PEMBUKTIAN RUMUS BENTUK TUTUP BEDA PUSAT BERDASARKAN DERET TAYLOR

DILLA KURNIA SARI

*Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email : dillakurnia05@gmail.com*

Abstrak. Pada makalah ini dibahas pembuktian dari rumus bentuk tutup beda pusat berdasarkan deret Taylor untuk menghampiri turunan pertama dari suatu fungsi. Pembuktian rumus bentuk tutup tersebut menggunakan sifat-sifat determinan matriks Vandermonde dan beberapa manipulasi aljabar.

Kata Kunci: Rumus beda pusat, deret Taylor, matriks Vandermonde

1. Pendahuluan

Persamaan matematika yang melibatkan turunan atau dikenal sebagai persamaan diferensial seringkali digunakan untuk memodelkan banyak fenomena alam. Untuk masalah-masalah yang lebih realistis, model persamaan diferensial yang dihasilkan terkadang sulit dicari penyelesaian eksaknya. Dalam hal ini, diperlukan pendekatan numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial tersebut.

Untuk menyelesaikan persamaan diferensial secara numerik, perlu dicari terlebih dahulu hampiran suku turunan yang muncul dalam persamaan diferensial tersebut. Salah satu metode numerik yang biasa digunakan untuk menghitung hampiran turunan suatu fungsi adalah metode beda hingga (*finite difference*). Pada metode ini variabel domain suatu fungsi dipartisi atas sejumlah titik dan rumus aproksimasi untuk turunan diperoleh dari ekspansi deret Taylor di satu atau lebih titik partisi [6]. Berdasarkan lokasi titik-titik partisi yang digunakan, metode beda hingga dibagi atas tiga jenis, yaitu beda maju (*forward difference*), beda mundur (*backward difference*) dan beda pusat (*central difference*).

Rumus umum beda hingga untuk turunan ke- m dengan ketelitian orde ke- n dapat dibangkitkan dengan suatu algoritma rekursif. Dalam implementasinya, algoritma rekursif Fornberg membutuhkan beban memori komputasi yang semakin besar untuk menghitung hampiran turunan fungsi dengan tingkatan turunan dan orde ketelitian yang semakin tinggi. Hal ini disebabkan karena semakin tinggi tingkatan turunan dan orde ketelitian, maka jumlah data (titik-titik partisi) yang diperlukan semakin banyak. Untuk mengatasi hal tersebut, diperlukan bentuk tutup dari rumus beda hingga agar koefisien-koefisiennya dapat ditentukan secara langsung tanpa melewati proses perhitungan secara rekursif.

Bentuk tutup dari rumus beda hingga telah diformulasikan oleh Khan dan Ohba

pada tahun 1999 [4]. Untuk hampiran turunan pertama suatu fungsi $f(x)$ di titik $x = x_0$, bentuk tutup dari rumus beda hingga diberikan oleh

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{T} \sum_k g_k f_k, \quad (1.1)$$

dimana T menyatakan lebar selang partisi, sedangkan koefisien g_k dan iterator k didefinisikan berdasarkan orde dan jenis beda hingga.

Untuk aproksimasi beda pusat, iterator k diuraikan atas $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$, dimana N adalah orde ketelitian, dan koefisien g_k diberikan oleh

$$g_k = \begin{cases} 0 & k = 0, \\ \frac{(-1)^{k+1}(N!)^2}{k(N-k)!(N+k)!} & k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N. \end{cases} \quad (1.2)$$

Rumus untuk koefisien g_k diperoleh oleh Khan dan Ohba dengan mengobservasi solusi sistem persamaan yang dibangun dari deret Taylor. Validasi rumus tersebut telah dibuktikan secara numerik sampai orde ke N yang cukup besar, dan telah dibuktikan secara matematis untuk kasus beda maju [5]. Namun bukti untuk kasus beda mundur dan beda pusat belum diberikan secara detail.

2. LANDASAN TEORI

2.1. Review Teori Matriks

Teorema 2.1. [1] *Misalkan A adalah sebarang matriks $n \times n$.*

- (i) *Jika A' adalah matriks yang dihasilkan bila baris tunggal atau kolom tunggal matriks A dikalikan oleh konstanta k , maka $\det(A') = k \det(A)$.*
- (ii) *Jika A' adalah matriks yang dihasilkan bila kelipatan satu baris matriks A ditambahkan pada baris lain atau kelipatan satu kolom matriks A ditambahkan pada kolom lain, maka $\det(A') = \det(A)$.*

2.2. Determinan Matriks Vandermonde

Definisi 2.2. [7] *Matriks V berukuran $M \times N$ yang berbentuk*

$$V_{M \times N} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{N-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{N-1} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_3^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_M & \lambda_M^2 & \dots & \lambda_M^{N-1} \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

dimana $\lambda_i \neq \lambda_j$, untuk setiap $i \neq j$ disebut matriks Vandermonde.

Determinan dari matriks Vandermonde diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 2.3. [7] *Determinan matriks Vandermonde yang berukuran $N \times N$*

diberikan oleh

$$|V_{N \times N}| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{N-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{N-1} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_3^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{N-1} \end{vmatrix} = \prod_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j < i \\ j < i}} (\lambda_i - \lambda_j). \quad (2.2)$$

Akibat 2.4. [7] Nilai determinan dari matriks Vandermonde $N \times N$ yang secara khusus berbentuk

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{N-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & N & N^2 & \cdots & N^{N-1} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

diberikan oleh

$$\alpha_N = \prod_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j < i \\ j < i}} (i - j) = \prod_{i=1}^N (N - i)!. \quad (2.4)$$

Selanjutnya pandang determinan dari matriks $(N - 1) \times (N - 1)$ yang diperoleh dengan menghapus baris ke- k dan kolom terakhir dari matriks (2.3), yakni diberikan oleh

$$\beta_{N-1,k} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & k-1 & (k-1)^2 & \cdots & (k-1)^{N-2} \\ 1 & k+1 & (k+1)^2 & \cdots & (k+1)^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & N & N^2 & \cdots & N^{N-2} \end{vmatrix}. \quad (2.5)$$

Karena matriks pada ekspresi di atas juga merupakan matriks Vandermonde, maka determinannya diberikan oleh α_N tetapi untuk $i \neq k$ dan $j \neq k$. Dengan demikian berlaku

$$\begin{aligned} \beta_{N-1,k} &= \prod_{\substack{1 \leq i \leq N, i \neq k \\ 1 \leq j \leq N, j \neq k \\ j < i}} (i - j) \\ &= \frac{1}{(k-1)!(N-k)!} \prod_{i=1}^N (N - i)!. \end{aligned} \quad (2.6)$$

3. Pembahasan

Pandang kembali deret Taylor untuk $f(x)$ di $x \approx x_0$ yang diberikan oleh

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dots \quad (3.1)$$

Jika domain dipartisi sebanyak $2N$ selang dengan lebar $\Delta x = T$, maka diperoleh titik-titik partisi

$$x_k = x_0 + kT, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N.$$

Dengan demikian deret Taylor (3.1) pada saat $x = x_k$ adalah

$$f_k - f_0 = (kT)f_0^{(1)} + \frac{(kT)^2}{2!}f_0^{(2)} + \frac{(kT)^3}{3!}f_0^{(3)} + \dots, \quad (3.2)$$

dimana $f_0 = f(x_0)$, $f_k = f(x_k)$ dan $f_0^{(m)} = f^{(m)}(x_0)$ dengan m menyatakan tingkatan turunan.

Pertama, persamaan (3.2) dipotong sampai suku ke- $2N$, sehingga dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\mathbf{f} \approx A\mathbf{d},$$

dimana

$$\mathbf{f} = [f_1 - f_0 \quad f_{-1} - f_0 \quad f_2 - f_0 \quad f_{-2} - f_0 \quad \dots \quad f_N - f_0 \quad f_{-N} - f_0]^T,$$

$$A = \begin{bmatrix} T & T^2/2! & \dots & T^{2N}/(2N)! \\ -T & (-T)^2/2! & \dots & (-T)^{2N}/(2N)! \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ NT & (NT)^2/2! & \dots & (NT)^{2N}/(2N)! \\ -NT & (-NT)^2/2! & \dots & (-NT)^{2N}/(2N)! \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{d} = [f_0^{(1)} \quad f_0^{(2)} \quad f_0^{(3)} \quad \dots \quad f_0^{(2N-1)} \quad f_0^{(2N)}]^T.$$

Dengan menggunakan aturan Cramer, diperoleh

$$f_0^{(1)} \approx \frac{|A_f|}{|A|}, \quad (3.3)$$

dimana A_f diperoleh dengan mengganti kolom pertama matriks A dengan vektor kolom f , yaitu

$$A_f = \begin{bmatrix} f_1 - f_0 & T^2/2! & \dots & T^{2N}/(2N)! \\ f_{-1} - f_0 & (-T)^2/2! & \dots & (-T)^{2N}/(2N)! \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_N - f_0 & (NT)^2/2! & \dots & (NT)^{2N}/(2N)! \\ f_{-N} - f_0 & (-NT)^2/2! & \dots & (-NT)^{2N}/(2N)! \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan sifat determinan pada Teorema 2.1(i), (3.3) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} f_0^{(1)} &\approx \frac{(T^2)(T^3) \cdots (T^{2N})}{(T)(T^2) \cdots (T^{2N})} \frac{|A_f|_{T=1}}{|A|_{T=1}} \\ &= \frac{1}{T} \frac{|A_f|_{T=1}}{|A|_{T=1}}. \end{aligned}$$

Selanjutnya dengan mengeluarkan faktor kelipatan dari setiap baris dan kolom pada $|A|_{T=1}$, diperoleh

$$|A|_{T=1} = \frac{(-1)(2)(-2) \cdots (N)(-N)}{2!3! \cdots (2N)!} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & (-1)^2 & \cdots & (-1)^{2N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & N & (N)^2 & \cdots & (N)^{2N-1} \\ 1 & -N & (-N)^2 & \cdots & (-N)^{2N-1} \end{vmatrix}. \quad (3.4)$$

Perhatikan bahwa determinan matriks yang muncul pada persamaan (3.4) merupakan determinan matriks Vandermonde. Berdasarkan Akibat 2.4, maka berlaku

$$|A|_{T=1} = \frac{(-1)(2) \cdots (-N)}{2!3! \cdots (2N)!} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & \cdots & (-1)^{2N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & N & \cdots & (N)^{2N-1} \\ 1 & -N & \cdots & (-N)^{2N-1} \end{vmatrix} = \frac{\alpha_N}{2!3! \cdots (2N)!} = 1,$$

dimana α_N diberikan oleh persamaan (2.4). Dengan demikian persamaan (3.3) menjadi

$$f_0^{(1)} \approx \frac{1}{T} |A_f|_{T=1},$$

yang dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned} f_0^{(1)} &\approx \frac{1}{T} \sum_{k=-N, k \neq 0}^N g_k (f_k - f_0), \\ &= \frac{1}{T} \left(\sum_{k=-N, k \neq 0}^N g_k f_k - \sum_{k=-N, k \neq 0}^N g_k f_0 \right), \end{aligned} \quad (3.5)$$

dimana g_k , dengan $k = -N, -N+1, \dots, -1, 1, 2, \dots, N$, adalah kofaktor dari $|A_f|_{T=1}$ yang berkorespondensi dengan elemen ke- k dari kolom pertama, yaitu diberikan oleh

$$g_k = (-1)^{k+1} \begin{vmatrix} 1/2! & 1/3! & \cdots & 1/(2N)! \\ (-1)^2/2! & (-1)^3/3! & \cdots & (-1)^{2N}/(2N)! \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (k-1)^2/2! & (k-1)^3/3! & \cdots & (k-1)^{2N}/(2N)! \\ (-k+1)^2/2! & (-k+1)^3/3! & \cdots & (-k+1)^{2N}/(2N)! \\ (-1)^k(k)^2/2! & (-1)^k(k)^3/3! & \cdots & (-1)^k(k)^{2N}/(2N)! \\ (k+1)^2/2! & (k+1)^3/3! & \cdots & (k+1)^{2N}/(2N)! \\ (-k-1)^2/2! & (-k-1)^3/3! & \cdots & (-k-1)^{2N}/(2N)! \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N^2/2! & N^3/3! & \cdots & N^{2N}/(2N)! \\ (-N)^2/2! & (-N)^3/3! & \cdots & (-N)^{2N}/(2N)! \end{vmatrix}.$$

Dengan mendefinisikan

$$g_0 = - \sum_{k=-N, k \neq 0}^N g_k, \quad (3.6)$$

maka persamaan (3.5) dapat ditulis

$$f_0^{(1)} \approx \frac{1}{T} \sum_{k=-N}^N g_k f_k, \quad k = -N, -N+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N-1, N.$$

Dengan mengeluarkan faktor kelipatan dari setiap baris dan kolom pada g_k , diperoleh

$$g_k = (-1)^{k+1} \frac{(-1)^2(2)^2 \cdots (-N)^2}{2!3! \cdots (2N)!} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & (-1) & \cdots & (-1)^{2N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (k-1) & \cdots & (k-1)^{2N-2} \\ 1 & (-k+1) & \cdots & (-k+1)^{2N-2} \\ 1 & (k) & \cdots & (k)^{2N-2} \\ 1 & (k+1) & \cdots & (k+1)^{2N-2} \\ 1 & (-k-1) & \cdots & (-k-1)^{2N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & N & \cdots & N^{2N-2} \\ 1 & (-N) & \cdots & (-N)^{2N-2} \end{vmatrix}. \quad (3.7)$$

Determinan matriks yang muncul pada persamaan (3.7) dapat dihitung dengan mengikuti ide dari perhitungan determinan matriks (2.6), yaitu

$$g_k = (-1)^{k+1} \frac{(N!)^2}{k(N-k)!(N+k)!}, \quad (3.8)$$

dengan $k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$.

Selanjutnya dari persamaan (3.6) diperoleh

$$g_0 = - \sum_{k=-N, k \neq 0}^N g_k = \sum_{k=-N}^N \frac{(-1)^k (N!)^2}{k(N-k)!(N+k)!}. \quad (3.9)$$

Dari persamaan (3.8) dapat dilihat bahwa

$$g_{-k} = -g_k, k = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (3.10)$$

sehingga berlaku

$$\sum_{k=-N, k \neq 0}^N g_k = -g_N - g_{N-1} - \dots - g_1 + g_1 + \dots + g_{N-1} + g_N = 0. \quad (3.11)$$

Akibatnya persamaan (3.9) menjadi

$$g_0 = 0. \quad (3.12)$$

Dengan demikian, dari persamaan (3.8) dan (3.12) diperoleh

$$g_k = \begin{cases} 0 & k = 0, \\ \frac{(-1)^{k+1} (N!)^2}{k(N-k)!(N+k)!} & k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N, \end{cases}$$

4. Kesimpulan dan Saran

Pada makalah ini telah dijelaskan mengenai pembuktian bentuk tutup rumus beda pusat berdasarkan deret Taylor dalam menghampiri turunan pertama dari fungsi $f(x)$ di $x = x_0$. Bentuk tutup rumus beda pusat tersebut diberikan oleh

$$f'_0 \approx \frac{1}{T} \sum_{k=-N}^N g_k f_k,$$

dimana $f_k = f(x_k)$, N menyatakan orde ketelitian, dan

$$g_k = \begin{cases} 0 & k = 0, \\ \frac{(-1)^{k+1} (N!)^2}{k(N-k)!(N+k)!} & k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N. \end{cases}$$

Pembuktian bentuk tutup tersebut menggunakan sifat-sifat determinan matriks Vandermonde dan beberapa manipulasi aljabar.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Mahdhivan Syafwan, Bapak Bukti Ginting, Bapak Admi Nazra, Ibu Yanita dan Bapak Efendi yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Anton, H. 2004. *Aljabar Linier Elementer*. Edisi ke-8. Erlangga, Jakarta.
- [2] Bartle, Robert G., dan Donald R. Sherbert. 2011. *Introduction to Real Analysis*. Edisi ke-4. John Wiley and Son, Urban-Champaign.
- [3] Bengt, Fornberg. 1988. Generation of Finite Difference Formulas on Arbitrarily Spaced Grids. *Mathematics of Computation*. 51:184.
- [4] I.R. Khan, dan R. Ohba. 1999. Closed form expressions for the finite difference approximations of first and higher derivatives based on Taylor series. *J. Comput. Appl. Math.* 107: 179 – 193.
- [5] I. R. Khan, R. Ohba, dan N. Hozumi. 2003. Mathematical proof of closed form expressions for finite difference approximations based on Taylor series. *J. Comput. Appl. Math.* 150: 303 – 309.
- [6] Mathews, John H., K.D. Fink. 1992. *Numerical Methods for Computer Science, Engineering, and Mathematics*. Edisi ke-2. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- [7] Meyer, Carl D. 2000. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. SIAM. Philadelphia.