

# SYARAT PERLU UNTUK GRAF RAMSEY ( $2K_2, C_n$ )-MINIMAL

Jondesi

Program Studi Matematika,  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas Padang,  
Kampus UNAND Limau Manis Padang 25163, Indonesia  
jondesi.basri@yahoo.com

**Abstrak.** Diberikan dua graf  $G$  dan  $H$ . Notasi  $F \rightarrow (G, H)$  berarti bahwa sebarang pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi graf  $F$  mengakibatkan  $F$  memuat subgraf merah yang isomorfik dengan  $G$  atau subgraf biru yang isomorfik dengan  $H$ . Graf  $F$  disebut sebagai graf *Ramsey*( $G, H$ ) – *minimal* jika  $F \rightarrow (G, H)$  dan  $F^* \not\rightarrow (G, H)$  untuk sebarang subgraf sejati  $F^* \subset F$ . Dalam makalah ini akan dikaji tentang beberapa syarat perlu untuk graf yang berada dalam kelas berhingga  $\mathcal{R}(2K_2, C_n)$  untuk  $n \geq 4$ .

**Kata Kunci:** *Graf Ramsey minimal*

## 1 Pendahuluan

Graf  $G = (V, E)$  adalah suatu sistem yang terdiri dari himpunan titik berhingga tak kosong  $V = V(G)$  dan himpunan sisi  $E = E(G)$ , yaitu himpunan bagian dari himpunan pasangan tak terurut dari anggota-anggota  $V$ . Misalkan diberikan graf  $G = (V, E)$ . Jika sisi  $e = uv \in E(G)$ , maka titik  $u$  disebut tetangga dari titik  $v$ , demikian juga sebaliknya.

Misalkan diberikan graf  $G$  dan  $H$  sebarang. Notasi  $F \rightarrow (G, H)$  berarti bahwa sebarang pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi graf  $F$  mengakibatkan  $F$  memuat subgraf merah yang isomorfik dengan  $G$  atau subgraf biru yang isomorfik dengan  $H$ . Suatu *pewarnaan*-( $G, H$ ) pada graf  $F$  didefinisikan sebagai pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi graf  $F$  sedemikian sehingga  $F$  tidak memuat subgraf merah  $G$  sekaligus tidak memuat subgraf biru  $H$ .

Salah satu kajian dalam matematika kombinatorika yang mendasari munculnya teori Ramsey adalah *Prinsip Pigeonhole*, yaitu *jika akan ditempatkan  $k + 1$  buah objek ke  $k$  kotak, maka paling sedikit terdapat satu kotak yang memuat dua objek atau lebih*. Keterkaitan prinsip ini dapat diilustrasikan dengan contoh sebagai berikut.

*Jika sebuah grup terdiri atas enam orang dan masing-masing pasangan dari individu-individu mempunyai dua teman atau dua musuh, maka terdapat tiga orang yang saling bersahabat atau tiga orang yang saling bermusuhan, tetapi tidak sekaligus keduanya.*

Pada tahun 1935, Erdos dan Szekeres mengkaji teori Ramsey dan kemudian mengaplikasikannya kedalam teori graf. Seiring dengan perkembangan ilmu matematika, studi bilangan Ramsey pun diperumum untuk kombinasi berbagai jenis graf lain, seperti graf siklus dan graf lainnya.

Dengan menggunakan notasi panah di atas dapat didefinisikan beberapa jenis bilangan Ramsey. *Bilangan Ramsey graf*  $R(G, H)$  didefinisikan sebagai

banyaknya titik minimum dari graf lengkap  $K_n$  yang memenuhi  $K_n \rightarrow (G, H)$ . Selanjutnya graf  $F$  disebut sebagai *graf Ramsey  $(G, H)$ -minimal* jika  $F \rightarrow (G, H)$  dan  $F - e \not\rightarrow (G, H)$  untuk sebarang sisi  $e$  di  $F$ . Semua *graf Ramsey  $(G, H)$ -minimal* dikelompokkan dalam kelas yang dinamakan *kelas Ramsey  $(G, H)$ -minimal*, yang dinotasikan sebagai  $\mathcal{R}(G, H)$ .

Karena tingkat kesulitan yang cukup tinggi, hasil yang diperoleh terkait  $\mathcal{R}(G, H)$  masih sangat sedikit, bahkan untuk graf  $G$  dan  $H$  yang berukuran kecil atau yang berstruktur sederhana sekalipun. Oleh karena itu, masalah ini menjadi topik yang sangat menarik untuk dikaji. Makalah ini merupakan kajian ulang dari rujukan [3], yang membahas tentang syarat perlu dari graf yang termuat dalam kelas  $\mathcal{R}(2K_2, C_n)$  untuk  $n \geq 3$ .

## 2 Graf Ramsey $(2K_2, C_n)$ Minimal

Berikut diberikan definisi dari bilangan Ramsey klasik  $R(a, b)$ , bilangan Ramsey graf  $R(G, H)$ , graf  $(G, H)$ -elok serta graf **Ramsey  $(G, H)$ -minimal**.

**Definisi 1.** Misalkan  $a, b \geq 2$  adalah bilangan asli. Bilangan Ramsey klasik  $R(a, b)$  adalah bilangan asli terkecil  $n$  sedemikian sehingga jika sisi-sisi graf lengkap  $K_n$  diwarnai dengan warna merah dan biru, maka senantiasa terdapat subgraf  $K_a$  merah atau  $K_b$  biru.

Pada perkembangan selanjutnya, penentuan bilangan Ramsey ini tidak hanya terbatas pada graf lengkap. Dengan melepas syarat kelengkapan pada graf yang masuk dalam domainnya, maka diperoleh definisi bilangan Ramsey Graf sebagai berikut.

**Definisi 2.** Diberikan dua graf  $G$  dan  $H$ . Bilangan Ramsey Graf  $R(G, H)$  adalah bilangan asli terkecil  $n$  sedemikian sehingga setiap graf  $F$  dengan  $n$  titik akan memuat  $G$  atau  $\bar{F}$  memuat  $H$ .

**Definisi 3.** Diberikan dua graf  $G$  dan  $H$ . Graf  $F$  disebut graf  $(G, H)$ -elok jika  $F$  tidak memuat  $G$  dan  $\bar{F}$  tidak memuat  $H$ . Sebarang graf  $(G, H)$ -elok dengan  $n$  titik dinotasikan dengan graf  $(G, H, n)$ -elok.

**Definisi 4.** Diberikan graf  $G$  dan  $H$ . Graf  $F$  dikatakan sebagai graf **Ramsey  $(G, H)$ -minimal** jika,

1.  $F \rightarrow (G, H)$ .
2.  $F^* \not\rightarrow (G, H)$  untuk sebarang subgraf sejati  $F^* \subset F$ .

Selanjutnya, kelas Ramsey minimal  $\mathcal{R}(G, H)$  didefinisikan sebagai kelas yang memuat semua graf  $F$  dengan kondisi pada Definisi 4 di atas.

Suatu pewarnaan- $(G, H)$  pada graf  $F$  didefinisikan sebagai pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi graf  $F$  sedemikian sehingga  $F$  tidak memuat subgraf merah  $G$  sekaligus tidak memuat subgraf biru  $H$ .

Berikut adalah beberapa hasil yang telah diperoleh terkait  $\mathcal{R}(mK_2, H)$  untuk  $m$  sebarang,  $m \geq 2$  dan  $H$  graf sebarang. Burr dkk. (1978b) menunjukkan bahwa kelas  $\mathcal{R}(mK_2, H)$  merupakan kelas berhingga untuk setiap bilangan positif  $m$  dan  $H$  graf sebarang. Burr dkk.(1978b) memberikan beberapa graf yang termasuk dalam kelas  $\mathcal{R}(2K_2, C_3)$ . Selanjutnya, Burr dkk. (1981a) memberikan karakterisasi dari graf yang menjadi anggota  $\mathcal{R}(2K_2, tK_2)$  untuk  $t \geq 4$ .

Pada bagian ini akan ditentukan beberapa syarat perlu dari graf yang menjadi anggota  $\mathcal{R}(2K_2, C_n)$  untuk  $n \geq 4$ . Setiap graf terhubung  $F \in \mathcal{R}(2K_2, C_n)$  dapat dibangun dari irisan dua siklus dengan panjang  $n$ , dengan cara menambahkan paling sedikit satu siklus lain dengan panjang  $n$  yang beririsan dengan kedua siklus pertama pada titik yang berbeda.

Pada teorema berikut akan diberikan beberapa syarat perlu untuk suatu graf yang berada dalam kelas Ramsey minimal untuk pasangan  $(2K_2, C_n)$ .

**Teorema 1.** *Misalkan graf  $F \in \mathcal{R}(2K_2, C_n)$  untuk  $n \geq 4$ . Maka:*

1.  $F - v \supseteq C_n$  untuk setiap  $v \in V(F)$  dan  $F - e \supseteq C_n$  untuk setiap  $e \in E(F)$ .
2.  $F - E(C_3) \supseteq C_n$  untuk setiap segitiga  $C_3$  dalam  $F$ .
3. Setiap sisi  $e \in E(F)$  selalu termuat dalam suatu siklus  $C_n$  di  $F$ .

**Bukti.**

1. Misalkan terdapat suatu titik  $v \in V(F)$  (atau sisi  $e \in E(F)$ ) sedemikian sehingga  $C_n \not\subseteq F - v$  (atau  $C_n \not\subseteq F - e$ ). Jika semua sisi yang terkait pada  $v$  (atau pada  $e$ ) berwarna merah dan semua sisi lainnya dari  $F$  berwarna biru, maka diperoleh suatu  $(2K_2, C_n)$ -pewarnaan pada  $F$ . Hal ini bertentangan dengan asumsi bahwa  $F \in \mathcal{R}(2K_2, C_n)$ .
2. Asumsikan bahwa (2) tidak berlaku untuk suatu segitiga  $C_3$  di  $F$ . Jika sisi-sisi segitiga tersebut diwarnai dengan warna merah dan semua sisi lainnya dari  $F$  diwarnai biru, maka diperoleh suatu  $(2K_2, C_n)$ -pewarnaan pada  $F$ . Hal ini bertentangan dengan asumsi bahwa  $F \in \mathcal{R}(2K_2, C_n)$ .
3. Andaikan terdapat suatu sisi  $e \in E(F)$  yang tidak termuat dalam suatu siklus  $C_n$  di  $F$ . Dari sifat keminimalan  $F$ , dapat diperoleh suatu  $(2K_2, C_n)$ -pewarnaan dari graf  $F - e$ . Dengan menggunakan  $(2K_2, C_n)$ -pewarnaan tersebut, selanjutnya sisi  $e$  diwarnai biru, maka tetap diperoleh  $(2K_2, C_n)$ -pewarnaan dari  $F$ . Hal ini bertentangan dengan asumsi bahwa  $F \in \mathcal{R}(2K_2, C_n)$ .  
□

**Akibat 1.** *Satu-satunya graf yang tak terhubung yang berada dalam  $\mathcal{R}(2K_2, C_n)$  untuk  $n \geq 4$  adalah  $2C_n$ .*

**Bukti.** Akan ditunjukkan bahwa  $2C_n \in \mathcal{R}(2K_2, C_n)$ . Misalkan tidak terdapat  $2K_2$  merah dalam sebarang pewarnaan merah-biru terhadap  $2C_n$ . Maka terdapat maksimal satu sisi merah pada salah satu sisi  $C_n$ , sementara sisi-sisi lainnya dari  $2C_n$  berwarna biru. Maka diperoleh  $C_n$  biru pada pewarnaan tersebut. Sehingga  $2C_n \rightarrow (2K_2, C_n)$ .

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa  $2C_n^* := 2C_n - e \not\rightarrow (2K_2, C_n)$  untuk sebarang  $e \in E(2C_n)$ . Misalkan sisi  $e$  sebarang dihapus dari salah satu  $C_n$ . Maka  $2C_n^*$  terdiri dari satu lintasan  $P_n$  dan siklus  $C_n$ . Warnai satu sisi sebarang pada siklus dengan merah, serta sisi-sisi lain dari siklus dan semua sisi lintasan dengan warna biru. Maka tidak diperoleh  $C_n$  biru pada pewarnaan tersebut. Terbukti bahwa  $2C_n \in \mathcal{R}(2K_2, C_n)$ .

Selanjutnya misalkan  $F \in \mathcal{R}(2K_2, C_n)$  untuk  $n \geq 4$  dan  $F$  memuat lebih dari satu komponen. Berdasarkan Teorema 1(3), setiap komponen harus memuat satu siklus  $C_n$ . Maka graf dengan ukuran terkecil yang memenuhi sifat ini adalah graf  $2C_n$ . □

Selanjutnya definisikan  $\mathcal{R}^*(2K_2, C_n) := \mathcal{R}(2K_2, C_n) - 2C_n$ . Dalam teorema berikut diberikan syarat perlu yang harus dipenuhi oleh setiap graf  $F \in \mathcal{R}^*(2K_2, C_n)$  untuk  $n \geq 4$ .

**Teorema 2.** Misalkan  $F \in \mathcal{R}^*(2K_2, C_n)$  untuk  $n \geq 4$ . Maka :

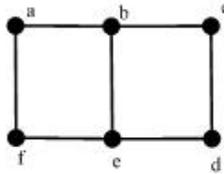
1. Setiap dua siklus dengan panjang  $n$  di  $F$  memuat sedikitnya satu titik bersama.
2. Graf  $F$  memuat paling sedikit tiga siklus dengan panjang  $n$  dan tidak semua siklus tersebut beririsan disatu titik yang sama.

**Bukti.**

1. Misalkan terdapat dua siklus dengan panjang  $n$  yang saling lepas di  $F$ . Karena  $2C_n \in \mathcal{R}(2K_2, C_n)$  berdasarkan Akibat 1, maka pemisalan bahwa  $F \supseteq 2C_n$  bertentangan dengan sifat keminimalan  $F$ .
2. Andaikan  $F$  hanya memuat dua siklus dengan panjang  $n$ . Berdasarkan Teorema 2(1), kedua siklus harus beririsan di paling sedikit satu titik, namakan  $v$ . Jika semua sisi yang menempel pada  $v$  berwarna merah dan sisi-sisi lainnya berwarna biru, maka tidak diperoleh  $C_n$  biru dalam pewarnaan tersebut. Hal ini bertentangan dengan Teorema 2 (1).  $\square$

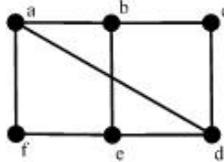
Berdasarkan Teorema 2(1) dan Teorema 2(2), dapat disimpulkan bahwa setiap  $F \in \mathcal{R}^*(2K_2, C_n)$ ,  $n \geq 4$  dapat dibangun dari irisan dua siklus dengan panjang  $n$ , dengan cara menambahkan paling sedikit satu siklus lain, dengan panjang yang sama, yang beririsan dengan kedua siklus pada titik yang berbeda.

Selanjutnya akan diberikan salah satu contoh graf  $F$  yang menjadi anggota  $\mathcal{R}(2K_2, C_4)$  berdasarkan Teorema 1 dan Teorema 2.



**Gambar 1.** Graf irisan  $2C_4$

Misalkan ditambahkan satu sisi  $ad$  pada irisan  $2C_4$  tersebut. Maka akan ditunjukkan bahwa graf  $F$  pada Gambar 2 adalah anggota dari  $\mathcal{R}(2K_2, C_4)$ .



**Gambar 2.** Penambahan satu sisi pada irisan  $2C_4$

Pandang sebarang pewarnaan merah-biru terhadap  $F$ . Misalkan tidak terdapat  $2K_2$  merah dalam pewarnaan tersebut. Maka subgraf yang diinduksi oleh sisi-sisi merah berbentuk  $K_{1,2}$  atau  $K_{1,3}$ . Untuk setiap  $K_{1,2}$  atau  $K_{1,3}$  merah di  $F$ , selalu diperoleh  $C_4$  biru, sehingga  $F \rightarrow \mathcal{R}(2K_2, C_4)$ .

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa  $F^* := F - e \not\rightarrow (2K_2, C_4)$  untuk sebarang  $e \in E(F)$ . Notasikan

$$\begin{aligned} V(F) &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}, \\ E(F) &= \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5, x_5x_6, x_1x_6, x_1x_4, x_2x_5\}. \end{aligned}$$

Misalkan  $e = x_1x_6$ . Maka warnai sisi-sisi  $x_1x_4, x_3x_4$  dan  $x_4x_5$  dengan merah, sementara sisi-sisi lainnya diwarnai biru sedemikian sehingga tidak diperoleh  $C_4$  biru dalam pewarnaan tersebut. Untuk sisi  $e = x_3x_4$  pembuktian dilakukan dengan cara yang sama. Misalkan  $e = x_1x_2$ . Maka sisi-sisi  $x_2x_5, x_4x_5, x_5x_6$  diwarnai merah. Untuk  $e = x_2x_3, x_4x_5, x_5x_6$ , pembuktian dilakukan dengan cara yang sama. Jika  $e = x_2x_5$  maka warnai sisi  $x_1x_4, x_3x_4, x_4x_5$  dengan merah. Jika  $e = x_1x_4$  maka warnai sisi  $x_1x_2, x_2x_5, x_2x_3$  dengan merah. Sehingga diperoleh  $F^* \not\rightarrow \mathcal{R}(2K_2, C_4)$ . Maka  $F \in \mathcal{R}(2K_2, C_4)$ .

### 3 Kesimpulan

Misalkan diberikan dua graf  $G$  dan  $H$ . Notasi  $F \rightarrow (G, H)$  berarti bahwa sebarang pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi graf  $F$  mengakibatkan  $F$  memuat subgraf merah yang isomorfik dengan  $G$  atau subgraf biru yang isomorfik dengan  $H$ . Graf  $F$  disebut sebagai graf Ramsey  $(G, H)$ -minimal jika  $F \rightarrow (G, H)$  dan  $F^* \not\rightarrow (G, H)$  untuk sebarang subgraf sejati  $F^* \subset F$ .

Misalkan diberikan graf  $2K_2$  dan siklus  $C_n$  untuk  $n \geq 4$ . Selanjutnya misalkan terdapat graf yang berasal dari irisan dua siklus dengan panjang  $n$ . Dalam makalah ini telah dikaji bahwa suatu graf  $F$  yang menjadi anggota  $\mathcal{R}(2K_2, C_n)$  untuk  $n \geq 4$  dapat diperoleh dengan cara menambahkan satu siklus dengan panjang  $n$  ke irisan dua siklus tersebut, dengan syarat-syarat seperti yang dibahas pada Teorema 1 dan Teorema 2. Selanjutnya telah dikaji bahwa satu-satunya graf tidak terhubung yang menjadi anggota  $\mathcal{R}(2K_2, C_n)$  untuk  $n \geq 4$  adalah graf  $2C_n$ .

### 4 Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Lyra Yulianti, Bapak Budi Rudianto, Bapak Narwen, Bapak Admi Nazra dan Bapak Zulakmal yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

### 5 Daftar Pustaka

1. Baskoro, E.T. dkk. 2002. On Ramsey Number for Trees versus Wheels of Five or Six Vertices. *Graph and Combinatorics* **4** : 717 – 721.
2. Radziszowski, S. P. 2011. Small Ramsey Number. *Electron J. Combin.* DS1.13
3. Yulianti, L., Baskoro, E.T., Assiyatun, H., dan Uttunggadewa, S. 2009. Ramsey  $(2K_2, C_4)$ -minimal Graphs. *Diajukan ke Discussiones Mathematicae Graph Theory*.