Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VI** No. **3** Hal. 100 – 105
ISSN : 2303–2910

NORMALISASI POSITIF SISTEM DESKRIPTOR KONTINU

WIDYA WULANDARI, ZULAKMAL
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email : widyawulandari070809@gmail.com

Abstract. Dalam makalah ini dikaji masalah normalisasi positif sistem deskriptor kontinu $E\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$ dengan rank$(E) < n$, yaitu bagaimana syarat eksistensi matriks $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sedemikian sehingga $\det(E + BK) \neq 0$ dan sistem $\dot{\mathbf{x}} = (E + BK)^{-1}A\mathbf{x}$ adalah positif.

Kata Kunci: Matriks, monomial, rank, determinan, sistem deskriptor, normalisasi, positif

1. PENDAHULUAN

Diberikan sistem linier berikut :

$$E\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u},\ \mathbf{x(0)} = \mathbf{x}_0, \tag{1.1}$$

dimana $E, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ menyatakan variabel keadaan, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ menyatakan variabel kontrol. Sistem (1.1) sering juga disebut dengan sistem deskriptor kontinu [1].

Sistem (1.1) dengan rank$(E) < n$ mempunyai solusi jika $\det(\lambda E - A) \neq 0$ untuk suatu $\lambda \in \mathbb{C}$. Dalam hal ini, sistem (1.1) disebut sebagai sistem deskriptor reguler.

Dalam beberapa situasi kadang-kadang diperlukan upaya untuk menormalkan sistem (1.1). Dalam [1] dinyatakan bahwa sistem (1.1) dapat dinormalkan jika terdapat suatu kontrol $\mathbf{u} = -K\dot{\mathbf{x}}$, untuk suatu $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sedemikian sehingga $\det(E + BK) \neq 0$. Dengan $\mathbf{u} = -K\dot{\mathbf{x}}$ ini, sistem (1.1) dapat diubah menjadi

$$(E + BK)\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \tag{1.2}$$

Jelas bahwa jika $\det(E + BK) \neq 0$, maka sistem (1.2) menjadi normal, yaitu

$$\dot{\mathbf{x}} = (E + BK)^{-1}A\mathbf{x} \tag{1.3}$$

Dalam makalah ini akan dibicarakan masalah normalisasi positif dari sifat (1.1) yaitu bagaimana syarat matriks $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sedemikian sehingga $\det(E + BK) \neq 0$ dan sistem (1.3) adalah positif, yaitu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$.

2. LANDASAN TEORI

2.1. *Teori Matriks*

Teorema berikut diperlukan untuk mendapatkan hasil yang diinginkan.

Teorema 2.1. [1] *Diberikan*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{2.1}$$

dimana $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$, $i, j = 1, 2$ *dan* $n_1 + n_2 = n$.

1. *Misalkan* A_{11} *adalah matriks non singular dan didefinisikan*

$$\phi = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \tag{2.2}$$

maka

$$det(A) = det(A_{11})det(\phi) = det(A_{11})det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}), \tag{2.3}$$

sehingga matriks A *adalah nonsingular jika dan hanya jika* ϕ *adalah nonsingular. Jadi*

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}\phi^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}\phi^{-1} \\ -\phi^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & \phi^{-1} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

2. *Misalkan* A_{22} *adalah matriks non singular dan didefinisikan*

$$\psi = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} \tag{2.5}$$

maka

$$det(A) = det(A_{22})det(\psi) = det(A_{22})det(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) \tag{2.6}$$

sehingga matriks A *adalah nonsingular jika dan hanya jika* ψ *adalah nonsingular. Jadi*

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \psi^{-1} & -\psi^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}\psi^{-1} & A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}A_{21}\psi^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

Definisi 2.2. [4]

(i). Matriks $M \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ *dan* $N \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ *dikatakan ekuivalen positif jika terdapat dua matriks monomial* P *dan* Q *sedemikian sehingga*

$$N = QMP \tag{2.8}$$

(ii). Diberikan matriks $M \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ *dengan rank(*M*)* $= r$. *Matriks* M *dikatakan* r*-monomial jika ia ekuivalen positif dengan matriks*

$$\begin{bmatrix} M_r & O \\ O & O \end{bmatrix}, \tag{2.9}$$

dimana M_r *adalah matriks monomial.*

Proposisi 2.3. [4]

(i). Matriks M adalah r-monomial jika dan hanya jika matriks M mempunyai (n-r) baris dan (n-r) kolom dengan semua entri-entrinya sama dengan nol dan r baris dan r kolom dengan hanya satu entri yang tidak sama dengan nol.

(ii). Jika matriks M adalah r-monomial, maka matriks M ekuivalen positif dengan matriks

$$\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

2.2. *Sistem Linier Normal Positif*

Diberikan sistem linier normal berikut

$$\dot{\mathbf{x}} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u},\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.11}$$

dimana $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dan $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

Solusi dari sistem (2.11) diberikan sebagai berikut [3]

$$\mathbf{x}(t) = e^{Ct}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{C(t-\tau)} D\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{2.12}$$

3. NORMALISASI POSITIF SISTEM DESKRIPTOR KONTINU

Pada pendahuluan telah dinyatakan bahwa sistem (1.1) dikatakan dapat dinormalkan jika terdapat suatu kontrol $\mathbf{u} = -K\dot{\mathbf{x}}$, untuk suatu $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sedemikian sehingga $\det(E + BK) \neq 0$.

Proposisi 3.1. [1] *Sistem (1.1) dapat dinormalkan jika dan hanya jika rank$\big[E\ B\big] = n$.*

Asumsikan matriks E ekivalen positif dengan suatu matriks $r-monomial$ sebutlah M_r, maka terdapat matriks *monomial* Q, $P \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ sedemikian sehingga

$$QEP = \begin{bmatrix} Mr & O \\ O & O \end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

Misalkan

$$QB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Maka syarat rank$\big[E\ B\big] = n$ ekivalen dengan matriks B_2 mempunyai $full\ row\ rank$, yaitu $(n-r)$. Hal ini dapat dibuktikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \texttt{rank}\left[E\ B\right] = n &\Leftrightarrow \texttt{rank}\left[QEP\ QB\right] = n \\ &\Leftrightarrow \texttt{rank}\begin{bmatrix} M_r & O & B_1 \\ O & O & B_2 \end{bmatrix} = n. \end{aligned}$$

Karena rank(M_r)= r, maka mestilah rank(B_2) = $(n-r)$.

Berikut ini diberikan syarat cukup untuk menyelesaikan masalah normalisasi dengan kondisi sistem yang positif.

Teorema 3.2. [4] *Diberikan sistem (1.1) dengan E dan B diberikan oleh (3.1) dan (3.2) dimana rank(B_2) = $(n-r)$ dan $A \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$. Maka terdapat matriks $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sedemikian sehingga det($E+BK$) $\neq$ 0 dan sistem (1.3) adalah positif jika*

a) $(B_2B_2^T)^{-1} \in \mathbb{R}_+^{(n-r)\times(n-r)}$;
b) $B_1B_2^T \in \mathbb{R}_-^{r\times(n-r)}$;
c) $(B_2B_2^T)^{-1}B_2 \in \mathbb{R}_+^{(n-r)\times m}$;
d) $B_1 - B_1B_2^T(B_2B_2^T)^{-1}B_2 \in \mathbb{R}_+^{r\times m}$.

Bukti. Misalkan

$$K = \begin{bmatrix} O & B_2^T \end{bmatrix} P^{-1}, \tag{3.3}$$

maka

$$\begin{aligned} E{+}BK &= Q^{-1}\begin{bmatrix} M_r & O \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1} + Q^{-1}QBK \\ &= Q^{-1}\begin{bmatrix} M_r & O \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1} + Q^{-1}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & B_2^T \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= Q^{-1}\begin{bmatrix} M_r & O \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1} + Q^{-1}\begin{bmatrix} O & B_1B_2^T \\ O & B_2B_2^T \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= Q^{-1}\begin{bmatrix} M_r & B_1B_2^T \\ O & B_2B_2^T \end{bmatrix} P^{-1}. \end{aligned}$$

Karena rank(B_2) = $(n-r)$, maka $(E+BK)$ adalah nonsingular, sehingga det$(E+BK) \neq 0$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa sistem (1.3) adalah positif. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} (E{+}BK)^{-1} &= \left(Q^{-1}\begin{bmatrix} M_r & B_1B_2^T \\ O & B_2B_2^T \end{bmatrix} P^{-1}\right)^{-1} \\ &= P\begin{bmatrix} M_r & B_1B_2^T \\ O & B_2B_2^T \end{bmatrix}^{-1} Q. \end{aligned}$$

Dari (2.7) diperoleh

$$\begin{aligned} (E{+}BK)^{-1} &= P\begin{bmatrix} M_r^{-1} & -M_r^{-1}B_1B_2^T(B_2B_2^T)^{-1} \\ O & (B_2B_2^T)^{-1} \end{bmatrix} Q \\ &= P\begin{bmatrix} M_r^{-1} & O \\ O & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -B_1B_2^T(B_2B_2^T)^{-1} \\ O & (B_2B_2^T)^{-1} \end{bmatrix} Q. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Dari kondisi (a) dan (b) diperoleh $(E{+}BK)^{-1} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ sehingga mengakibatkan $(E{+}BK)^{-1}A \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ dan sekaligus matriks Metzler. Selain itu, dari kondisi (c) dan (d) mengakibatkan $(E{+}BK)^{-1}B \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$. Sehingga sistem (1.3) adalah positif. □

Contoh 3.3. *Diberikan sistem (1.1) dengan*

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Dapat diperiksa bahwa rank(E) = 3 dan rank$\begin{bmatrix} E & B \end{bmatrix}$ *= 5. Misalkan*

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; dan \; P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

maka diperoleh QEP adalah matriks 3-monomial yaitu

$$QEP = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; dan \; QB = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Selain itu,

$$B_1 B_2^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_-^{3\times 2}, \; (B_2 B_2^T)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{2\times 2},$$

$$(B_2 B_2^T)^{-1} B_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{2\times 2}, \; B_1 - B_1 B_2^T (B_2 B_2^T)^{-1} B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{3\times 2}.$$

Dari (3.3) diperoleh matriks $K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, *maka*

$$det(E + BK) = det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \neq 0 \tag{3.5}$$

Selanjutnya

$$(E + BK)^{-1} A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{2} & \frac{11}{8} & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{5\times 5}, \; (E + BK)^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{5\times 2}.$$

Karena $(E + BK)^{-1} A \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ *adalah matriks Metzler dan* $(E + BK)^{-1} B \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$, *maka sistem (1.3) merupakan sistem normal positif.*

Daftar Pustaka

[1] Duan, G. R. 2010. *Analysis and Design of Descriptor Linier System.* Springer, New York.
[2] Kaczorek, T. 2002. *Positive 1D and 2D systems.* Springer, London.
[3] Putri, N. 2016. *Masalah Kontrol Optimal Kuadratik untuk Sistem Linear Time Invariant Positif Stabil Asimtotik.* Universitas Andalas, Padang.
[4] Sanches E, B. Canto, C. Coll.2006. Positive *Normalizable Singular System.* Departement de Matematic Aplicada, Universitat Politeenica de Valencia, 46071 Valencia, Spain.