SOLUSI SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR *FRACTIONAL* DENGAN TURUNAN TIPE JUMARIE

RAMADHAL NOFRINA PUTRI, RADHIATUL HUSNA*

*Program Studi S1 Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
 email : ramadhal.rina@gmail.com, radhiatulhusna@sci.unand.ac.id*

Diterima 16 Juni 2020 Direvisi 22 Juni 2020 Dipublikasikan 13 Juli 2020

Abstrak. Dalam makalah ini ditentukan solusi sistem persamaan diferensial fractional linier orde dengan turunan tipe Jumarie. Bentuk umum solusi diberikan dalam beberapa teorema. Beberapa contoh diberikan untuk mengilustrasikan keberlakuan teorema.

Kata Kunci: Persamaan Diferensial Fraksional, Jumarie, Fungsi Mittag-Leffler

1. Pendahuluan

Suatu persamaan diferensial biasa adalah suatu persamaan yang memuat suatu fungsi dan turunan-turunan biasa dari fungsi tersebut. Sistem persamaan diferensial biasa adalah kumpulan dari beberapa persamaan diferensial biasa.

Seiring dengan perkembangan, persamaan diferensial biasa berkembang menjadi persamaan diferensial *fractional*. Selanjutnya sistem persamaan diferensial biasa juga berkembang menjadi sistem persamaan diferensial *fractional*. Dalam makalah ini akan dibahas mengenai solusi sistem persamaan diferensial *fractional* berikut ([2] dan [5]):

$$\begin{aligned} D^\alpha x(t) &= ax + by \\ D^\alpha y(t) &= cx + dy \end{aligned} \tag{1.1}$$

dimana a, b, c dan d adalah konstanta dan D^α adalah turunan *fractional* tipe Jumarie orde α dengan $0 < \alpha < 1$ yang didefinisikan sebagai berikut [2]:

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} (f(\tau) - f(0)) d\tau \tag{1.2}$$

dengan Γ adalah fungsi Gamma.

*penulis korespondensi

2. Landasan Teori

2.1. Fungsi Gamma, Fungsi Beta dan Fungsi Mittag-Leffler

Definisi 2.1. [7] Fungsi Gamma dinyatakan sebagai $\Gamma(n)$, didefinisikan sebagai berikut:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx, \quad n > 0. \quad (2.1)$$

Definisi 2.2. [5] Fungsi Beta didefinisikan sebagai berikut :

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad x \in \mathbb{R} \text{ dan } p, q \in \mathbb{C},$$

dimana $Re(p) > 0$ dan $Re(q) > 0$.

Definisi 2.3. [2] Fungsi Mittag-Leffler satu parameter E_α didefinisikan sebagai berikut:

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1 + \alpha k)}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad Re(\alpha) > 0. \quad (2.2)$$

2.2. Turunan Fractional Tipe Jumarie

Definisi 2.4. [1] Turunan fraksional Jumarie orde α dari fungsi $f(t)$, $t > 0$ dengan $0 < \alpha < 1$, dinotasikan dengan $D^\alpha f(t)$, didefinisikan sebagai berikut:

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} (f(\tau) - f(0)) d\tau. \quad (2.3)$$

Beberapa sifat dari turunan *fractional* Jumarie diberikan berikut ini [4]:

- (1) $D^\alpha[\lambda f(t)] = \lambda D^\alpha[f(t)]$.
- (2) $D^\alpha[f(t) + g(t)] = D^\alpha[f(t)] + D^\alpha[g(t)]$.
- (3) $D^\alpha[f(t)g(t)] = [D^\alpha f(t)]g(t) + f(t)[D^\alpha g(t)]$.

Dengan menggunakan persamaan (2.3), diperoleh turunan dari beberapa fungsi berikut.

- (1) $D^\alpha(c) = 0$.
- (2) $D^\alpha(t^{n\alpha}) = \frac{\Gamma(n\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha(n-1) + 1)} t^{(\alpha(n-1))}$.
- (3) $D^\alpha(E_\alpha(\lambda t^\alpha)) = \lambda E_\alpha(\lambda t^\alpha)$.
- (4) $D^\alpha(\cos_\alpha(t^\alpha)) = -\sin_\alpha(t^\alpha)$.
- (5) $D^\alpha(\cos_\alpha(\lambda t^\alpha)) = -\lambda \sin_\alpha(\lambda t^\alpha)$.

3. Pembahasan

Berikut ini diperlihatkan bagaimana turunan Jumarie digunakan untuk menyelesaikan beberapa sistem persamaan diferensial fraksional linier orde α .

$$\begin{aligned} D^\alpha x &= ax + by, \\ D^\alpha y &= cx + dy. \end{aligned} \quad (3.1)$$

a, b, c dan d adalah konstanta dan D^α adalah turunan *fractional* tipe Jumarie orde α dengan $0 < \alpha < 1$.

Dari persamaan (3.1) diperoleh:

$$(D^\alpha - a)x - by = 0, \quad (3.2)$$

$$-cx + (D^\alpha - d)y = 0. \quad (3.3)$$

Penggunaan (3.2) dan pengoperasian (3.3) dengan $(D^\alpha - a)$ menghasilkan:

$$\begin{aligned} -c(D^\alpha - a)x + (D^\alpha - a)(D^\alpha - d)y &= 0, \\ -cby + (D^\alpha - a)(D^\alpha - d)y &= 0, \\ D^{2\alpha}y - (a + d)(D^\alpha y) + (ad - bc)y &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Persamaan (3.4) adalah persamaan diferensial *fractional* linear orde 2α .

Teorema 3.1. [2] *Jika $(a + d)^2 - 4(ad - bc) > 0$, maka solusi dari (3.1) adalah*

$$\begin{aligned} x &= A_1 E_\alpha(\lambda_1 t^\alpha) + B_1 E_\alpha(\lambda_2 t^\alpha) \\ y &= A_2 E_\alpha(\lambda_1 t^\alpha) + B_2 E_\alpha(\lambda_2 t^\alpha) \end{aligned} \quad (3.5)$$

dimana A_2 dan B_2 adalah konstanta sebarang dan $A_1 = \frac{A_2(\lambda_1 - d)}{c}$ dan $B_1 = \frac{B_2(\lambda_2 - d)}{c}$.

Bukti. Turunan *fractional* ke α dari persamaan kedua (3.5) adalah

$$D^\alpha y = A_2 \lambda_1 E_\alpha(\lambda_1 t^\alpha) + B_2 \lambda_2 E_\alpha(\lambda_2 t^\alpha). \quad (3.6)$$

Pengurangan (3.6) dengan $\lambda_1 y$ diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} D^\alpha y - \lambda_1 y &= A_2 \lambda_1 E_\alpha(\lambda_1 t^\alpha) + B_2 \lambda_2 E_\alpha(\lambda_2 t^\alpha) - \lambda_1 y, \\ &= A_2 \lambda_1 E_\alpha(\lambda_1 t^\alpha) + B_2 \lambda_2 E_\alpha(\lambda_2 t^\alpha) - \lambda_1 (A_2 E_\alpha(\lambda_1 t^\alpha) + B_2 E_\alpha(\lambda_2 t^\alpha)), \\ &= B_2 (\lambda_2 - \lambda_1) E_\alpha(\lambda_2 t^\alpha). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Turunan ke α dari (3.7) adalah:

$$D^\alpha (D^\alpha - \lambda_1 y) = D^\alpha (B_2 (\lambda_2 - \lambda_1) E_\alpha(\lambda_2 t^\alpha)), \quad (3.8)$$

$$D^{2\alpha} y - \lambda_1 D^\alpha y = B_2 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1) E_\alpha(\lambda_2 t^\alpha). \quad (3.9)$$

Dengan mensubstitusi (3.7) ke persamaan (3.9) diperoleh:

$$\begin{aligned} D^{2\alpha} y - \lambda_1 D^\alpha y &= \lambda_2 (D^\alpha y - \lambda_1 y), \\ &= \lambda_2 D^\alpha y - \lambda_1 \lambda_2 y, \\ D^{2\alpha} y - (a + d) D^\alpha y + (ad - bc) y &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Persamaan (3.10) menunjukkan bahwa persamaan kedua (3.5) adalah solusi dari persamaan (3.4). Untuk mendapatkan solusi x dari persamaan (3.1), substitusi persamaan kedua dari (3.5) ke persamaan kedua dari (3.1), yaitu

$$\begin{aligned} D^\alpha y &= cx + dy \\ D^\alpha [A_2 E_\alpha(\lambda_1 t^\alpha) + B_2 E_\alpha(\lambda_2 t^\alpha)] &= cx + d(AE_\alpha(\lambda_1 t^\alpha) + B_2 E_\alpha(\lambda_2 t^\alpha)), \\ cx &= [A_2 \lambda_1 E_\alpha(\lambda_1 t^\alpha) + B_2 \lambda_2 E_\alpha(\lambda_2 t^\alpha)] - d(A_2 E_\alpha(\lambda_1 t^\alpha) + B_2 E_\alpha(\lambda_2 t^\alpha)), \\ cx &= A_2(\lambda_1 - d)E_\alpha(\lambda_1 t^\alpha) + B_2(\lambda_2 - d)E_\alpha(\lambda_2 t^\alpha). \end{aligned}$$

atau dapat ditulis:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{c} [A_2(\lambda_1 - d)E_\alpha(\lambda_1 t^\alpha) + B_2(\lambda_2 - d)E_\alpha(\lambda_2 t^\alpha)], \\ &= A_1 E_\alpha(\lambda_1 t^\alpha) + B_1 E_\alpha(\lambda_2 t^\alpha), \text{ dimana} \\ A_1 &= \frac{A_2(\lambda_1 - d)}{c}; \quad B_1 = \frac{B_2(\lambda_2 - d)}{c}. \end{aligned} \quad \square$$

Teorema 3.2. [2] *Jika $(a + d)^2 - 4(ad - bc) = 0$, maka solusi dari (3.1) adalah:*

$$\begin{aligned} x &= (A_1 t^\alpha + A_2) E_\alpha(\lambda t^\alpha), \\ y &= (B_1 t^\alpha + B_2) E_\alpha(\lambda t^\alpha). \end{aligned} \quad (3.11)$$

dimana B_1 dan B_2 adalah konstanta sebarang dan $A_1 = \frac{(\lambda - d)B_1}{c}$, $A_2 = \frac{\Gamma(1 + \alpha)B_1 + (\lambda - d)B_2}{c}$.

Bukti. Turunan *fractional* ke α dari persamaan kedua (3.11) adalah:

$$D^\alpha y = \Gamma(1 + \alpha)B_1 E_\alpha(\lambda t^\alpha) + (B_1 t^\alpha + B_2)\lambda E_\alpha(\lambda t^\alpha). \quad (3.12)$$

Pengurangan (3.12) dengan λy , memberikan:

$$\begin{aligned} D^\alpha y - \lambda y &= \Gamma(1 + \alpha)B_1 E_\alpha(\lambda t^\alpha) + (B_1 t^\alpha + B_2)\lambda E_\alpha(\lambda t^\alpha) \\ &\quad - \lambda((B_1 t^\alpha + B_2)E_\alpha(\lambda t^\alpha)), \\ &= \Gamma(1 + \alpha)B_1 E_\alpha(\lambda t^\alpha). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Turunan ke α dari (3.13) adalah:

$$\begin{aligned} D^\alpha (D^\alpha y - \lambda y) &= D^\alpha (\Gamma(1 + \alpha)B_1 E_\alpha(\lambda t^\alpha)), \\ D^{2\alpha} y - \lambda D^\alpha y &= \lambda \Gamma(1 + \alpha)B_1 E_\alpha(\lambda t^\alpha), \\ &= \lambda (D^\alpha y - \lambda y), \\ D^{2\alpha} y - \lambda D^\alpha y &= \lambda D^\alpha y - \lambda^2 y, \\ D^{2\alpha} y - 2\lambda D^\alpha y + \lambda^2 y &= 0, \\ D^{2\alpha} y - (a + d)D^\alpha y + \frac{1}{4}(a + d)^2 y &= 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Persamaan (3.14) menunjukkan bahwa persamaan kedua (3.11) adalah solusi dari persamaan (3.4). Untuk mendapatkan solusi x dari persamaan (3.1), substitusi per-

samaan kedua dari (3.11) ke persamaan kedua dari (3.1), menghasilkan:

$$\begin{aligned}
D^\alpha y &= cx + dy, \\
D^\alpha [(B_1 t^\alpha + B_2) E_\alpha(\lambda t^\alpha)] &= cx + d[(B_1 t^\alpha + B_2) E_\alpha(\lambda t^\alpha)], \\
\Gamma(1 + \alpha) B_1 E_\alpha(\lambda t^\alpha) + (B_1 t^\alpha + B_2) \lambda E_\alpha(\lambda t^\alpha) &= cx + d[(B_1 t^\alpha + B_2) E_\alpha(\lambda t^\alpha)]. \\
cx &= \Gamma(1 + \alpha) B_1 E_\alpha(\lambda t^\alpha) + (\lambda - d) [(B_1 t^\alpha + B) E_\alpha(\lambda t^\alpha)], \\
x &= \frac{1}{c} [\Gamma(1 + \alpha) B_1 E_\alpha(\lambda t^\alpha) + (\lambda - d) [(B_1 t^\alpha + B_2) E_\alpha(\lambda t^\alpha)], \\
&= \frac{1}{c} [\Gamma(1 + \alpha) B_1 E_\alpha(\lambda t^\alpha) + (\lambda - d) [(B_1 t^\alpha E_\alpha(\lambda t^\alpha) + (\lambda - d) B_2 E_\alpha(\lambda t^\alpha)], \\
&= \frac{1}{c} [(\lambda - d) [(B_1 t^\alpha E_\alpha(\lambda t^\alpha) + [\Gamma(1 + \alpha) B_1 + (\lambda - d) B_2] E_\alpha(\lambda t^\alpha)], \\
&= \frac{1}{c} (\lambda - d) [(B_1 t^\alpha E_\alpha(\lambda t^\alpha) + [\Gamma(1 + \alpha) B_1 + (\lambda - d) B_2] E_\alpha(\lambda t^\alpha)], \\
&= A_1 t^\alpha E_\alpha(\lambda t^\alpha) + A_2 E_\alpha(\lambda t^\alpha), \\
&= (A_1 t^\alpha + A_2) E_\alpha(\lambda t^\alpha), \tag{3.15}
\end{aligned}$$

dimana $A_1 = \frac{(\lambda - d) B_1}{c}$, $A_2 = \frac{\Gamma(1 + \alpha) B_1 + (\lambda - d) B_2}{c}$. □

Teorema 3.3. [2] Jika $(a - d)^2 - 4(ad - bc) < 0$ dan $\lambda_1 = p + iq$, $\lambda_2 = p - iq$, maka solusi dari (3.1) adalah:

$$\begin{aligned}
x &= E_\alpha(pt^\alpha) [M_1 \cos_\alpha(bt^\alpha) + N_1 \sin_\alpha(qt^\alpha)] \\
y &= E_\alpha(pt^\alpha) [M_2 \cos_\alpha(qt^\alpha) + N_2 \sin_\alpha(qt^\alpha)] \tag{3.16}
\end{aligned}$$

dimana M_2 dan N_2 adalah konstanta sebarang dan:

$$M_1 = \left(\frac{p - d}{c} \right) M_2 + \frac{q}{c} N_2, \text{ dan } N_1 = \left(\frac{p - d}{c} \right) N_2 - \frac{q}{c} M_2.$$

Bukti. Turunan *fractional* ke α dari persamaan kedua (3.16) adalah:

$$\begin{aligned}
D^\alpha y &= p E_\alpha(pt^\alpha) [M_2 \cos_\alpha(qt^\alpha) + N_2 \sin_\alpha(qt^\alpha)], \\
&+ E_\alpha(pt^\alpha) [-M_2 q \sin_\alpha(qt^\alpha) + N_2 q \cos_\alpha(qt^\alpha)]. \tag{3.17}
\end{aligned}$$

Pengurangan (3.17) dengan py , memberikan:

$$\begin{aligned}
D^\alpha y - py &= p E_\alpha(pt^\alpha) [M_2 \cos_\alpha(qt^\alpha) + N_2 \sin_\alpha(qt^\alpha)] \\
&+ E_\alpha(pt^\alpha) [-M_2 q \sin_\alpha(qt^\alpha) + N_2 q \cos_\alpha(qt^\alpha)] \\
&- p (E_\alpha(pt^\alpha) [M_2 \cos_\alpha(qt^\alpha) + N_2 \sin_\alpha(qt^\alpha)]) \\
&= E_\alpha(pt^\alpha) [-M_2 q \sin_\alpha(qt^\alpha) + N_2 q \cos_\alpha(qt^\alpha)]. \tag{3.18}
\end{aligned}$$

Turunan ke α dari (3.18) adalah:

$$\begin{aligned}
D^\alpha (D^\alpha y - py) &= D^\alpha (E_\alpha(pt^\alpha) [-M_2 q \sin_\alpha(qt^\alpha) + N_2 q \cos_\alpha(qt^\alpha)]), \\
D^{2\alpha} y - p D^\alpha y &= p E_\alpha(pt^\alpha) [-M_2 q \sin_\alpha(qt^\alpha) + N_2 q \cos_\alpha(qt^\alpha)] \\
&+ E_\alpha(pt^\alpha) [-M_2 q^2 \cos_\alpha(qt^\alpha) - N_2 q^2 \sin_\alpha(qt^\alpha)]. \tag{3.19}
\end{aligned}$$

Dengan mensubstitusi persamaan (3.18) dan persamaan (3.16) ke (3.19) diperoleh

$$D^{2\alpha}y - pD^\alpha y = p(D^\alpha y - py) - q^2y. \quad (3.20)$$

Persamaan (3.20) menjadi

$$D^{2\alpha}y - 2pD^\alpha y + (p^2 + q^2)y = 0. \quad (3.21)$$

Persamaan (3.21) menunjukkan bahwa persamaan kedua (3.3) adalah solusi dari persamaan (3.4). Untuk mendapatkan solusi x dari persamaan (3.1), substitusi persamaan kedua dari (3.16) ke persamaan kedua dari (3.1), menghasilkan:

$$D^\alpha y = cx + dy,$$

$$D^\alpha [E_\alpha(pt^\alpha)[M_2 \cos_\alpha(qt^\alpha) + N_2 \sin_\alpha(qt^\alpha)] = cx + d[E_\alpha(pt^\alpha)[M_2 \cos_\alpha(qt^\alpha) + N_2 \sin_\alpha(qt^\alpha)],$$

$$\begin{aligned} \iff pE_\alpha(pt^\alpha)[M_2 \cos_\alpha(qt^\alpha) + N_2 \sin_\alpha(qt^\alpha)] + E_\alpha(pt^\alpha)[-M_2 q \sin_\alpha(qt^\alpha) + N_2 q \cos_\alpha(qt^\alpha)] =, \\ cx + d[E_\alpha(pt^\alpha)[M_2 \cos_\alpha(qt^\alpha) + N_2 \sin_\alpha(qt^\alpha)]] \end{aligned}$$

$$\iff cx = (p - d)[E_\alpha(pt^\alpha)[M_2 \cos_\alpha(qt^\alpha) + N_2 \sin_\alpha(qt^\alpha)]] + [E_\alpha(pt^\alpha)[-M_2 q \sin_\alpha(qt^\alpha) + N_2 q \cos_\alpha(qt^\alpha)]]$$

$$\iff x = \frac{1}{c}((p - d)[E_\alpha(pt^\alpha)[M_2 \cos_\alpha(qt^\alpha) + N_2 \sin_\alpha(qt^\alpha)]] + [E_\alpha(pt^\alpha)[-M_2 q \sin_\alpha(qt^\alpha) + N_2 q \cos_\alpha(qt^\alpha)]])$$

$$= [E_\alpha(pt^\alpha)]\left(\frac{(p - d)}{c}[M_2 \cos_\alpha(qt^\alpha) + N_2 \sin_\alpha(qt^\alpha)] + \frac{q}{c}[-M_2 \sin_\alpha(qt^\alpha) + N_2 \cos_\alpha(qt^\alpha)]\right),$$

$$= [E_\alpha(pt^\alpha)]\left(\frac{(p - d)}{c}[M_2 \cos_\alpha(qt^\alpha) + N_2 \sin_\alpha(qt^\alpha)] + \frac{q}{c}[N_2 \cos_\alpha(qt^\alpha) - M_2 \sin_\alpha(qt^\alpha)]\right),$$

$$= [E_\alpha(pt^\alpha)][M_1 \cos_\alpha(qt^\alpha) + N_1 \sin_\alpha(qt^\alpha)].$$

$$\text{dimana } M_1 = \left(\frac{p-d}{c}\right) M_2 + \frac{q}{c} N_2 \text{ dan } N_1 = \left(\frac{p-d}{c}\right) N_2 - \frac{q}{c} M_2.$$

□

4. Kesimpulan

Turunan tipe Jumarie adalah salah satu metode yang dapat menyelesaikan beberapa sistem persamaan diferensial fraksional linier dengan orde α .

5. Ucapan Terima kasih

Terima kasih kepada Bapak Dr. Mahdihan Syafwan, Ibu Monika Rianti Helmi, M.Si, dan Ibu Riri Lestari, M.Si yang telah memberikan kritik dan saran untuk penulisan artikel ini.

Daftar Pustaka

- [1] Ghosh. U, Sengupta. S, et al. 2015. Analytic Solution of Linear Fractional Differential Equation With Jumarie Derivative in Term of Mittag-Leffler Function. *American Journal of Mathematical Analysis*, 3(2), 32 – 38, doi:10.12691/ajma-3-2-2.
- [2] Ghosh. U, Sarkar. S, and Das. S,. 2015. Solution of System of linear Fractional Differential Equation with derivative of Jumarie type . *America Journal of Mathematical Analysis*, 3(3): 72 – 84. doi:10.12691/ajma-3-3-3.

- [3] Jumarie. G. 2008. Faoriers Transformation of Fractional Order Via Mittag-Leffler Function and Modified Riemend-Lioville Derivatives. *J. Appl. Math.Informatics*. 26. 1101 – 1121.
- [4] Jumarie. G. 2006. Modified Riemann-Liouville Derivative and Fractional Taylor Series of Nondifferentiable Functional Further Results. *Computer and Mathematics with Applications* 51. 1367 – 1376.
- [5] Milici. Constantin, Gheorghe. D, J. Tanreiro. 2019. *Introduction to Fractional Differential Equations*. Springer, Switzerland.
- [6] Miller. Kenneth S. 1993. *An Introduction to The Fractional Calculus and Fractional Differential Equation*. Simultaneously, Canada.
- [7] Ortigueira, M. D. 2011. *Fractional Calculus For Scientists and Engineers*. Springer. New York.
- [8] Spiegel, M. R. 2010. *Theory and Problem of Advanced Calculus*. McGraw-Hill International Book Company. New York.