Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VI** No. **3** Hal. 106 – 111
ISSN : 2303–2910

SUATU KAJIAN TENTANG OPERATOR-OPERATOR BARU PADA HIMPUNAN KABUR HESITANT (*NEW HESITANT FUZZY OPERATORS*)

WINDY AULIA YUSPA
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email : windyauliayuspa01@gmail.com

Abstrak. Himpunan kabur *hesitant* adalah alat yang muncul dan berguna untuk berurusan dengan ketidakpastian dan ketidakjelasan. Menariknya, kita dapat menentukan operator baru dan sifat dari himpunan kabur *hesitant* ini, agar kajian tentang himpunan kabur *hesitant* lebih berkembang. Pada makalah ini dikaji enam operator-operator baru pada anggota himpunan kabur *hesitant* $(O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6)$ dan sifat-sifat nya.

Kata Kunci: Himpunan kabur (FS), himpunan kabur hesitant (HFS), anggota himpunan kabur hesitant (HFE), operator

1. Pendahuluan

Dalam kehidupan nyata, ada banyak masalah rumit dalam bidang teknik, ekonomi, ilmu sosial, ilmu kedokteran, dan berbagai bidang lainnya yang melibatkan data yang tidak semuanya selalu tegas (*crisp*), tepat dan deterministik, karena berbagai jenis masalah yang tidak pasti. Masalah ketidakpastian seperti ini dapat ditangani dengan bantuan teori-teori, seperti teori probabilitas, teori himpunan kabur (*fuzzy set/FS*), teori himpunan kabur *intuitionistic*, teori himpunan kabur *hesitant*, dan lain-lain.

Zadeh [5] adalah orang yang pertama kali memperkenalkan teori *FS*. Dalam teori *FS* dikaji tentang derajat keanggotaan (*dk*) dari suatu elemen dalam suatu *FS* yang mana *dk* tersebut dinyatakan dengan suatu nilai tunggal dalam interval 0 dan 1.

Dalam beberapa kasus nyata di lapangan, ditemukan bahwa *dk* dari suatu elemen tidaklah selalu tunggal tetapi merupakan himpunan dari beberapa nilai yang berbeda antara 0 dan 1. Untuk mengatasi masalah ini, dimana para pengambil keputusan ragu-ragu (*hesitant*) dalam menyatakan pilihan mereka atas beberapa alternatif pilihan nilai keanggotaan dari suatu elemen, maka akhir-akhir ini Torra dkk [2] memperkenalkan konsep himpunan kabur *hesitant* (*Hesitant Fuzzy Set/HFS*) sebagai suatu pengembangan baru dari *FS* klasik.

Himpunan kabur *hesitant* adalah alat yang muncul dan berguna untuk berurusan dengan ketidakpastian dan ketidakjelasan. Menariknya, kita dapat menentukan operator baru dan sifat dari himpunan kabur *hesitant* ini, agar kajian tentang himpunan kabur *hesitant* lebih berkembang. Pada tahun 2014, G.S Thakur dkk [1] mengusulkan empat operator baru pada himpunan kabur *hesitant* untuk mengkaji sifat-sifat baru yang terdapat pada himpunan kabur *hesitant*.

Pada makalah ini akan dikaji kembali tulisan dari G.S Thakur dkk [1] yang memperkenalkan empat operator-operator baru pada himpunan kabur *hesitant* (*Hesitant Fuzzy Set/HFS*) dan dua operator baru lainnya yang didefinisikan oleh penulis sendiri.

2. Himpunan Kabur Hesitant

Himpunan kabur *hesitant* (*HFS*) merupakan suatu alat yang digunakan untuk mengekspresikan situasi keadaan dimana orang-orang memiliki pendapat berbeda dalam pengambilan keputusan. Setiap anggota *HFS* memiliki derajat keanggotaan pada selang $[0,1]$.

Definisi 2.1. *[4] Misalkan* $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ *adalah himpunan tetap, suatu himpunan kabur hesitant A pada X dapat dinyatakan sebagai:*

$$A = \{\langle x, h_A(x)\rangle \,| x \in X\} \tag{2.1}$$

dimana $h_A(x)$ *merupakan himpunan bilangan riil yang berada pada selang* $[0,1]$ *yang menotasikan derajat keanggotaan yang memungkinkan dari* $x \in X$ *pada A.*

Definisi 2.2. *[3] Misalkan A suatu himpunan kabur* hesitant*, jika* $h_A(x) = \{0\}$ *untuk setiap* $x \in X$ *, maka A dikatakan himpunan kosong kabur* hesitant *yang dilambangkan dengan* $\emptyset$. *Jika* $h_A(x) = \{1\}$ *untuk setiap* $x \in X$ *, maka A dikatakan himpunan penuh kabur hesitant yang dilambangkan dengan* $\tilde{1}$.

3. Anggota Himpunan Kabur Hesitant (*Hesitant Fuzzy Element*)

Pada Definisi 2.1 telah didefinisikan tentang himpunan kabur *hesitant* dimana, $h_A(x)$ adalah himpunan bilangan-bilangan riil yang berada pada selang [0,1], dimana nilai ini menunjukkan setiap derajat keanggotaan yang mungkin dari $x \in X$ untuk himpunan A. Dalam hal ini dapat ditulis

$$h_A(x) = \{\, \gamma \in [0,1]\,|\, \gamma \text{ adalah derajat keanggotaan dari } x \in X\,\}.$$

Untuk lebih jelasnya dinotasikan $h = h_A(x)$ dan disebut dengan anggota himpunan kabur *hesitant* (*hesitant fuzzy element*) yang selanjutnya akan disingkat dengan HFE dari A [4].

4. Operasi pada Anggota Himpunan Kabur *Hesitant*

Definisi 4.1. *[2], [3] Misalkan h,* h_1 *dan* h_2 *adalah HFE maka dapat didefinisikan operasi pada HFE sebagai berikut.*

(1) $h^c = \cup_{\gamma \in h} \{1 - \gamma\}$.
(2) $h_1 \cup h_2 = \cup_{\gamma_1 \in h_1, \gamma_2 \in h_2} \max\{\gamma_1, \gamma_2\}$.
(3) $h_1 \cap h_2 = \cup_{\gamma_1 \in h_1, \gamma_2 \in h_2} \min\{\gamma_1, \gamma_2\}$.

Definisi 4.2. *[4] Misalkan* h, h_1, h_2 *adalah HFE dan* $\lambda > 0$, *maka dapat didefenisikan operasi pada HFE sebagai berikut.*

(1) $h^\lambda = \bigcup_{\gamma \in h} \{\gamma^\lambda\}$.
(2) $\lambda h = \bigcup_{\gamma \in h} \{1 - (1-\gamma)^\lambda\}$.
(3) $h_1 \oplus h_2 = \bigcup_{\gamma_1 \in h_1, \gamma_2 \in h_2} \{\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_1\gamma_2\}$.
(4) $h_1 \otimes h_2 = \bigcup_{\gamma_1 \in h_1, \gamma_2 \in h_2} \{\gamma_1\gamma_2\}$.

5. Operator Baru Anggota Himpunan Kabur *Hesitant*

Definisi 5.1. *Misalkan* h_1 *dan* h_2 *adalah HFE, maka dapat didefinisikan operator baru HFE* O_1, O_2, O_3 *dan* O_4 *sebagai berikut.*

(1) $h_1\ O_1\ h_2 = \bigcup_{\gamma_1 \in h_1, \gamma_2 \in h_2} \left\{ \dfrac{|\gamma_1 - \gamma_2|}{1 + |\gamma_1 - \gamma_2|} \right\}$.
(2) $h_1\ O_2\ h_2 = \bigcup_{\gamma_1 \in h_1, \gamma_2 \in h_2} \left\{ \dfrac{|\gamma_1 - \gamma_2|}{1 + 2|\gamma_1 - \gamma_2|} \right\}$.
(3) $h_1\ O_3\ h_2 = \bigcup_{\gamma_1 \in h_1, \gamma_2 \in h_2} \left\{ \dfrac{|\gamma_1 - \gamma_2|}{2} \right\}$.
(4) $h_1\ O_4\ h_2 = \bigcup_{\gamma_1 \in h_1, \gamma_2 \in h_2} \left\{ \dfrac{\gamma_1 \times \gamma_2}{2} \right\}$.

Definisi 5.2. *Misalkan* h_1 *dan* h_2 *adalah HFE, didefinisikan operator baru HFE* O_5 *dan* O_6 *sebagai berikut.*

(1) $h_1\ O_5\ h_2 = \bigcup_{\gamma_1 \in h_1, \gamma_2 \in h_2} \left\{ \dfrac{\gamma_1 \times \gamma_2}{1 + (\gamma_1 \times \gamma_2)} \right\}$.
(2) $h_1\ O_6\ h_2 = \bigcup_{\gamma_1 \in h_1, \gamma_2 \in h_2} \left\{ \dfrac{\gamma_1 \times \gamma_2}{1 + 2(\gamma_1 \times \gamma_2)} \right\}$.

6. Sifat-sifat Operator Baru Anggota Himpunan Kabur *Hesitant*

Teorema 6.1. *[1] Untuk* h_1 *dan* h_2 *yang merupakan HFE, dapat berlaku sifat-sifat berikut.*

(i) $(h_1 \oplus h_2) \cap (h_1\ O_1\ h_2) = (h_1\ O_1\ h_2)$,
(ii) $(h_1 \oplus h_2) \cup (h_1\ O_1\ h_2) = (h_1 \oplus h_2)$,
(iii) $(h_1 \oplus h_2) \cap (h_1\ O_2\ h_2) = (h_1\ O_2\ h_2)$,
(iv) $(h_1 \oplus h_2) \cup (h_1\ O_2\ h_2) = (h_1 \oplus h_2)$,
(v) $(h_1 \oplus h_2) \cap (h_1\ O_3\ h_2) = (h_1\ O_3\ h_2)$,
(vi) $(h_1 \oplus h_2) \cup (h_1\ O_1\ h_2) = (h_1 \oplus h_2)$,
(vii) $(h_1 \oplus h_2) \cap (h_1\ O_4\ h_2) = (h_1\ O_4\ h_2)$,
(viii) $(h_1 \oplus h_2) \cup (h_1\ O_4\ h_2) = (h_1 \oplus h_2)$,
(ix) $(h_1 \otimes h_2) \cap (h_1\ O_4\ h_2) = (h_1\ O_4\ h_2)$,
(x) $(h_1 \otimes h_2) \cup (h_1\ O_4\ h_2) = (h_1 \otimes h_2)$.

Bukti. Berikut bukti dari Teorema 6.1(i).
(i) $(h_1 \oplus h_2) \cap (h_1\ O_1\ h_2) = (h_1\ O_1\ h_2)$.

Berdasarkan Definisi 4.2(3) dan Definisi 5.1(1), diperoleh

$$
\begin{aligned}
(h_1 \oplus h_2) \cap (h_1 O_1 h_2) &= \left(\bigcup_{\gamma_1 \in h_1, \gamma_2 \in h_2} \{\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_1\gamma_2\} \right) \bigcap \left(\bigcup_{\gamma_1 \in h_1, \gamma_2 \in h_2} \left\{ \frac{|\gamma_1 - \gamma_2|}{1 + |\gamma_1 - \gamma_2|} \right\} \right), \\
&= \bigcup_{\gamma_1 \in h_1, \gamma_2 \in h_2} \min \left\{ \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_1\gamma_2, \frac{|\gamma_1 - \gamma_2|}{1 + |\gamma_1 - \gamma_2|} \right\}, \\
&= \bigcup_{\gamma_1 \in h_1, \gamma_2 \in h_2} \left\{ \frac{|\gamma_1 - \gamma_2|}{1 + |\gamma_1 - \gamma_2|} \right\}, \qquad (6.1) \\
&= h_1 \ O_1 \ h_2.
\end{aligned}
$$

Untuk bukti yang lainnya merujuk pada bukti Teorema 1 (i). □

Teorema 6.2. *[1] Untuk h_1 dan h_2 yang merupakan HFE, dapat berlaku sifat-sifat berikut.*

(1) $h_1^c \ O_1 \ h_2^c = h_1 \ O_1 \ h_2$,
(2) $h_1^c \ O_2 \ h_2^c = h_1 \ O_2 \ h_2$,
(3) $h_1^c \ O_3 \ h_2^c = h_1 \ O_3 \ h_2$,

Bukti. Berikut bukti dari Teorema 6.2(1).
(1) $h_1^c \ O_1 \ h_2^c = h_1 \ O_1 \ h_2$.
Berdasarkan Definisi 4.1(i) dan Definisi 5.1(1), diperoleh

$$
\begin{aligned}
h_1^c O_1 h_2^c &= \left(\bigcup_{\gamma_1 \in h_1} \{1 - \gamma_1\} \right) O_1 \left(\bigcup_{\gamma_2 \in h_2} \{1 - \gamma_2\} \right), \\
&= \bigcup_{\gamma_1 \in h_1, \gamma_2 \in h_2} \left(\{ \frac{|(1 - \gamma_1) - (1 - \gamma_2)|}{1 + |(1 - \gamma_1) - (1 - \gamma_2)|} \} \right), \\
&= \bigcup_{\gamma_1 \in h_1, \gamma_2 \in h_2} \left\{ \frac{|(1 - \gamma_1 - 1 + \gamma_2)|}{1 + |(1 - \gamma_1 - 1 + \gamma_2)|} \right\}, \\
&= \bigcup_{\gamma_1 \in h_1, \gamma_2 \in h_2} \left\{ \frac{|\gamma_1 - \gamma_2|}{1 + |\gamma_1 - \gamma_2|} \right\}, \\
&= h_1 O_1 h_2.
\end{aligned}
$$

Untuk bukti yang lainnya merujuk pada bukti Teorema 2(1). □

Pada [1] diberikan Teorema 6.3 beserta pembuktiannya yang tidak valid. Oleh karena itu, pada bagian berikut diberikan asumsi baru sehingga Teorema 6.3 tersebut menjadi valid.

Teorema 6.3. *Untuk h_1, h_2 dan h_3 yang merupakan HFE dan diasumsikan bahwa $\forall \gamma_1 \in h_1$, $\forall \gamma_2 \in h_2$ dan $\forall \gamma_3 \in h_3$ dimana $\gamma_1 > \gamma_3$ dan $\gamma_2 > \gamma_3$, dapat berlaku sifat-sifat berikut.*

(a) $(h_1 \cup h_2) \ O_1 \ h_3 = (h_1 \ O_1 \ h_3) \cup (h_2 \ O_1 \ h_3)$,

(b) $(h_1 \cap h_2)\ O_1\ h_3 = (h_1\ O_1\ h_3) \cap (h_2\ O_1\ h_3)$,
(c) $(h_1 \cup h_2)\ O_2\ h_3 = (h_1\ O_2\ h_3) \cup (h_2\ O_2\ h_3)$,
(d) $(h_1 \cap h_2)\ O_2\ h_3 = (h_1\ O_2\ h_3) \cap (h_2\ O_2\ h_3)$,
(e) $(h_1 \cup h_2)\ O_3\ h_3 = (h_1\ O_3\ h_3) \cup (h_2\ O_3\ h_3)$,
(f) $(h_1 \cap h_2)\ O_3\ h_3 = (h_1\ O_3\ h_3) \cap (h_2\ O_3\ h_3)$,
(g) $(h_1 \cup h_2)\ O_4\ h_3 = (h_1\ O_4\ h_3) \cup (h_2\ O_4\ h_3)$,
(h) $(h_1 \cap h_2)\ O_4\ h_3 = (h_1\ O_4\ h_3) \cap (h_2\ O_4\ h_3)$.

Bukti. Berikut bukti dari Teorema 6.3(a).
(a) $(h_1 \cup h_2)\ O_1\ h_3 = (h_1\ O_1\ h_3) \cup (h_2\ O_1\ h_3)$
Berdasarkan Definisi 4.1(ii) dan Definisi 5.1(i), diperoleh

$$\begin{aligned}
(h_1 \cup h_2) O_1 h_3 &= \left(\bigcup_{\gamma_1 \in h_1, \gamma_2 \in h_2} \max\{\gamma_1, \gamma_2\} \right) O_1 \left(\bigcup_{\gamma_3 \in h_3} \{\gamma_3\} \right), \\
&= \left(\bigcup_{\gamma_1 \in h_1, \gamma_2 \in h_2, \gamma_3 \in h_3} \left\{ \frac{|\max\{\gamma_1, \gamma_2\} - \gamma_3|}{1 + |\max\{\gamma_1, \gamma_2\} - \gamma_3|} \right\} \right), \\
&= \left(\bigcup_{\gamma_1 \in h_1, \gamma_2 \in h_2, \gamma_3 \in h_3} \max\left\{ \frac{|\gamma_1 - \gamma_3|}{1 + |\gamma_1 - \gamma_3|}, \frac{|\gamma_2 - \gamma_3|}{1 + |\gamma_2 - \gamma_3|} \right\} \right), \\
&= (h_1 O_1 h_3) \cup (h_2 O_1 h_3).
\end{aligned}$$

Untuk bukti yang lainnya merujuk pada bukti Teorema 3(a). □

7. Kesimpulan

Terdapat enam operator baru pada HFE yang merupakan anggota-anggota dari himpunan kabur *hesitant (HFS)*. Dari enam operator baru itu, dua di antaranya didefinisikan oleh penulis sendiri. Untuk dua atau lebih HFE kita dapat menunjukkan beberapa sifat aljabar dari operator-operator tersebut. Beberapa dari sifat-sifat operator tersebut memenuhi hukum distributif.

8. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Dr. Admi Nazra, Dr. Yanita, Dr. Muhafzan, Zulakmal, M.Si, Narwen, M.Si dan Dr. Haripamyu yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Thakur, G.S, Thakur, R dan Singh, R. 2014. New Hesitant Fuzzy Operators. *Fuzzy Information and Engineering.* **6**: 379 – 392
[2] Torra, V. 2010. Hesitant Fuzzy Sets. *Intenational Journal of Intelligent Systems* **25**(6) : 529 – 539
[3] Torra, V and Narukawa, Y. 2009. On Hesitant Fuzzy Sets and Decision. *Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems.* pp 1378 – 1382. Republic of Korea : Jeju-do

[4] Xia, M.M dan Xu, Z.S. 2011. Hesitant fuzzy information aggregation in decision making. *International Journal of Approximate Reasonig.* **3**: 395 – 407
[5] Zadeh, L.A. 1965. Fuzzy Sets.*Information and Control* **8** : 338 – 353