Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VI** No. **3** Hal. 63 – 68
ISSN : 2303–2910

NORMALISASI POSITIF SISTEM SINGULAR DISKRIT

RAKIB HABLULLAH, ZULAKMAL

Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email : rakibhablullah15@gmail.com

Abstrak. Suatu sistem singular diskrit dikatakan mempunyai solusi jika syarat regularitas terpenuhi. Pada tugas akhir ini, dinyatakan bahwa sistem singular diskrit dapat dinormalkan jika terdapat suatu vektor $\mathbf{w}(t) = -\mathcal{K}\mathbf{y}(t+1)$, sedemikian sehingga $\det(F + T\mathcal{K}) \neq 0$. Sistem singular diskrit normal dikatakan positif jika syarat matriks $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sedemikian sehingga $\det(F+T\mathcal{K}) \neq 0$ dan solusi dari sistem tersebut adalah positif.

Kata Kunci: singular, monomial, rank, diskrit, normal, positif

1. PENDAHULUAN

Diberikan sistem linier berikut:

$$F\mathbf{y}(t+1) = S\mathbf{y}(t) + T\mathbf{w}(t),\ t \in \mathbb{Z}_+, \tag{1.1}$$

dimana $F,\ S \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $T \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^m$.

Sistem (1.1) dengan $\mathrm{rank}(F) < n$ mempunyai solusi jika $\det(\lambda F - S) \neq 0$ untuk suatu $\lambda \in \mathbb{C}$, dimana $\mathbb{C}$ menyatakan himpunan bilangan kompleks. Dalam hal $\det(\lambda F - S) \neq 0$ untuk suatu $\lambda \in \mathbb{C}$, sistem (1.1) disebut sebagai sistem singular reguler.

Dalam beberapa situasi kadang-kadang diperlukan upaya untuk menormalkan sistem (1.1). Dalam [6] dinyatakan bahwa sistem (1.1) dapat dinormalkan jika terdapat suatu vektor $\mathbf{w}(t) = -\mathcal{K}\mathbf{y}(t+1)$, untuk suatu $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sedemikian sehingga $\det(F + T\mathcal{K}) \neq 0$. Dengan $\mathbf{w}(t) = -\mathcal{K}\mathbf{y}(t+1)$, sistem (1.1) dapat diubah menjadi

$$(F + T\mathcal{K})\mathbf{y}(t+1) = S\mathbf{y}(t). \tag{1.2}$$

Jelas bahwa jika $\det(F + T\mathcal{K}) \neq 0$, maka sistem (1.2) menjadi normal, yaitu

$$\mathbf{y}(t+1) = (F + T\mathcal{K})^{-1}S\mathbf{y}(t). \tag{1.3}$$

Dalam makalah ini akan dibicarakan masalah normalisasi positif dari sistem (1.1) yaitu bagaimana syarat matriks $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sedemikian sehingga $\det(F + T\mathcal{K}) \neq 0$ dan solusi dari sistem (1.3) adalah positif, yaitu $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n_+$.

2. LANDASAN TEORI

2.1. Teori Matriks

Definisi 2.1. [1] *Suatu matriks* $A \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ *dikatakan matriks monomial jika dalam setiap baris dan kolom dari* A *terdapat tepat satu entri yang tak nol dan entri-entri lainnya adalah nol.*

Definisi 2.2. [7] *Suatu matriks* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *dikatakan monoton jika* A^{-1} *ada dan* $A^{-1} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$.

Teorema 2.3. [7] *Jika* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *maka* $A^{-1} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ *jika dan hanya jika* A *matriks monomial.*

Contoh 2.4. Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh invers matriks A adalah

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Karena $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dan A^{-1} ada, dimana $A^{-1} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ maka A dikatakan monoton dan A adalah matriks *monomial*.

Definisi 2.5. [3]

(i). Dua matriks $M \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ *dan* $N \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ *dikatakan ekuivalen positif, jika ada dua matriks monomial* B *dan* A *sedemikian sehingga*

$$N = AMB. \tag{2.1}$$

(ii). Diberikan matriks $N \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ *dengan rank*$(N) = r$. *Matriks* N *dikatakan r-monomial jika ia ekuivalen positif dengan matriks*

$$\begin{bmatrix} N_r & O \\ O & O \end{bmatrix},$$

dimana N_r *adalah monomial.*

Proposisi 2.6. [3]

(i). Matriks N *adalah r-monomial jika dan hanya jika* N *mempunyai (n-r) baris dan (n-r) kolom yang semua entri-entrinya sama dengan nol dan r baris dan r kolom dengan hanya satu entri tak nol.*

(ii). Jika matrik N *adalah r-monomial, maka ia ekuivalen positif dengan matriks*

$$\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}.$$

2.2. Sistem Linier Normal Positif

Perhatikan sistem linier diskrit normal berikut ini:

$$\mathbf{y}(t+1) = S\mathbf{y}(t) + T\mathbf{w}(t),\ t \in \mathbb{Z}_+, \tag{2.2}$$

dimana $S \in \mathbb{R}^{n\times n}, T \in \mathbb{R}^{n\times m}, \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^m$.

Solusi dari sistem (2.2) diberikan sebagai berikut [9] :

$$\mathbf{y}(t) = S^t\mathbf{y}(0) + \sum_{k=0}^{t-1} S^{t-k-1}T\mathbf{w}(k). \tag{2.3}$$

Definisi 2.7. [9] *Sistem (2.2) dikatakan positif jika untuk setiap syarat awal* $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n_+$ *dan untuk setiap vektor* $\mathbf{w(k)} \in \mathbb{R}^m_+$ *maka solusi dari sistem adalah nonnegatif untuk setiap* $t \in \mathbb{Z}_+$*, yaitu* $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n_+$.

Teorema 2.8. [9] *Sistem (2.2) adalah positif jika dan hanya jika*

$$S \in \mathbb{R}^{n\times n}_+ \text{ dan } T \in \mathbb{R}^{n\times m}_+. \tag{2.4}$$

Contoh 2.9. Diberikan sistem (2.2) dengan

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Jika diberikan $\mathbf{y}(0) \in \mathbb{R}^2_+$ dan $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}_+$ dimana $t > 0$, maka solusi dari sistrim linier diskrit tersebut adalah

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} + \sum_{k=0}^{t-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{t-k-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2_+$$

.

3. Pembahasan

Seperti yang telah diketahui bahwa sistem (1.1) dikatakan dapat dinormalkan jika terdapat suatu vektor $\mathbf{w}(t) = -\mathcal{K}\mathbf{y}(t+1)$, $t \in \mathbb{Z}_+$, untuk suatu $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sedemikian sehingga $\det(F + T\mathcal{K}) \neq 0$.

Proposisi 3.1. [4] *Sistem (1.1) dapat dinormalkan jika dan hanya jika rank* $\begin{bmatrix} F & T \end{bmatrix} = n$.

Asumsikan bahwa matriks F ekuivalen positif dengan suatu matriks r-*monomial* sebutlah N_r, maka terdapat matriks *monomial* A dan B dimana A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}_+$ sedemikian sehingga

$$AFB = \begin{bmatrix} N_r & O \\ O & O \end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

Misalkan

$$AT = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Maka syarat rank $\begin{bmatrix} F \; T \end{bmatrix} = n$ haruslah ekuivalen dengan matriks T_2 yang mempunyai *full row rank*, yaitu $(n-r)$. Hal ini dapat dibuktikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \texttt{rank}\begin{bmatrix} F \; T \end{bmatrix} = n &\Leftrightarrow \texttt{rank}\begin{bmatrix} AFB \; AT \end{bmatrix} = n \\ &\Leftrightarrow \texttt{rank}\begin{bmatrix} N_r & O & T_1 \\ O & O & T_2 \end{bmatrix} = n. \end{aligned}$$

Karena $\text{rank}(N_r) = r$, maka mestilah $\text{rank}(T_2) = (n-r)$.

Teorema 3.2. [3] *Diberikan sistem (1.1) dengan matriks F dan T diberikan oleh (3.1) dan (3.2), dimana rank$(T_2) = (n-r)$ dan $S \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$. Maka terdapat matriks $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sedemikian sehingga det$(F + T\mathcal{K}) \neq 0$ dan sistem (1.3) adalah positif jika*

a. $(T_2T_2^T)^{-1} \in \mathbb{R}_+^{(n-r)\times(n-r)}$;
b. $(T_1T_2^T) \in \mathbb{R}_-^{r\times(n-r)}$;
c. $(T_2T_2^T)^{-1}T_2 \in \mathbb{R}_+^{(n-r)\times m}$;
d. $T_1 - T_1T_2^T(T_2T_2^T)^{-1}T_2 \in \mathbb{R}_+^{r\times m}$.

Bukti. Misalkan $\mathcal{K} = \begin{bmatrix} O \; T_2^T \end{bmatrix} B^{-1}$, maka

$$\begin{aligned} F + T\mathcal{K} &= A^{-1}\begin{bmatrix} N_r & O \\ O & O \end{bmatrix} B^{-1} + A^{-1}AT\mathcal{K} \\ &= A^{-1}\begin{bmatrix} N_r & O \\ O & O \end{bmatrix} B^{-1} + A^{-1}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O \; T_2^T \end{bmatrix} B^{-1} \\ &= A^{-1}\left(\begin{bmatrix} N_r & O \\ O & O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O \; T_2^T \end{bmatrix}\right) B^{-1} \\ &= A^{-1}\left(\begin{bmatrix} N_r & O \\ O & O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O & T_1T_2^T \\ O & T_2T_2^T \end{bmatrix}\right) B^{-1}. \\ &= A^{-1}\begin{bmatrix} N_r & T_1T_2^T \\ O & T_2T_2^T \end{bmatrix} B^{-1}. \end{aligned}$$

Karena $\text{rank}(T_2) = n - r$ maka $(F + T\mathcal{K})$ adalah nonsingular, sehingga $\det(F + T\mathcal{K} \neq 0)$. Selanjutnya, akan ditunjukan bahwa sistem (1.3) adalah positif. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} (F + T\mathcal{K})^{-1} &= \left(A^{-1}\left(\begin{bmatrix} N_r & O \\ O & O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O & T_1T_2^T \\ O & T_2T_2^T \end{bmatrix}\right) B^{-1}\right)^{-1} \\ &= \left(A^{-1}\begin{bmatrix} N_r & T_1T_2^T \\ O & T_2T_2^T \end{bmatrix} B^{-1}\right)^{-1} \\ &= B\begin{bmatrix} N_r & T_1T_2^T \\ O & T_2T_2^T \end{bmatrix}^{-1} A. \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$(F+T\mathcal{K})^{-1} = B\begin{bmatrix} N_r^{-1} & -N_rT_1T_2^T(T_2T_2^T)^{-1} \\ O & T_2T_2^T \end{bmatrix} A \tag{3.3}$$

$$= B\begin{bmatrix} N_r & O \\ O & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -T_1T_2^T(T_2T_2^T)^{-1} \\ O & (T_2T_2^T)^{-1} \end{bmatrix} A. \tag{3.4}$$

Dari kondisi (a) dan (b) diperoleh $(F+T\mathcal{K})^{-1} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ sehingga mengakibatkan $(F+T\mathcal{K})^{-1}S \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$. Selain itu, dari kondisi (c) dan (d) mengakibatkan $(F+T\mathcal{K})^{-1}T \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$. Sehingga sistem (1.3) adalah positif. □

Contoh 3.3. Diberikan sistem (1.1) dengan

$$F = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&3&0&0&0 \\ 0&0&2&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 1&2&1&0&0 \\ 0&0&1&3&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&2&0&0&2 \\ 0&0&5&5&0 \end{bmatrix} \; dan \; T = \begin{bmatrix} -1&0 \\ 0&0 \\ 0&0 \\ 0&3 \\ 2&0 \end{bmatrix}$$

Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&\frac{1}{3}&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&\frac{1}{2}&0 \end{bmatrix} \; dan \; B = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix},$$

maka diperoleh

$$AFB = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&2&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \; dan \; AT = \begin{bmatrix} -1&0 \\ 0&0 \\ 0&0 \\ 2&0 \\ 0&\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Selain itu

$$T_1T_2^T = \begin{bmatrix} -2&0 \\ 0&0 \\ 0&0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_-^{3\times 2}, \; (T_2T_2^T)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}&0 \\ 0&\frac{4}{9} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{2\times 2},$$

$$T_1 - T_1T_2^T(T_2T_2^T)^{-1}T_2 = \begin{bmatrix} 1&0 \\ 0&0 \\ 0&0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{3\times 2}, (T_2T_2^T)^{-1}T_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}&0 \\ 0&\frac{2}{3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{2\times 2}.$$

Pilih matriks $\mathcal{K} = \begin{bmatrix} 0&0&0&2&0 \\ 0&0&0&0&\frac{3}{2} \end{bmatrix}$ maka

$$det(F+T\mathcal{K}) = det\begin{bmatrix} 1&0&0&-2&0 \\ 0&3&0&0&0 \\ 0&0&2&0&0 \\ 0&0&0&0&\frac{9}{2} \\ 0&0&0&4&0 \end{bmatrix} \neq 0. \tag{3.5}$$

Selanjutnya

$$(F+T\mathcal{K})^{-1}S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & 0 & 0 & \frac{4}{9} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{5\times 5},\ (F+T\mathcal{K})^{-1}T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{5\times 2}.$$

Sehingga sistem (1.3) merupakan sistem normal positif.

Daftar Pustaka

[1] Anton, H. 1991. *Aljabar Linier Elementer*. Edisi Kedelapan-Jilid 1. Erlangga. Jakarta.

[2] Campbell S. L. 1980. *Singular system of differential equatins*. Pitman Books Ltd, London.

[3] Canto,B., C. Coll and E. Sanches. 2006. *Positive Normalizable Singular System*. Departement de Matematic Aplicada, Universitat Politeenica de Valencia, 46071 Valencia, Spain.

[4] Dai, L 1989. *Singular control system*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.

[5] Farina L, Rinaldi S. 2000. *Positive linier system*. Jhon Wiley and Sons, New York.

[6] G.-R. Duan. 2010. *Analysis and Design of Descriptor Linier System*. Springer, New York.

[7] Kaczorek, T. 2002. *Positive 1D and 2D system*. Springer, London.

[8] Minc, H. 1988. *Nonnegative matrices*. John Wiley and Sons, New York.

[9] Rina, I. 2015. *Realisasi Positif Stabil Asimtotik Dari Sistem Linier Diskrit Dengan Pole Konjugat Kompleks*. Universitas Andalas, Padang.