Jurnal Matematika UNAND
Vol. **1** No. **1** Hal. 1 – 4
ISSN : 2303–291X

PELABELAN TOTAL (a, d)-SISI ANTIAJAIB PADA GRAF PETERSEN $P(n, 2)$, UNTUK n GANJIL, $n \geq 3$

Arif Rahman, Narwen dan Ahmad Iqbal Baqi

Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas Padang,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia
jroy_zue@yahoo.co.id, narwen@fmipa.unand.ac.id

Abstrak. Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf sederhana dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E. Pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib pada graf G adalah pemetaan injektif dari gabungan himpunan titik dan himpunan sisi ke himpunan bilangan asli berurutan yang dimulai dari 1. Pada pelabelan didefinisikan jumlah label sisi dan label dua titik yang menempel pada sisi disebut sebagai bobot sisi. Apabila bobot dari semua sisi membentuk barisan aritmatika dengan suku awal a dan beda d, maka pelabelan tersebut merupakan pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib. Pada tugas akhir ini dikaji tentang pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib pada graf Petersen $P(n, 2)$ dengan n ganjil ($n \geq 3$). Fokus pengkajian diutamakan pada pembentukan pola pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib pada Graf Petersen $P(n, 2)$ dengan n ganjil ($n \geq 3$).
Kata Kunci: *Barisan Aritmatika, Graf Petersen Yang Diperumum, Pelabelan Total (a, d)-sisi Antiajaib.*

1 Pendahuluan

Graf merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi. Pengaitan titik-titik pada graf membentuk sisi dan dapat direpresentasikan pada gambar sehingga membentuk pola graf tertentu. Pola-pola yang terbentuk didefinisikan dan dikelompokkan menjadi kelas-kelas graf. Beberapa kelas graf menurut banyaknya sisi yang terkait terhadap titik antara lain graf reguler, yang derajat setiap titiknya adalah sama dan graf irreguler, yang derajat setiap titiknya ada yang tidak sama. Terdapat pula graf Petersen yang diperumum yang merupakan salah satu subkelas dari graf reguler. Pelabelan merupakan pemetaan injektif yang memetakan unsur himpunan titik dan atau unsur himpunan sisi ke bilangan asli yang disebut label. Pelabelan titik adalah pelabelan dengan domain himpunan titik, pelabelan sisi adalah pelabelan dengan domain himpunan sisi, dan pelabelan total adalah pelabelan dengan domain gabungan himpunan titik dan himpunan sisi.

Pelabelan titik dan sisi dari graf bisa dilakukan dengan banyak cara. Salah satu cara yang bisa digunakan adalah melabelinya dengan bilangan. Terdapat banyak jenis pelabelan graf yang telah dikembangkan, diantaranya adalah pelabelan graceful, pelabelan harmoni, pelabelan total tak beraturan, pelabelan ajaib, dan pelabelan anti ajaib. Dalam pengembangan pelabelan anti ajaib, dikenal pula pelabelan total (a, d)-titik-anti ajaib, pelabelan total titik ajaib super, pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib, dan pelabelan total sisi-ajaib super.

Permasalahan yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah bagaimana menentukan pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib pada graf Petersen $P(n, 2)$ dengan n ganjil $(n \geq 3)$, dan akan diberikan beberapa contoh untuk memperjelas pelabelan total tersebut.

Permasalahan ini dibatasi pada pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib pada Graf Petersen $P(n, m)$ dengan n ganjil $(n \geq 3)$, $1 \leq m \leq \lfloor \frac{(n-1)}{2} \rfloor$ dengan $2n$ titik. Misalkan titik $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ dan sisi-sisi: $u_i u_{i+1}$, $u_i v_i$, $v_i v_{i+m}$, untuk semua $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Lebih khusus pada $n = 3$, $n = 5$ dan $m = 2$.

2 Pelabelan pada graf

Suatu pelabelan dari graf $G(V, E)$ dengan p titik dan q sisi adalah pemetaan satu-satu dari himpunan $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan bilangan bulat positif $\{1, 2, ..., p+q\}$. Jika domain dari pemetaan adalah titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik *(vertex labeling)*. Jika domainnya adalah sisi, maka pelabelan disebut pelabelan sisi (*edgelabeling*), dan jika domainnya titik dan sisi, maka pelabelan disebut pelabelan total (*totallabeling*). Jumlah label sisi dan label dua titik yang menempel pada sisi disebut sebagai bobot sisi. Jika graf memiliki bobot titik atau bobot sisi yang sama, maka graf ini disebut graf dengan pelabelan ajaib. Jika graf memiliki bobot titik atau bobot sisi yang berbeda, maka graf ini disebut graf dengan pelabelan anti ajaib. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang berbeda dan himpunan bobot sisi dari semua sisi membentuk barisan aritmatika seperti berikut $\{a, a+d, \ldots, a+(q-1)d\}$, dengan suku pertama a dan beda d maka pelabelan tersebut disebut pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib.

Definisi berikut memberi pengertian dari pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib.

Definisi 1. *Pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib dari Graf G adalah Pemetaan satu-satu dari himpunan $E(G) \cup V(G)$ ke himpunan $\{1, 2, 3, \ldots, p+q\}$ sedemikian hingga bobot dari himpunan sisi untuk semua sisi di G adalah $\{a, a+d, \ldots, a+(q-1)d\}$, untuk dua bilangan bulat $a > 0$ dan $d \geq 0$.*

3 Pelabelan Total (a, d)-sisi Antiajaib pada Graf Petersen $P(n, 2)$ dengan n Ganjil $(n \geq 3)$

Kajian pelabelan ini disajikan dalam bentuk teorema berikut beserta contohnya.

Teorema 1. *Untuk n ganjil $(n \geq 3)$, Graf Petersen yang diperumum $P(n, 2)$ mempunyai pelabelan total $(\frac{(9n+5)}{2}, 2)$ -sisi antiajaib.*

Bukti. Misalkan $P(n, 2)$ adalah Graf Petersen yang mempunyai pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib karena $|V[P(n, 2)]| = 2n$ dan $|E[P(n, 2)]| = 3n$. sehingga $g : V[P(n, 2)] \cup E[P(n, 2)] \longrightarrow \{1, 2, ..., 5n\}$, yaitu :

$$g(u_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2n+2+i), \text{ untuk } i \equiv 0(mod2) \\ \frac{1}{2}(3n+2+i), \text{ untuk } i \equiv 1(mod2) \end{cases}$$

$$g(u_i u_{i+1}) = \begin{cases} (2n+2+i), & \text{untuk } i \neq n-1 \\ (2n+1), & \text{untuk } i = n-1 \end{cases}$$

$$g(v_iv_{i+2}) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2n-2-i), & \text{untuk } i \equiv 0 (mod 2) \\ \frac{1}{2}(n-2-i), & \text{untuk } i \equiv 1 (mod 2) \\ (n), & \text{untuk } i = n-2 \end{cases}$$

Sedangkan pelabelan titik v_i dan sisi u_iv_i, untuk $i \in \{0, 1, 2, , n-1\}$, dibagi menjadi dua kasus seperti dibawah ini :

1. **Kasus 1**: Untuk $n \equiv 1 (mod 4)$.

$$g(v_i) = \begin{cases} \frac{1}{4}(16n-i), & \text{untuk } i \equiv 0 \pmod 4 \\ \frac{1}{4}(13n-i), & \text{untuk } i \equiv 1 \pmod 4 \\ \frac{1}{4}(14n-i), & \text{untuk } i \equiv 2 \pmod 4 \\ \frac{1}{4}(15n-i), & \text{untuk } i \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

$$g(u_iv_i) = \begin{cases} \frac{1}{4}(18n+2+i), & \text{untuk } i \equiv 0 \pmod 4 \\ \frac{1}{4}(17n+2+i), & \text{untuk } i \equiv 1 \pmod 4 \\ \frac{1}{4}(16n+2+i), & \text{untuk } i \equiv 2 \pmod 4 \\ \frac{1}{4}(19n+2+i), & \text{untuk } i \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

2. **Kasus 2**: Untuk $n \equiv 3 \pmod 4$.

$$g(v_i) = \begin{cases} \frac{1}{4}(16n-i), & \text{untuk } i \equiv 0 \pmod 4 \\ \frac{1}{4}(15n-i), & \text{untuk } i \equiv 1 \pmod 4 \\ \frac{1}{4}(14n-i), & \text{untuk } i \equiv 2 \pmod 4 \\ \frac{1}{4}(13n-i), & \text{untuk } i \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

$$g(u_iv_i) = \begin{cases} \frac{1}{4}(18n+2+i), & \text{untuk } i \equiv 0 \pmod 4 \\ \frac{1}{4}(19n+2+i), & \text{untuk } i \equiv 1 \pmod 4 \\ \frac{1}{4}(16n+2+i), & \text{untuk } i \equiv 2 \pmod 4 \\ \frac{1}{4}(17n+2+i), & \text{untuk } i \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

Misalkan w_g menyatakan bobot sisi dari graf Petersen $P(n, 2)$. Didefinisikan bobot sisi dari pelabelan total g dari sisi-sisi: $\{u_iu_{i+1}, v_iv_{i+2}, u_iv_i\}$ pada Graf Petersen $P(n, 2)$ untuk semua $i \in \{0, 1, 2, , n-1\}$ sebagai berikut :

$$w(u_iu_{i+1}) = \begin{cases} \frac{1}{2}(9n+5) + (2+2i), & \text{untuk } i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-2 \\ \frac{1}{2}(9n+5), & \text{untuk } i = n-1 \end{cases}$$

$$w(v_iv_{i+2}) = \begin{cases} \frac{1}{2}(17n-3) - i, & \text{untuk } i \equiv 0 \pmod 2 \\ \frac{1}{2}(15n-3) - i, & \text{untuk } i \equiv 1 \pmod 2,\ i \neq n-2 \\ \frac{1}{2}(17n-1), & \text{untuk } i = n-2 \end{cases}$$

Pada bagian ini terbagi atas dua kasus :

1. **Kasus 1**: Untuk $n \equiv 1 (mod 4)$.

$$w(u_iv_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}(19n+3+i), & \text{untuk } i \equiv 0 \pmod 4 \\ \frac{1}{2}(18n+3+i), & \text{untuk } i \equiv 1 \pmod 4 \\ \frac{1}{2}(17n+3+i), & \text{untuk } i \equiv 2 \pmod 4 \\ \frac{1}{2}(20n+3+i), & \text{untuk } i \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

2. Kasus 2: Untuk $n \equiv 3 \pmod 4$.

$$w(u_iv_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}(19n+3+i), & \text{untuk } i \equiv 0 \pmod 4 \\ \frac{1}{2}(20n+3+i), & \text{untuk } i \equiv 1 \pmod 4 \\ \frac{1}{2}(17n+3+i), & \text{untuk } i \equiv 2 \pmod 4 \\ \frac{1}{2}(18n+3+i), & \text{untuk } i \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

Misalkan W_g adalah himpunan bobot sisi, jadi himpunan semua bobot sisi terhadap pelabelan total g dari sisi-sisi $u_iu_{i+1}, v_iv_{i+2}, u_iv_i$, untuk $i \in \{0,1,2,,n-1\}$, pada Graf Petersen $P(n,2)$ adalah sebagai berikut:

$$W_{g_1} \cup W_{g_2} \cup W_{g_3} \cup W_{g_4} = \left(\frac{1}{2}(9n+5), \frac{1}{2}(9n+5)+2, \frac{1}{2}(9n+5)+4, \ldots, \frac{1}{2}(21n+1)\right).$$

Dari Teorema 3.1 untuk n ganjil ($n \geq 3$), Graf Petersen $P(n,2)$ mempunyai pelabelan total (a,d)-sisi antiajaib dengan $a = \frac{1}{2}$ (9n+5) dan $d = 2$. $\square$

4 Kesimpulan

Pada tulisan ini telah ditunjukkan bahwa Graf Petersen $P(n,2)$ dengan n ganjil ($n \geq 3$) mempunyai pelabelan total (a,d)-sisi antiajaib dengan $a = \frac{1}{2}(9n+5)$ dan $d = 2$.

5 Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Narwen, Bapak Ahmad Iqbal Baqi, Ibu Lyra Yulianti, Bapak Admi Nazra, dan Bapak Zulakmal yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

6 Daftar Pustaka

1. A.A.G. Ngurah and E.T. Baskoro, On magic and Antimagic Labeling of Generalized Petersen Graph, *Utilitas Math.* **63** (2003), 97 - 107.
2. M.E. Watkins, A Theorem on Tait Colorings with an application to the Generalized Petersen Graphs, *J. Combin. Theory* **6** (1969), 152 - 164.
3. Miller, Mirka. 2000. Open Problem in Graph Theory : Labeling and Extremal Graphs, *Prosiding Konferensi Nasional Himpunan Matematika Indonesia X*, Institut Teknologi Bandung