Jurnal Matematika UNAND
Vol. **2** No. **2** Hal. 108 – 114
ISSN : 2303–291X

GELANGGANG ARTIN

IMELDA FAUZIAH, NOVA NOLIZA BAKAR, ZULAKMAL
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
imeldafauziah@rocketmail.com, kieknova@gmail.com, zul-akmal@fmipa.unand.ac.id

Abstract. A nonempty set R is said to be a ring if we can define two binary operations in R, denoted by $+$ and $\cdot$ respectively, such that for all $a, b, c \in R$, R is an Abelian group under addition, closed under multiplication, and satisfy the associative law under multiplication and distributive law. Let R be a ring. R is an Artin ring if every nonempty set of ideals has the minimal element. In this paper, the Artin ring and some characteristics of it will be discussed.

Kata Kunci: Artin ring, prim ideal, maximal ideal, nilradikal.

1. Pendahuluan

Gelanggang dan ideal adalah topik yang sangat menarik dalam aljabar. Ada beberapa konsep yang dikembangkan dengan menggunakan ideal pada gelanggang, diantaranya gelanggang Noether dan gelanggang Artin. Noether menemukan konsep kondisi rantai naik (*Ascending Chain Condition*) yang disingkat ACC dan Artin menemukan konsep kondisi rantai turun (*Descending Chain Condition*) atau DCC.

Misalkan $(R, \subseteq)$ suatu himpunan terurut parsial terhadap relasi $\subseteq$. suatu himpunan tak kosong $\mathfrak{M}$ dikatakan memenuhi kondisi rantai naik jika $\mathfrak{M}$ suatu keluarga himpunan dari $(R, \subseteq)$ dengan $M_1, M_2, \cdots \in \mathfrak{M}$ membentuk rantai $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_k = M_{k+1} = \cdots = M_n$ yang stasioner, dimana $n, k \in \mathbb{N}$. Suatu himpunan tak kosong $\mathfrak{M}$ dikatakan memenuhi kondisi rantai turun jika $\mathfrak{M}$ suatu keluarga himpunan dari $(R, \supseteq)$ dengan $M_1, M_2, \cdots \in \mathfrak{M}$ membentuk rantai $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_k = M_{k+1} = \cdots = M_n$ yang stasioner, dimana $n, k \in \mathbb{N}$. Dalam hal ini rantai dikatakan stasioner karena terdapat indeks k sedemikian sehingga $M_n = M_k$ untuk suatu bilangan asli $n \geq k$.

Selanjutnya, Noether dan Artin menemukan bahwa ACC dan DCC dapat diterapkan pada modul dan gelanggang. Modul yang memenuhi ACC dikenal dengan modul Noether dan modul yang memenuhi DCC dikenal dengan modul Artin. Pada paper ini akan dibahas masalah gelanggang Artin.

2. Landasan Teori

Definisi 2.1. [2] *Suatu himpunan tak kosong R dikatakan membentuk gelanggang jika pada R didefinisikan dua operasi biner penjumlahan dan perkalian sedemikian sehingga untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku*

(1) $a + b \in R$,
(2) $a + b = b + a$,
(3) $(a + b) + c = a + (b + c)$,
(4) *Terdapat unsur* 0 *di* R *sedemikian sehingga* $a + 0 = 0 + a = a$, *untuk setiap* $a \in R$ *(0 disebut unsur satuan terhadap operasi penjumlahan),*
(5) *Terdapat unsur* $-a \in R$ *sedemikian sehingga* $a + (-a) = (-a) + a = 0$,
(6) $a \cdot b \in R$,
(7) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,
(8) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *dan* $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.

Aksioma 1 sampai dengan 5 menyatakan bahwa R merupakan suatu grup komutatif terhadap operasi penjumlahan. Aksioma 6 dan 7 berturut-turut menyatakan bahwa R tertutup dan memenuhi sifat asosiatif terhadap operasi perkalian. Sedangkan pada aksioma 8 terdapat hukum distributif kiri dan kanan yang menunjukkan hubungan antara kedua operasi di atas.

Definisi 2.2. [1] *Misalkan* R *gelanggang dan* $I \subseteq R$. I *disebut ideal dari* R *jika*

(1) I *membentuk subgrup dari* R *terhadap operasi penjumlahan,*
(2) Untuk setiap $r \in R$ *dan* $i \in I$ *berlaku* $r \cdot i \in I$,
(3) Untuk setiap $r \in R$ *dan* $i \in I$ *berlaku* $i \cdot r \in I$.

Definisi 2.3. [**3**] *Misalkan* $(S, \supseteq)$ *adalah himpunan terurut parsial terhadap relasi* $\supseteq$ *dan* $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n\}$ *adalah subhimpunan tak kosong dari* $(S, \supseteq)$. $A_n \in \mathfrak{A}$ *disebut unsur minimal dari* $\mathfrak{A}$ *jika* $A_r \supseteq A_n$, *untuk* $1 \leq r \leq n$. *Dengan kata lain, tidak ada unsur lain di* $\mathfrak{A}$ *yang lebih kecil dari* A_n.

3. Gelanggang Artin

Definisi 3.1. [**4**] *Misalkan* R *suatu gelanggang.* R *disebut gelanggang Artin jika setiap rantai turun atas idealnya membentuk rantai turun yang stasioner. Atau secara ekuivalen,* R *gelanggang Artin jika setiap himpunan tak kosong atas idealnya memuat suatu unsur minimal.*

Contoh 3.2. Himpunan bilangan bulat modulo 10, dinotasikan $\mathbb{Z}_{10}$, membentuk gelanggang Artin. Hal ini disebabkan karena $\mathbb{Z}_{10}$ membentuk gelanggang terhadap operasi penjumlahan dan perkalian pada $\mathbb{Z}_{10}$, masing-masing $+_{10}$ dan $\cdot_{10}$. Untuk mempermudah membuktikannya, digunakan tabel Cayley untuk $\mathbb{Z}_{10}$ berikut.

Dengan menggunakan Tabel 1, diperoleh bahwa untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_{10}$ berlaku:

(1) $a +_{10} b \in \mathbb{Z}_{10}$.
(2) $a +_{10} b = b +_{10} a$.
(3) $(a +_{10} b) +_{10} c = a +_{10} (b +_{10} c)$. Misalkan ambil $a = 2$, $b = 9$, dan $c = 7$. Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}(a +_{10} b) +_{10} c &= (2 +_{10} 9) +_{10} 7\\ &= 1 +_{10} 7\\ &= 8,\end{aligned}$$

$+_{10}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$
$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$

Tabel 1. Tabel Cayley untuk $(\mathbb{Z}_{10}, +_{10})$

$\cdot_{10}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{8}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{7}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$
$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$
$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Tabel 2. Tabel Cayley untuk $(\mathbb{Z}_{10}, \cdot_{10})$

dan

$$\begin{aligned} a +_{10} (b +_{10} c) &= 2 +_{10} (9 +_{10} 7) \\ &= 2 +_{10} 6 \\ &= 8. \end{aligned}$$

Jadi, jelas bahwa $(a +_{10} b) +_{10} c = a +_{10} (b +_{10} c)$.

(4) Terdapat unsur 0 di $\mathbb{Z}_{10}$ sedemikian sehingga $a +_{10} 0 = 0 +_{10} a = a$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_{10}$ (0 disebut unsur satuan di $\mathbb{Z}_{10}$),

(5) Setiap unsur di $\mathbb{Z}_{10}$ mempunyai invers terhadap operasi penjumlahan modulo 10. Misalkan ambil $a \in \mathbb{Z}_{10}$. Untuk $a = 0$, inversnya adalah 0 karena $0 +_{10} 0 = 0 +_{10} 0 = 0$. Sedangkan untuk $a \neq 0$, inversnya adalah $10 - a$ karena $a +_{10} (10 - a) = (10 - a) +_{10} a = 0$.

Dari $(1), (2), (3), (4)$,dan (5), jelas bahwa $\mathbb{Z}_{10}$ membentuk grup komutatif terhadap operasi penjumlahan. Selanjutnya, akan ditunjukkan $\mathbb{Z}_{10}$ tertutup dan bersifat asosiatif terhadap operasi perkalian, serta memenuhi hukum distributif, yaitu:

(6) $\mathbb{Z}_{10}$ bersifat komutatif karena setiap a, b di $\mathbb{Z}_{10}$ berlaku $a +_{10} b = b +_{10} a$.
(7) $(\mathbb{Z}_{10}, \cdot_{10})$ bersifat tertutup. Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}_{10}$. Karena $a, b \in \mathbb{Z}_{10}$ maka $0 \leq a \leq 9$ dan $0 \leq b \leq 9$. Karena $a \cdot_{10} b = r$ dimana r adalah bilangan tak negatif sisa pembagian $a \cdot b$ dengan 10 maka $0 \leq r \leq 10$. Ini berarti $a \cdot_{10} b \in \mathbb{Z}_{10}$.
(8) Berdasarkan tabel Cayley, dapat dilihat bahwa $\mathbb{Z}_{10}$ memenuhi sifat asosiatif terhadap operasi perkalian modulo 10.
(9) $(\mathbb{Z}_{10}, \cdot_{10})$ juga bersifat distributif karena untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_{10}$ berlaku $a \cdot_{10} (b +_{10} c) = (a \cdot_{10} b) +_{10} (a \cdot c)$ dan $(a +_{10} b) \cdot_{10} c = (a \cdot_{10} c) +_{10} (b \cdot_{10} c)$.

Oleh karena semua syarat gelanggang dipenuhi oleh $\mathbb{Z}_{10}$ maka dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{Z}_{10}$ adalah gelanggang.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}_{10}$ membentuk gelanggang Artin dengan menentukan semua rantai turun yang terbentuk di $\mathbb{Z}_{10}$ dan dengan menentukan semua unsur minimalnya.

(*) Menentukan rantai turun yang terbentuk di $\mathbb{Z}_{10}$.

Langkah pertama yang harus dilakukan adalah menentukan semua ideal sejati yang ada di $\mathbb{Z}_{10}$, di mana ideal sejati di $\mathbb{Z}_{10}$ adalah semua ideal selain $\overline{0}$ dan $\mathbb{Z}_{10}$ itu sendiri. Ideal-ideal tersebut adalah ideal-ideal utama di $\mathbb{Z}_{10}$, yaitu $\langle\overline{1}\rangle$, $\langle\overline{2}\rangle$, $\langle\overline{3}\rangle$,$\langle\overline{4}\rangle$, $\langle\overline{5}\rangle$, $\langle\overline{6}\rangle$, $\langle\overline{7}\rangle$, $\langle\overline{8}\rangle$, dan $\langle\overline{9}\rangle$. Dengan menggunakan Tabel 2, diperoleh:

$$\begin{aligned}\langle\overline{1}\rangle &= \{\overline{1} \cdot k | k \in \mathbb{Z}_{10}\}\\ &= \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle\overline{2}\rangle &= \{\overline{2} \cdot k | k \in \mathbb{Z}_{10}\}\\ &= \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle\overline{3}\rangle &= \{\overline{2} \cdot k | k \in \mathbb{Z}_{10}\}\\ &= \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{2}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{1}, \overline{4}, \overline{7}\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle\overline{4}\rangle &= \{\overline{2} \cdot k | k \in \mathbb{Z}_{10}\}\\ &= \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{2}, \overline{6}, \overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{2}, \overline{6}\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle\overline{5}\rangle &= \{\overline{2} \cdot k | k \in \mathbb{Z}_{10}\}\\ &= \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{0}, \overline{5}, \overline{0}, \overline{5}, \overline{0}, \overline{5}, \overline{0}, \overline{5}\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle\overline{6}\rangle &= \{\overline{2} \cdot k | k \in \mathbb{Z}_{10}\}\\ &= \{\overline{0}, \overline{6}, \overline{2}, \overline{8}, \overline{4}, \overline{0}, \overline{6}, \overline{2}, \overline{8}, \overline{4}\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle\overline{7}\rangle &= \{\overline{2} \cdot k | k \in \mathbb{Z}_{10}\}\\ &= \{\overline{0}, \overline{7}, \overline{4}, \overline{1}, \overline{8}, \overline{5}, \overline{2}, \overline{9}, \overline{6}, \overline{3}\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle\overline{8}\rangle &= \{\overline{2}\cdot k | k \in \mathbb{Z}_{10}\}\\ &= \{\overline{0},\overline{8},\overline{6},\overline{4},\overline{2},\overline{0},\overline{8},\overline{6},\overline{4},\overline{2}\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle\overline{9}\rangle &= \{\overline{2}\cdot k | k \in \mathbb{Z}_{10}\}\\ &= \{\overline{0},\overline{9},\overline{8},\overline{7},\overline{6},\overline{5},\overline{4},\overline{3},\overline{2},\overline{1}\}.\end{aligned}$$

Dari hasil di atas, dapat dilihat bahwa $\langle\overline{1}\rangle = \langle\overline{3}\rangle = \langle\overline{7}\rangle = \langle\overline{9}\rangle$ dan $\langle\overline{2}\rangle = \langle\overline{4}\rangle = \langle\overline{6}\rangle = \langle\overline{8}\rangle$.

Langkah kedua, urutkan ideal-ideal tersebut dalam bentuk rantai-rantai turun. Beberapa rantai yang terbentuk dari ideal-ideal tersebut adalah

$$\langle\overline{1}\rangle = \langle\overline{3}\rangle = \langle\overline{7}\rangle = \langle\overline{9}\rangle \supseteq \langle\overline{5}\rangle.$$

$$\langle\overline{2}\rangle = \langle\overline{4}\rangle = \langle\overline{6}\rangle = \langle\overline{8}\rangle.$$

$$\langle\overline{1}\rangle = \langle\overline{3}\rangle = \langle\overline{7}\rangle = \langle\overline{9}\rangle \supseteq \langle\overline{2}\rangle = \langle\overline{4}\rangle = \langle\overline{6}\rangle = \langle\overline{8}\rangle.$$

Oleh karena pada rantai-rantai di atas terdapat ideal yang memiliki unsur yang sama pada rantai-rantai di atas, maka rantai-rantai tersebut adalah rantai-rantai yang stasioner. Dengan demikian, jelaslah bahwa $\mathbb{Z}_{10}$ adalah gelanggang Artin.

(**) Menentukan unsur minimal pada setiap rantai.

Dari $(*)$ di atas diperoleh bahwa:

(1) $\langle\overline{1}\rangle = \langle\overline{3}\rangle = \langle\overline{7}\rangle = \langle\overline{9}\rangle \supseteq \langle\overline{5}\rangle$. Pada rantai ini $\langle\overline{5}\rangle$ adalah unsur minimalnya. Hal ini dikarenakan $\overline{0},\overline{5} \in \langle\overline{5}\rangle$ juga termuat pada $\langle\overline{1}\rangle, \langle\overline{3}\rangle, \langle\overline{7}\rangle$, dan $\langle\overline{9}\rangle$.

(2) $\langle\overline{2}\rangle = \langle\overline{4}\rangle = \langle\overline{6}\rangle = \langle\overline{8}\rangle$. Pada rantai ini semua idealnya menjadi unsur minimal. Hal ini disebabkan karena semua idealnya memiliki unsur yang sama, atau tidak ada ideal di rantai ini yang memiliki unsur yang lebih sedikit dibandingkan dengan ideal-ideal yang lain.

(3) $\langle\overline{1}\rangle = \langle\overline{3}\rangle = \langle\overline{7}\rangle = \langle\overline{9}\rangle \supseteq \langle\overline{2}\rangle = \langle\overline{4}\rangle = \langle\overline{6}\rangle = \langle\overline{8}\rangle$. Pada rantai ini yang menjadi unsur minimalnya adalah $\langle\overline{2}\rangle, \langle\overline{4}\rangle, \langle\overline{6}\rangle$, dan $\langle\overline{8}\rangle$. Ideal-ideal inilah yang memiliki unsur yang sama dan paling sedikit dibandingkan dengan ideal-ideal yang lain di rantai ini.

Jadi, karena pada seiap rantai di $\mathbb{Z}_{10}$ terdapat unsur minimal, maka $\mathbb{Z}_{10}$ adalah gelanggang Artin.

4. Sifat-sifat Gelanggang Artin

Teorema 4.1. [4] *Misalkan R gelanggang komutatif dengan unsur satuan. Jika R gelanggang Artin maka setiap ideal prim dari R adalah maksimal.*

Bukti. Misalkan R gelanggang komutatif dengan unsur satuan. Misalkan pula R gelanggang Artin. Akan ditunjukkan setiap ideal prim dari R adalah ideal maksimal. Misalkan P ideal prim dari R. Karena P ideal prim dari R, maka gelanggang kuosien R/P merupakan suatu daerah integral. Karena R/P daerah integral dengan R

gelanggang Artin, maka R/P adalah gelanggang Artin. Ambil $\langle p \rangle \in R/P$ dengan $p \neq 0$. Karena $\langle p \rangle \in R/P$ maka rantai turunnya, yaitu:

$$\langle p^1 \rangle \supseteq \langle p^2 \rangle \supseteq \langle p^3 \rangle \ldots \supseteq \langle p^k \rangle = \langle p^{k+1} \rangle = \ldots = \langle p^n \rangle, \text{ untuk suatu } k, n \in \mathbb{N}.$$

Karena rantai turunnya stasioner, maka terdapat $\langle p^k \rangle = \langle p^{k+1} \rangle$. Karena $\langle p^k \rangle = \langle p^{k+1} \rangle$ maka terdapat $p^k \in \langle p^{k+1} \rangle$. Karena $p^k \in \langle p^{k+1} \rangle$ maka terdapat $p^k = p^{k+1} \cdot \lambda$ untuk suatu $\lambda \in R/P$. Oleh karena hukum pembatalan berlaku di R/P, maka:

$$\begin{aligned} p^k &= p^{k+1} \cdot \lambda \\ p^k &= p^k \cdot p \cdot \lambda \\ 1 &= p \cdot \lambda. \end{aligned}$$

Karena $\lambda \in R/P$ dan $p \cdot \lambda = \lambda \cdot p = 1$, maka $\lambda = p^{-1}$. Artinya, p dapat dibalik. Akibatnya, setiap unsur tak nol di R/P dapat dibalik sehingga R/P adalah lapangan. Diperoleh bahwa P ideal maksimal. □

Teorema 4.2. [4] *Misalkan R gelanggang Artin komutatif dengan $R^2 = R$. Maka R hanya memuat sejumlah ideal maksimal yang berhingga.*

Bukti. Misalkan R gelanggang Artin yang komutatif, di mana $R^2 = R$. Misalkan $\mathfrak{M}$ adalah himpunan irisan semua ideal maksimal yang berhingga dari R, yaitu $\mathfrak{M} = \{M_1 \cap M_2 \cap \ldots\}$. Karena R gelanggang Artin, maka $\mathfrak{M}$ memuat unsur minimal. Misalkan unsur minimalnya adalah $\{M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n\}$, untuk suatu $n \in \mathbb{N}$. Misalkan M adalah sebarang ideal maksimal dari R. Oleh karena R gelanggang Artin, maka keminimalan dari $\{M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n\}$ mengakibatkan $\{M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n\} \subseteq M$. Konsekuensinya, $M_1 M_2 \ldots M_n \subseteq M$. Oleh karena $R^2 = R$, maka setiap ideal maksimalnya adalah prim. Hal ini mengakibatkan $M_i \subseteq M$ untuk suatu i dan oleh sebab itu $M_i = M$ karena M_i ideal maksimal. Hal ini menunjukkan bahwa $M_1, M_2, \ldots, M_n$ adalah ideal maksimal yang berhingga dari R. □

Teorema 4.3. [4] *Jika R gelanggang Artin komutatif dengan N suatu nilradikal dari R maka $N^k = \{0\}$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$.*

Bukti. Misalkan R gelanggang Artin komutatif dengan nilradikal N. Karena R gelanggang Artin dan nilradikal merupakan suatu ideal, maka dapat dibuat barisan nilradikal N yang membentuk rantai yang stasioner. Misalkan rantai tersebut adalah

$$N \supseteq N^2 \supseteq N^3 \supseteq \ldots \supseteq N^k = N^{k+1} = N^{k+2} = \ldots = N^n \text{ untuk suatu } n \geq k.$$

Andaikan $N^n \neq \{0\}$ dan misalkan $\mathfrak{F}$ adalah himpunan semua ideal I dengan $N^n I \neq \{0\}$. Jelas bahwa $\mathfrak{F}$ bukan himpunan kosong karena $N \in \mathfrak{F}$. Oleh karena R gelanggang Artin maka $\mathfrak{F}$ memuat unsur minimal. Misalkan unsur minimal tersebut adalah I_0. Karena $I_0 \in \mathfrak{F}$ maka $N^n I_0 \neq \{0\}$. Karena $N^n I_0 \neq \{0\}$ maka terdapat suatu unsur taknol di I_0 yaitu $a \in I_0$ sehingga $N^n a \neq \{0\}$. Oleh karena $N^n a \in N^n I_0 = N^n I \neq \{0\}$ maka $N^n a$ juga merupakan unsur di $\mathfrak{F}$. Karena $N^n a \in \mathfrak{F}$ maka terdapat $b \in N^n$ sehingga berlaku

$$a = ab = ab^2 = ab^3 = \ldots = ab^n.$$

Namun karena $b \in N^n = N^k \subseteq N$ bersifat nilpoten maka $b^n = 0$ sehingga $a = \ldots = ab^n = 0$ yang kontradiksi dengan $N^n a \neq \{0\}$. Oleh karena itu haruslah $N^n = \{0\}$ sehingga berlaku $N^k = \{0\}$. $\square$

5. Kesimpulan

Pada tulisan ini telah dibahas kembali bahwa gelanggang Artin mempunyai sifat-sifat sebagai berikut.

(1) Jika R gelanggang komutatif dengan unsur satuan dan R gelanggang Artin, maka setiap ideal primnya adalah ideal maksimal.
(2) Misalkan R gelanggang Artin komutatif dengan $R^2 = R$, maka R hanya memuat sejumlah ideal maksimal berhingga.
(3) Jika R gelanggang Artin dengan N suatu nilradikal dari R, maka $N^k = \{0\}$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$.

6. Ucapan Terima Kasih

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa dalam penyusunan makalah ini tidak terlepas dari dukungan, dorongan, kerjasama maupun bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada Ibu Nova Noliza Bakar, Bapak Zulakmal, Ibu Hazmira Yozza, Bapak Narwen, dan Bapak I Made Arnawa yang telah bersedia membaca, menelaah, dan menguji naskah makalah ini.

Daftar Pustaka

[1] Arifin, Achmad. 2000. *Aljabar*. Penerbit ITB, Bandung
[2] Herstein, I.N. 1999. *Topics in Algebra*. Second Edition. John Wiley and Sons, New York
[3] Hungerford, T.W. 1974. *Graduate Text in Mathematics Algebra*. Springer-Verlag, New York
[4] Splindler, Karlheinz. 1994. *Abstract Algebra with Applications*. Marcel Dekker,Inc. New York