4), & r(z_2|W) &= (7, 8, 6), \\
r(y_{12}|W) &= (7, 6, 5), & r(z_3|W) &= (8, 9, 5), \\
r(y_{13}|W) &= (6, 5, 6), & r(z_4|W) &= (9, 8, 4), \\
r(y_{14}|W) &= (6, 5, 7), & r(z_5|W) &= (8, 7, 5).
\end{aligned}$$

Karena setiap titik pada G memiliki representasi yang berbeda, maka W adalah himpunan pemisah, sehingga diperoleh batas atas dari graf G adalah 3, maka dengan demikian

$$\dim(G) \leq 3. \quad (3.1)$$

- (2) Akan ditunjukkan $\dim(G) \geq 3$ yaitu dengan menunjukkan bahwa untuk sebarang kemungkinan W dengan $|W| = 2$, akan selalu terdapat minimal dua titik dengan representasi yang sama. Salah satu contoh himpunan W tersebut dapat dilihat pada Gambar 6. Berikut adalah beberapa kasus yang mungkin terjadi:

Kasus 1. Ambil dua titik sebarang di C_5 . Misalkan $W = \{v_i, v_j\}$.

- (a) $\{v_i, v_j\}$ dengan $j = (i + 1) \bmod 5$, untuk $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Misalkan $W_1 = \{v_1, v_2\}$, sehingga diperoleh:

Gambar 6. Graf G dengan $W_1 = \{v_1, v_2\}$

$$r(v_5|W_1) = (1, 2), \quad r(w_1|W_1) = (1, 2).$$

Karena terdapat dua titik yang memiliki representasi yang sama pada graf G tersebut yaitu titik v_5 dan titik w_1 , maka W_1 bukan himpunan pemisah. Pengambilan $W_1 = \{v_1, v_2\}$ akan serupa pembuktiannya jika diambil himpunan $\{v_2, v_3\}$, $\{v_3, v_4\}$, $\{v_4, v_5\}$, atau $\{v_5, v_1\}$ maka akan terdapat dua titik di G yang memiliki representasi yang sama sehingga W_1 bukan himpunan pemisah.

- (b) $\{v_i, v_j\}$ dengan $j = (i + 2) \bmod 5$, untuk $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Misalkan $W_2 = \{v_1, v_3\}$, diperoleh:

$$r(w_3|W_2) = (3, 4), \quad r(w_5|W_2) = (3, 4),$$

sehingga W_2 bukan himpunan pemisah. Kasus yang serupa terjadi untuk himpunan $\{v_2, v_4\}$, $\{v_3, v_5\}$, $\{v_4, v_1\}$, atau $\{v_5, v_2\}$.

Pembuktian dari Kasus 2 sampai dengan Kasus 15 serupa dengan Kasus 1. Hal yang membedakan adalah pengambilan dua titik yang ingin diuji representasinya, yaitu:

Kasus 2. Ambil dua titik sebarang di C_{15} . Misalkan $W = \{w_i, w_j\}$.

- (a) $\{w_i, w_j\}$ dengan $j = (i + 1) \bmod 15$, untuk $i \in \{1, 4, 7, 10, 13\}$.
- (b) $\{w_i, w_j\}$ dengan $j = (i + 2) \bmod 15$, untuk $i \in \{1, 4, 7, 10, 13\}$.
- (c) $\{w_i, w_j\}$ dengan $j = (i + 3) \bmod 15$, untuk $i \in \{1, 4, 7, 10, 13\}$.
- (d) $\{w_i, w_j\}$ dengan $j = (i + 4) \bmod 15$, untuk $i \in \{1, 4, 7, 10, 13\}$.
- (e) $\{w_i, w_j\}$ dengan $j = (i + 5) \bmod 15$, untuk $i \in \{1, 4, 7, 10, 13\}$.
- (f) $\{w_i, w_j\}$ dengan $j = (i + 6) \bmod 15$, untuk $i \in \{1, 4, 7, 10, 13\}$.
- (g) $\{w_i, w_j\}$ dengan $j = (i + 7) \bmod 15$, untuk $i \in \{1, 4, 7, 10, 13\}$.

Kasus 3. Ambil dua titik sebarang di C_{20} .

- (a) Misalkan $W = \{x_i, x_j\}$ untuk $i \in \{1, 5, 9, 13, 17\}$.
 - i. $\{x_i, x_j\}$ dengan $j = (i + 1) \bmod 20$.
 - ii. $\{x_i, x_j\}$ dengan $j = (i + 2) \bmod 20$.
 - iii. $\{x_i, x_j\}$ dengan $j = (i + 3) \bmod 20$.
 - iv. $\{x_i, x_j\}$ dengan $j = (i + 4) \bmod 20$.
 - v. $\{x_i, x_j\}$ dengan $j = (i + 5) \bmod 20$.
 - vi. $\{x_i, x_j\}$ dengan $j = (i + 6) \bmod 20$.
 - vii. $\{x_i, x_j\}$ dengan $j = (i + 7) \bmod 20$.
 - viii. $\{x_i, x_j\}$ dengan $j = (i + 8) \bmod 20$.
 - ix. $\{x_i, x_j\}$ dengan $j = (i + 9) \bmod 20$.
 - x. $\{x_i, x_j\}$ dengan $j = (i + 10) \bmod 20$.
- (b) Misalkan $W = \{x_i, x_k\}$ untuk $i \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$.
 - i. $\{x_i, x_k\}$ dengan $k = (i + 1) \bmod 20$.
 - ii. $\{x_i, x_k\}$ dengan $k = (i + 2) \bmod 20$.
 - iii. $\{x_i, x_k\}$ dengan $k = (i + 3) \bmod 20$.
 - iv. $\{x_i, x_k\}$ dengan $k = (i + 4) \bmod 20$.
 - v. $\{x_i, x_k\}$ dengan $k = (i + 5) \bmod 20$.
 - vi. $\{x_i, x_k\}$ dengan $k = (i + 6) \bmod 20$.
 - vii. $\{x_i, x_k\}$ dengan $k = (i + 7) \bmod 20$.
 - viii. $\{x_i, x_k\}$ dengan $k = (i + 8) \bmod 20$.
 - ix. $\{x_i, x_k\}$ dengan $k = (i + 9) \bmod 20$.
 - x. $\{x_i, x_k\}$ dengan $k = (i + 10) \bmod 20$.
- (c) Misalkan $W = \{x_i, x_l\}$ untuk $i \in \{3, 7, 11, 15, 19\}$.
 - i. $\{x_i, x_l\}$ dengan $l = (i + 1) \bmod 20$.
 - ii. $\{x_i, x_l\}$ dengan $l = (i + 2) \bmod 20$.
 - iii. $\{x_i, x_l\}$ dengan $l = (i + 3) \bmod 20$.
 - iv. $\{x_i, x_l\}$ dengan $l = (i + 4) \bmod 20$.
 - v. $\{x_i, x_l\}$ dengan $l = (i + 5) \bmod 20$.
 - vi. $\{x_i, x_l\}$ dengan $l = (i + 6) \bmod 20$.
 - vii. $\{x_i, x_l\}$ dengan $l = (i + 7) \bmod 20$.
 - viii. $\{x_i, x_l\}$ dengan $l = (i + 8) \bmod 20$.
 - ix. $\{x_i, x_l\}$ dengan $l = (i + 9) \bmod 20$.
 - x. $\{x_i, x_l\}$ dengan $l = (i + 10) \bmod 20$.

Kasus 4. Ambil dua titik sebarang di C_{15}^* .

- (a) Misalkan $W = \{y_i, y_j\}$, untuk $i = 1, 4, 7, 10, 13$.

- i. $\{y_i, y_j\}$ dengan $j = (i + 1) \bmod 15$.
 - ii. $\{y_i, y_j\}$ dengan $j = (i + 2) \bmod 15$.
 - iii. $\{y_i, y_j\}$ dengan $j = (i + 3) \bmod 15$.
 - iv. $\{y_i, y_j\}$ dengan $j = (i + 4) \bmod 15$.
 - v. $\{y_i, y_j\}$ dengan $j = (i + 5) \bmod 15$.
 - vi. $\{y_i, y_j\}$ dengan $j = (i + 6) \bmod 15$.
 - vii. $\{y_i, y_j\}$ dengan $j = (i + 7) \bmod 15$.
- (b) Misalkan $W = \{y_i, y_k\}$, untuk $i \in \{2, 5, 8, 11, 14\}$.
- i. $\{y_i, y_k\}$ dengan $k = (i + 1) \bmod 15$.
 - ii. $\{y_i, y_k\}$ dengan $k = (i + 2) \bmod 15$.
 - iii. $\{y_i, y_k\}$ dengan $k = (i + 3) \bmod 15$.
 - iv. $\{y_i, y_k\}$ dengan $k = (i + 4) \bmod 15$.
 - v. $\{y_i, y_k\}$ dengan $k = (i + 5) \bmod 15$.
 - vi. $\{y_i, y_k\}$ dengan $k = (i + 6) \bmod 15$.
 - vii. $\{y_i, y_k\}$ dengan $k = (i + 7) \bmod 15$.
- (c) Misalkan $W = \{y_i, y_l\}$, untuk $i \in \{3, 6, 9, 12, 15\}$.
- i. $\{y_i, y_l\}$ dengan $l = (i + 1) \bmod 15$.
 - ii. $\{y_i, y_l\}$ dengan $l = (i + 2) \bmod 15$.
 - iii. $\{y_i, y_l\}$ dengan $l = (i + 3) \bmod 15$.
 - iv. $\{y_i, y_l\}$ dengan $l = (i + 4) \bmod 15$.
 - v. $\{y_i, y_l\}$ dengan $l = (i + 5) \bmod 15$.
 - vi. $\{y_i, y_l\}$ dengan $l = (i + 6) \bmod 15$.
 - vii. $\{y_i, y_l\}$ dengan $l = (i + 7) \bmod 15$.

Kasus 5. Ambil dua titik sebarang di C_5^* . Misalkan $W = \{z_i, z_j\}$.

- (a) $\{z_i, z_j\}$ dengan $j = (i + 1) \bmod 5$, untuk $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- (b) $\{z_i, z_j\}$ dengan $j = i + 2 \bmod 5$, untuk $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Kasus 6. Ambil satu titik sebarang di C_5 dan satu titik sebarang di C_{15} .

Kasus 7. Ambil satu titik sebarang di C_5 dan satu titik sebarang di C_{20} .

Kasus 8. Ambil satu titik sebarang di C_5 dan satu titik sebarang di C_{15}^* .

Kasus 9. Ambil satu titik sebarang di C_5 dan satu titik sebarang di C_5^* .

Kasus 10. Ambil satu titik sebarang di C_{15} dan satu titik sebarang di C_{20} .

Kasus 11. Ambil satu titik sebarang di C_{15} dan satu titik sebarang di C_{15}^* .

Kasus 12. Ambil satu titik sebarang di C_{15} dan satu titik sebarang di C_5^* .

Kasus 13. Ambil satu titik sebarang di C_{20} dan satu titik sebarang di C_{15}^* .

Kasus 14. Ambil satu titik sebarang di C_{20} dan satu titik sebarang di C_5^* .

Kasus 15. Ambil satu titik sebarang di C_{15}^* dan satu titik sebarang di C_5^* .

Berdasarkan Kasus 6 sampai Kasus 15 dapat dilihat bahwa $W_9, W_{10}, W_{11}, W_{12}, W_{13}, W_{14}, W_{15}, W_{16}, W_{17}, W_{18}$ bukan himpunan pemisah, karena terdapat dua titik yang memiliki representasi yang sama.

Dari Kasus 1 sampai Kasus 15 dapat dilihat bahwa jika $|W| = 2$, maka akan selalu terdapat dua titik dengan representasi yang sama sehingga, haruslah

$$\dim(G) \geq 3. \quad (3.2)$$

Dengan demikian dari (3.1) dan (3.2) dapat disimpulkan bahwa dimensi metrik dari graf *Buckminsterfullerene* adalah tiga. $\square$

4. Kesimpulan

Penelitian ini membahas tentang dimensi metrik dari graf G dimana G adalah graf *Buckminsterfullerene* dengan banyak titik 60. Graf *Buckminsterfullerene* dapat dilihat sebagai graf yang berasal dari $C_5 \cup C_{15} \cup C_{20} \cup C_{15}^* \cup C_5^*$ dengan penambahan beberapa sisi, seperti pada Gambar 2.3.2. Dalam penelitian ini diperoleh bahwa dimensi metrik graf *Buckminsterfullerene* adalah tiga.

5. Ucapan Terima kasih

Terima kasih kepada Bapak Narwen, M.Si, Bapak Dr. Admi Nazra, dan Bapak Dr. Ahmad Iqbal Baqi sebagai penguji sehingga penelitian ini dapat terlaksana dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Akhter, S., dan Farooq, R. 2019. Metric Dimension of Fullerene Graphs. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*. 7(1) : 91 – 103.
- [2] Andova, V., Kardos, F., dan Skrekovski, R. 2014. Fullerene Graphs and Some Relevant Graph Invariants. *Topics in Chemical Graph Theory, University of Kragujevac and Faculty of Science. Kragujevac*. pp:39-54, Mathematical Chemistry Monographs. 978-86-6009-027-2.
- [3] Chartrand, G., Eroh, L., Johnson, M., Oellerman, O. 2000. Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph. *Discrete Applied Mathematics*. (105): 99 – 113.
- [4] Yadav, B.C., Kumar, R. 2008. Structure Properties and Applications of Fullerene. *International Journal of Nanotechnology and Applications*. (2): 15 – 24.