BILANGAN RAINBOW CONNECTION UNTUK GRAF KOMPLEMEN

RENI WIJAYA

*Program Studi Magister Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
ar3n-jaya@yahoo.com*

Abstrak. Misalkan terdapat dua titik u, v pada graf G . Suatu $u-v$ path, dinotasikan dengan ${}_uP_v$ di G , dikatakan *rainbow path* jika tidak terdapat dua sisi di P yang memiliki warna sama. Suatu pewarnaan sisi di G dikatakan *rainbow connected* jika setiap dua titik yang berbeda dihubungkan oleh *rainbow path*. Bilangan *rainbow connection* dari graf terhubung G , ditulis $rc(G)$, didefinisikan sebagai banyaknya warna minimal yang diperlukan untuk membuat G bersifat *rainbow connected*. Pada tulisan ini dibahas tentang bilangan *rainbow connection* untuk komplement dari graf lingkaran C_n dengan $n \geq 6$ dan graf buku B_2 .

Kata Kunci: Graf komplement, graf lingkaran, graf buku

1. Pendahuluan

Perkembangan teori graf saat ini tidak hanya secara teoritis, tetapi juga secara aplikatif seperti dalam ilmu jaringan komunikasi, transportasi, ilmu komputer, musik, dan ilmu-ilmu lainnya. Salah satu topik yang dipelajari dalam teori graf adalah *rainbow connection*.

Konsep *rainbow connection* pada graf pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand dkk, pada tahun 2006 [4]. Misalkan G adalah graf terhubung tak trivial, didefinisikan pewarnaan sisi $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}, k \in \mathbb{N}$, dimana sisi yang bertetangga boleh memiliki warna yang sama. Suatu *path* adalah jalan yang semua titik berbeda. Suatu $(u-v)$ path P di G dikatakan *rainbow path* jika tidak ada dua sisi di P yang memiliki warna sama. Suatu pewarnaan sisi di G dikatakan *rainbow connected* jika setiap dua titik yang berbeda dihubungkan oleh *rainbow path*. Suatu pewarnaan sisi di mana G adalah *rainbow connected* dikatakan *rainbow coloring*. Bilangan *rainbow connection* dari graf terhubung G , ditulis $rc(G)$, didefinisikan sebagai minimum dari banyaknya warna yang diperlukan untuk membuat G menjadi *rainbow connected*. Suatu *rainbow coloring* yang menggunakan $rc(G)$ warna dikatakan sebagai *minimum rainbow coloring* [4].

Konsep *rainbow connection* dapat digunakan untuk pengamanan pengiriman informasi rahasia antar pemerintah dan agen. Dalam hal ini, pemerintah dan agen tidak diizinkan untuk saling mencek informasi karena berhubungan dengan keamanan nasional, sehingga informasi kepada agen satu dan lainnya harus menggunakan sandi. Dengan demikian, akan terdapat satu atau lebih lintasan informasi

untuk setiap dua agen dan harus dipastikan tidak ada sandi yang berulang. Kata sandi setiap lintasan harus berbeda, sehingga harus ditentukan jumlah sandi yang dibutuhkan, agar terdapat satu lintasan yang aman antara dua agen. Situasi inilah yang dimodelkan dalam bilangan *rainbow connection*. Pada penelitian ini akan dibahas tentang bilangan *rainbow connection* dari suatu graf G dengan memperhatikan sifat-sifat tertentu dari komplemen graf tersebut.

2. Definisi dan terminologi dalam graf

Suatu **graf** G didefinisikan sebagai pasangan terurut himpunan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong yang berhingga dengan elemennya dinamakan **titik** (*vertex*) dan $E(G)$ adalah himpunan **sisi** (*edge*) yang menghubungkan sepasang titik [6]. **Komplemen** dari suatu graf G , ditulis $\bar{G}$, yaitu suatu graf di mana jika $uv \in E(G)$ maka $uv \notin E(\bar{G})$ untuk setiap $u, v \in V(G)$ [6].

Graf reguler adalah graf yang semua titiknya berderajat sama. Graf reguler dengan banyak n titik dan derajat setiap titiknya adalah r , dinotasikan dengan r -reguler. Graf **lingkaran** (*cycle*) adalah graf terhubung 2-reguler. Graf lingkaran dengan n titik dinotasikan dengan C_n [7]. Contoh graf C_n diperlihatkan pada Gambar 2.1.

Gambar 2.1. Graf lingkaran C_n dengan $3 \leq n \leq 6$.

Graf buku B_n (*book graph*) adalah graf hasil kali cartesian $S_{n+1} \times P_2$, di mana S_n adalah suatu graf bintang dan P_2 adalah graf lintasan dengan dua titik. Contoh graf buku dapat dilihat pada Gambar 2.2.

Gambar 2.2. (a) Graf B_4 , (b) Graf B_8 .

3. Hasil dan Pembahasan

Teorema 3.1. Misalkan G adalah suatu graf terhubung, di mana $G \cong C_n$ atau $G \cong B_2$. Maka bilangan rainbow connection dari graf $\overline{G}$ adalah

$$rc(\overline{G}) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } G \cong C_n \text{ dengan } n \geq 6; \\ 3, & \text{untuk } G \cong B_2. \end{cases}$$

Bukti. Perhatikan dua kasus berikut.

Kasus 1. Untuk $G \cong C_n$ dengan $n \geq 6$.

Untuk setiap C_n dengan $n \geq 6$, jelas bahwa $diam(\overline{C}_n) = 2$. Sehingga, $rc(\overline{C}_n) \geq 2$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $rc(\overline{C}_n) \leq 2$. Karena C_n adalah graf 2-reguler, maka $\overline{C}_n$ adalah graf tidak lengkap. Akibatnya, terdapat dua titik, sebut titik u dan titik v , yang tidak bertetangga. Selanjutnya, karena $d(x) \geq n - 2$ untuk setiap $x \in V(\overline{C}_n)$ dengan $n \geq 6$, maka $d(x) \geq 3$. Jadi, terdapat satu titik w di $V(\overline{C}_n)$ yang bertetangga dengan u dan juga dengan titik v . Akibatnya, terdapat *rainbow path* uPv dengan $|uPv| = 2$, sehingga $rc(\overline{C}_n) \leq 2$. Jadi, $rc(C_n) = 2$. Agar terdapat *rainbow path* pada graf $\overline{G}$ maka minimum dari warna yang diberikan pada *rainbow path* adalah dua, sehingga $rc(\overline{G}) = 2$.

Gambar 3.1. Graf $\overline{C}_8$.

Kasus 2. Untuk $G \cong B_2$.

Misalkan $n = 2k$ dengan $k = 3$. Pertama akan ditunjukkan $rc(\overline{G}) \leq 3$. Definisikan pewarnaan

$$c(e) = \begin{cases} 1, & \text{jika } e = v_1v_6, v_1v_3 \text{ dan } v_3v_4, \\ 2, & \text{jika } e = v_2v_6, v_4v_6, v_1v_5, v_3v_5; \\ 3, & \text{jika } e = v_2v_4. \end{cases}$$

Dari definisi pewarnaan pada $\overline{B}_2$ tersebut, diperoleh $rc(\overline{B}_2) \leq 3$ untuk $n = 3$. Perhatikan bahwa $diam(\overline{B}_2) = 3$, sehingga $rc(\overline{B}_2) \geq 3$. Oleh karena itu $rc(\overline{B}_2) \geq 3$. Jadi, $rc(\overline{B}_2) = 3$. $\square$

Gambar 3.2. (a) Graf B_2 , (b) Graf $\overline{B}_2$.

4. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Dr. Syafrizal Sy, Ibu Dr. Lyra Yulianti, Bapak Dr. Admi Nazra, Bapak Dr. Muhafzan dan Bapak Dr. Mahdhivan Syafwan, yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] J.A. Bondy, dan Murty, U.S.R. 2008. *Graph Theory*, Graduated Texts In Mathematics. Springer. New York.
- [2] Y. Caro, A. Lev, Y. Roditty, Z. Tuza, R. Yuster. 2008. *On rainbow connection*, Electronic J. Combin, **15**, R57.
- [3] L.S. Chandran, A. Das, D.Rajendraprasad, N.M. Varma. 2010. *Rainbow connection number and connected dominating sets*, ArXiv: 1010.2296v1 [math.CO].
- [4] G. Chartrand, G.L. Johns, K.A. McKeon, P. Zhang. 2008. *Rainbow connection in graphs*, Math. Bohem. **133**: 85-98.
- [5] Chartrand. dkk. 2005. *Introduction to Graph Theory*, McGraw-Hill. Boston.
- [6] Diestel, Reinhard. 2005. *Graph Theory*, Electronic Edition 3. New York.
- [7] X. Li dan Y. Sun. 2010. *Rainbow connection numbers of complementary graphs*, arXiv:1011.4572v3 [math.CO].