

## KETERCAPAIAN SISTEM FRAKSIONAL LINIER KONTINU DENGAN INPUT KONSTAN

FAUZANA LAILATURRAHMI, HAZMIRA YOZZA\*

*Program Studi S1 Matematika,  
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,  
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.  
 email : fauzanalaila98@gmail.com, hazmirayozza@sci.unand.ac.id*

Diterima 16 Juni 2020    Direvisi 22 Juni 2020    Dipublikasikan 13 Juli 2020

**Abstrak.** Dalam artikel ini dikaji kriteria ketercapaian sistem fraksional linier kontinu dengan input konstan berikut:

$$D^\alpha \mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

dimana  $D^\alpha$  menyatakan operator turunan fraksional,  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  menyatakan vektor keadaan,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  menyatakan vektor input,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  dan  $t$  menyatakan waktu. Kriteria ketercapaian tersebut diperoleh dengan menggunakan kaidah aljabar linier. Beberapa contoh disajikan untuk mengilustrasikan kriteria ketercapaian tersebut.

*Kata Kunci:* Sistem fraksional linier, ketercapaian, turunan Caputo

### 1. Pendahuluan

Seiring dengan berkembangnya ilmu pengetahuan, banyak fenomena yang terjadi dalam kehidupan sehari-hari yang dapat dimodelkan dalam suatu persamaan diferensial. Beberapa model matematika berupa sistem persamaan diferensial dengan orde  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  telah banyak dipublikasikan, seperti model pada sistem mekanik kendaraan, sistem fluida, sistem termal dan lainnya [8]. Namun, akhir-akhir ini berkembang pula persamaan diferensial dengan orde pecahan. Persamaan diferensial dengan orde pecahan disebut sebagai persamaan diferensial fraksional.

Salah satu model matematika yang sering dijumpai dalam penerapan adalah sistem kontrol linier. Bentuk standar sistem kontrol linier (sistem linier) berupa suatu sistem persamaan diferensial non homogen berikut.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad t \geq 0, \quad (1.1)$$

dimana  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  menyatakan vektor keadaan,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  menyatakan vektor input,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  dan  $t$  menyatakan waktu.

\*penulis korespondensi

Ada berbagai aspek yang dikaji dalam sistem kontrol linier ini, salah satunya adalah konsep ketercapaian. Definisi ketercapaian diperkenalkan dalam literatur [4], yaitu suatu keadaan  $\mathbf{x}_f \in \mathbb{R}^n$  dikatakan tercapai dalam waktu  $t_f$  jika ada input  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  untuk  $t \in [0, t_f]$  yang membawa keadaan  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$  kepada keadaan  $\mathbf{x}_f = \mathbf{x}(t_f)$ . Jika setiap keadaan  $\mathbf{x}_f \in \mathbb{R}^n$  tercapai dalam waktu  $t_f$  maka sistem (1.1) disebut tercapai dalam waktu  $t_f$ .

Pengembangan orde fraksional dari sistem (1.1) berbentuk persamaan diferensial fraksional berikut.

$$D^\alpha \mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \quad n-1 < \alpha < n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.2)$$

dimana  $D^\alpha$  menyatakan operator turunan fraksional. Ada beberapa macam operator turunan fraksional, diantaranya adalah turunan fraksional Caputo, turunan fraksional Riemann Liouville dan lainnya [5]. Definisi ketercapaian mesti berlaku untuk sistem (1.2).

Dalam artikel ini dikaji kembali syarat perlu dan cukup untuk ketercapaian sistem (1.2) sebagaimana pada referensi [8] dengan input adalah vektor konstan di  $\mathbb{R}^m$ . Untuk kesederhanaan, dalam studi ini turunan fraksional yang digunakan adalah turunan fraksional Caputo dengan  $0 < \alpha < 1$ . Pembahasan didahului dengan mengkonstruksi konsep ketercapaian untuk sistem linier standar.

## 2. Landasan Teori

**Teorema 2.1.** [3] *Misalkan  $A$  adalah matriks berukuran  $m \times n$ , maka pernyataan berikut ekuivalen.*

- (i)  $A$  memiliki invers kanan.
- (ii) Untuk setiap  $\hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^m$ , sistem persamaan  $A\mathbf{x} = \hat{\mathbf{y}}$  selalu dapat diselesaikan.
- (iii)  $\text{Rank}(A) = m$ .

**Bukti.** Misalkan  $A$  adalah matriks berukuran  $m \times n$ , akan ditunjukkan (i), (ii), dan (iii) ekuivalen.

(i  $\Rightarrow$  ii). Misalkan  $A$  memiliki invers kanan  $B$ , maka:

$$A(B\hat{\mathbf{y}}) = (AB)\hat{\mathbf{y}} = I\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{y}}.$$

Akibatnya  $B\hat{\mathbf{y}}$  adalah solusi untuk  $A\mathbf{x} = \hat{\mathbf{y}}$ .

(ii  $\Rightarrow$  i). Misalkan untuk setiap  $\hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^m$ , sistem persamaan  $A\mathbf{x} = \hat{\mathbf{y}}$  selalu dapat diselesaikan. Akan dicari matriks  $B$  berukuran  $n \times m$  yang merupakan invers kanan dari matriks  $A$  sehingga

$$AB = I_m.$$

Misalkan  $B_1, B_2, \dots, B_m$  (untuk setiap  $B_i$  adalah matriks  $n \times 1$ ) adalah kolom-kolom dari  $B$ , maka untuk setiap  $B_i$  diperoleh

$$AB_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad AB_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad AB_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Setiap persamaan di atas merupakan suatu sistem persamaan dengan kolom  $B_i$  memuat variabel yang tidak diketahui. Karena untuk setiap  $\hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^m$  sistem persamaan  $A\mathbf{x} = \hat{\mathbf{y}}$  selalu dapat diselesaikan, maka  $A$  akan mempunyai suatu invers kanan (penyelesaian untuk setiap  $B_i$ ).

(iii  $\Rightarrow$  ii). Misalkan  $\text{rank}(A) = m$ . Artinya banyaknya baris dari  $A$  sama dengan rank matriks  $A$ . Hal ini mengakibatkan bahwa sistem  $A\mathbf{x} = \hat{\mathbf{y}}$  dapat diselesaikan.

(ii  $\Rightarrow$  iii). Dengan menggunakan kontraposisi, misalkan  $\text{rank}(A) < m$ . Akan ditunjukkan sistem  $A\mathbf{x} = \hat{\mathbf{y}}$  tidak dapat diselesaikan. Dengan melakukan serangkaian operasi baris elementer pada  $A$ , terbentuk matriks eselon baris tereduksi  $R$ . Karena  $\text{rank}(A) < m$  maka  $R$  memiliki barisan yang beberapa elemen dibawahnya bernilai nol. Misalkan  $r = (o_1, o_2, \dots, o_k)$  adalah barisan operasi baris elementer untuk mendapatkan matriks  $R$  dari matriks  $A$  dan  $r^* = (o_k, o_{k-1}, \dots, o_1)$  dengan  $o_i$  merupakan operasi baris elementer ke- $i$ . Misalkan vektor  $\hat{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^m$  adalah vektor yang diperoleh dengan melakukan rangkaian operasi baris elementer  $r^*$  pada  $\mathbf{e}_m$  dengan

$$\mathbf{e}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

maka sebaliknya  $\mathbf{e}_m$  adalah vektor yang diperoleh dengan melakukan operasi baris elementer  $r$  pada  $\hat{\mathbf{b}}$ . Artinya,  $A\mathbf{x} = \hat{\mathbf{b}}$  ekuivalen baris dengan  $R\mathbf{x} = \mathbf{e}_m$ . Perhatikan bahwa  $R\mathbf{x} = \mathbf{e}_m$  tidak memiliki solusi. Dengan demikian sistem  $A\mathbf{x} = \hat{\mathbf{y}}$  tidak dapat diselesaikan. ■

Beberapa fungsi yang berperan penting dalam pembahasan sistem linier fraksional adalah fungsi Gamma yang menggeneralisasi  $n!$  ke bilangan tidak bulat, bahkan rasional dan fungsi Mittag-Leffler.

**Definisi 2.2.** [4] Fungsi Gamma yang dinotasikan dengan  $\Gamma(n)$  didefinisikan oleh integral

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt, \quad n > 0.$$

**Definisi 2.3.** [5] Suatu fungsi kompleks  $z$  yang didefinisikan

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

disebut sebagai fungsi Mittag-Leffler dengan satu parameter.

**Definisi 2.4.** [4] Suatu fungsi kompleks  $z$  yang didefinisikan

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

disebut sebagai fungsi Mittag-Leffler dengan dua parameter.

Dalam makalah ini, definisi turunan fraksional yang digunakan adalah definisi yang dikembangkan oleh Caputo.

**Definisi 2.5.** [4] Turunan fraksional Caputo orde  $\alpha \in \mathbb{R}$  dari fungsi  $f(t)$  dengan  $n - 1 < \alpha < n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , dinotasikan dengan  $D^\alpha f(t)$ , didefinisikan sebagai

$$D^\alpha f(t) = \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha+1-n}},$$

dimana  $f^{(n)}(\tau)$  adalah turunan ke- $n$  dari fungsi  $f(\tau)$ .

**Teorema 2.6.** [6] Transformasi Laplace dari turunan fractional Caputo diberikan oleh

$$\mathcal{L}[D^\alpha f(t)] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=1}^n s^{\alpha-k} f^{(k-1)}(0),$$

dimana  $n - 1 < \alpha < n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Bukti.** Dengan menggunakan sifat konvolusi pada transformasi Laplace, diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[D^\alpha f(t)] &= \mathcal{L} \left[ \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha+1-n}} \right], \\ &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \mathcal{L}[t^{n-\alpha-1}] \mathcal{L}[f^{(n)}(t)]. \end{aligned}$$

Karena  $\mathcal{L}[t^k] = \frac{k!}{s^{k+1}}$ , maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[D^\alpha f(t)] &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{(n - \alpha - 1)!}{s^{n-\alpha}} \left[ s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0) \right], \\ &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{\Gamma(n - \alpha)}{s^{n-\alpha}} \left[ s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0) \right], \\ &= s^\alpha F(s) - \sum_{k=1}^n s^{\alpha-k} f^{(k-1)}(0). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Teorema 2.7.** [4] Solusi dari sistem (1.2) diberikan oleh

$$\mathbf{x}(t) = \Phi_0(t) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t - \tau) B \mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.1)$$

dengan

$$\Phi_0(t) = E_\alpha(At^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)}, \quad (2.2)$$

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]} = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(At^\alpha), \quad (2.3)$$

dimana  $E_\alpha(At^\alpha)$  adalah fungsi matriks Mittag-Leffler dan  $\Gamma(x)$  adalah fungsi Gamma.

**Bukti.** Dengan menerapkan transformasi Laplace pada 1.2, diperoleh

$$\mathcal{L}[D^\alpha \mathbf{x}(t)] = \mathcal{L}[A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)] = \mathcal{L}[A\mathbf{x}(t)] + \mathcal{L}[B\mathbf{u}(t)]. \quad (2.4)$$

Berdasarkan Teorema 2.6, dengan  $0 < \alpha < 1$  diperoleh

$$\mathcal{L}[D^\alpha \mathbf{x}(t)] = s^\alpha \mathbf{X}(s) - s^{\alpha-1} \mathbf{x}_0, \quad (2.5)$$

Dengan mensubstitusikan (2.5) ke (2.4), diperoleh

$$\begin{aligned} s^\alpha \mathbf{X}(s) - s^{\alpha-1} \mathbf{x}_0 &= A\mathbf{X}(s) + B\mathbf{U}(s), \\ \mathbf{X}(s) &= (I_n s^\alpha - A)^{-1} (s^{\alpha-1} \mathbf{x}_0 + B\mathbf{U}(s)). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} (I_n s^\alpha - A)^{-1} &= (I_n s^\alpha - (s^{-\alpha} s^\alpha) A)^{-1} \\ &= ((I_n - s^{-\alpha} A) s^\alpha)^{-1} \\ &= s^{-\alpha} (I_n - s^{-\alpha} A)^{-1} \\ &= s^{-\alpha} (I + s^{-\alpha} A + s^{-2\alpha} A^2 + s^{-3\alpha} A^3 + \dots) \\ &= s^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} s^{-k\alpha} A^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} s^{-k\alpha} s^{-\alpha} A^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-(k+1)\alpha}. \end{aligned}$$

Sehingga persamaan (2.6) menjadi:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(s) &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-(k+1)\alpha} \right) (s^{\alpha-1} \mathbf{x}_0 + B\mathbf{U}(s)), \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-(k\alpha+1)} \mathbf{x}_0 + \sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-(k+1)\alpha} B\mathbf{U}(s). \end{aligned}$$

Selanjutnya invers transformasi Laplace dari persamaan di atas adalah

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{X}(s)], \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k \mathcal{L}^{-1}[s^{-(k\alpha+1)}] \mathbf{x}_0 + \sum_{k=0}^{\infty} A^k \mathcal{L}^{-1}[s^{-(k+1)\alpha} B\mathbf{U}(s)], \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} \mathbf{x}_0 + \sum_{k=0}^{\infty} A^k \mathcal{L}^{-1}[s^{-(k+1)\alpha}] \mathcal{L}^{-1}[B\mathbf{U}(s)] \\ &= \Phi_0(t) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau) B\mathbf{u}(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

dengan:

$$\begin{aligned}
 \Phi_0(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} = E_{\alpha}(At^{\alpha}), \\
 \Phi(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k \mathcal{L}^{-1}[s^{-(k+1)\alpha}] \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]} \\
 &= t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(At^{\alpha}). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

### 3. Pembahasan

**Definisi 3.1.** [8] Sistem (1.1) atau (1.2) adalah tercapai dalam waktu  $t_f$  jika setiap keadaan  $\mathbf{x}_f \in \mathbb{R}^n$  tercapai dalam waktu  $t_f$  oleh vektor konstan  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ , atau dengan kata lain terdapat suatu vektor input konstan  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  untuk  $t \in [0, t_f]$  yang membawa keadaan  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$  kepada sebarang keadaan  $\mathbf{x}_f$ .

Dari definisi ketercapaian dan persamaan (2.1), untuk setiap  $\mathbf{x}_f \in \mathbb{R}^n$  berlaku

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f = \int_0^{t_f} \Phi(\tau) B U d\tau = \int_0^{t_f} \Phi(\tau) d\tau B \mathbf{u}, \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{t_f} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \tau^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]} d\tau B \mathbf{u}, \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma[(k+1)\alpha]} \int_0^{t_f} \tau^{(k+1)\alpha-1} d\tau B \mathbf{u}, \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma[(k+1)\alpha]} \frac{1}{(k+1)\alpha} \left[ \tau^{(k+1)\alpha} \right]_0^{t_f} B \mathbf{u}, \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma[(k+1)\alpha] + 1} t_f^{(k+1)\alpha} B \mathbf{u}, \\
 &= t_f^{\alpha} E_{\alpha,\alpha+1}(At_f^{\alpha}) B \mathbf{u}. \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

Misalkan

$$R_f = E_{\alpha,\alpha+1}(At_f^{\alpha}) B \quad (3.3)$$

Perhatikan bahwa  $R_f$  adalah suatu matriks berukuran  $n \times m$ . Berdasarkan Teorema 2.1, solusi persamaan (3.2) adalah

$$\mathbf{u} = t_f^{-\alpha} R_f^+ \mathbf{x}_f \quad (3.4)$$

untuk setiap  $\mathbf{x}_f \in \mathbb{R}^n$ , dimana  $R_f^+ \in \mathbb{R}^{m \times n}$  merupakan invers semu kanan dari  $R_f$  jika dan hanya jika  $\text{rank}(R_f) = n$ . Dengan demikian, teorema berikut ini telah dibuktikan.

**Teorema 3.2.** [8] *Sistem 1.2 adalah tercapai oleh suatu vektor input konstan  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  jika dan hanya jika  $\text{rank}(R_f) = n$ .*

**Contoh 3.3.** Perhatikan kembali persamaan (1.2) dengan matriks:

$$A = \begin{bmatrix} -1.53 & 0.67 \\ -3.33 & -3.33 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1.33 & -0.67 \\ 0 & -3.33 & 3.33 \end{bmatrix}, \quad \text{dan } \alpha = 0.8.$$

Akan diperiksa apakah sistem tersebut tercapai atau tidak pada waktu  $t_f = 5$ . Dengan menggunakan persamaan (3.3) diperoleh:

$$\begin{aligned} R_f &= E_{\alpha, \alpha+1}(At_f^\alpha)B, \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma[(k+1)\alpha + 1]} t_f^{k\alpha} B, \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^{k(0.8)}}{\Gamma[(k+1)0.8 + 1]} \begin{bmatrix} -1.53 & 0.67 \\ -3.33 & -3.33 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 2 & -1.33 & -0.67 \\ 0 & -3.33 & 3.33 \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} 0.24 & -0.24 & 0 \\ -0.24 & -0.034 & 0.27 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Karena  $\text{rank} \begin{bmatrix} 0.24 & -0.24 & 0 \\ -0.24 & -0.034 & 0.27 \end{bmatrix} = 2 = n$ , maka berdasarkan Teorema 3.2 sistem adalah tercapai. Ini berarti bahwa terdapat suatu vektor input konstan  $\mathbf{u}$  yang membawa sistem dari keadaan awal

$$\mathbf{x}_0 = [0 \ 0]^T$$

kepada sebarang keadaan akhir

$$\mathbf{x}(t_f) = [x_1(5) \ x_2(5)]^T.$$

Oleh karena itu jika diberikan  $\mathbf{x}(5) = [1 \ 0.5]^T$ , maka vektor input  $\mathbf{u}$  yang membawa sistem dari keadaan awal  $\mathbf{x}_0 = [0 \ 0]^T$  kepada  $\mathbf{x}(t_f)$  adalah:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= t_f^{-\alpha} R_f^T [R_f R_f^T]^{-1} x_f, \\ &= 5^{-0.8} \begin{bmatrix} 0.24 & -0.24 \\ -0.24 & -0.034 \\ 0 & 27 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0.24 & -0.24 & 0 \\ -0.24 & -0.034 & 0.27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.24 & -0.24 \\ -0.24 & -0.034 \\ 0 & 27 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.26 \\ -0.89 \\ 0.63 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Contoh 3.4.** Perhatikan kembali persamaan (1.1) dengan matriks:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{dan } \alpha = 0.6.$$

Akan diperiksa apakah sistem tersebut tercapai atau tidak pada waktu  $t_f = 5$ . Dengan menggunakan persamaan (3.3) diperoleh

$$\begin{aligned} R_f &= E_{\alpha, \alpha+1}(At_f^\alpha)B, \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma[(k+1)\alpha + 1]} t_f^{k\alpha} B, \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^{k(0.6)}}{\Gamma[(k+1)0.6 + 1]} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} 0.173154 & 0.432886 & -0.259731 \\ -0.086577 & -0.216443 & 0.129865 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Karena  $\text{rank} \begin{bmatrix} 0.18007188 & 0.45017972 & -0.27010783 \\ -0.9003594 & -0.22508986 & 0.1350539 \end{bmatrix} = 1 \neq n$ , maka berdasarkan Teorema 3.2 sistem tidak tercapai.

#### 4. Kesimpulan

Berdasarkan uraian sebelumnya, sistem

$$D^\alpha \mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (4.1)$$

adalah tercapai dalam waktu  $t_f$  jika setiap keadaan  $\mathbf{x}_f \in \mathbb{R}^n$  tercapai dalam waktu  $t_f$  oleh vektor konstan  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ , atau dengan kata lain, terdapat suatu vektor input konstan  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  untuk  $t \in [0, t_f]$  yang membawa keadaan  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$  kepada sebarang keadaan  $\mathbf{x}_f$ .

Syarat perlu dan syarat cukup untuk ketercapaian sistem (4.1) adalah

$$\text{rank}(R_f) = n, \quad (4.2)$$

dimana  $R_f = E_{\alpha, \alpha+1}(At_f^\alpha)B$ .

#### 5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Prof. Dr. Muhafzan, Bapak Dr. Dodi Devianto, Ibu Dr. Shelvi Ekariani, dan Bapak Dr. Mahdhivan Syafwan yang telah memberikan masukan dan saran dalam penyempurnaan penulisan artikel ini.

#### Daftar Pustaka

- [1] Anton, H., 1991, *Aljabar Linier Elementer*, Edisi Kedelapan Jilid I, Erlangga, Jakarta.
- [2] Chen, C.T., 1984, *Linear System Theory and Design*, Cbs College Publishing, New York.
- [3] Jacob, Bill., 1990, *Linear Algebra*, W. H. Freeman and Company, New York.
- [4] Kaczorek, T., 2011, *Selected Problems in Fractional Systems Theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- [5] Lindfield, G. and Penny, J., 2018, *Numerical Methods: Using MATLAB*, Academic Press, USA.



- [6] Podlubny, I., 1999, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, London.
- [7] Ren Duan, Guang., 2010, *Analysis and Design of Descriptor Linear Systems*, Springer, New York.
- [8] Rogowski, K., 2016, Reachability of Standard and Fractional Continuous-Time Systems with Constant Inputs, *Archives of Control Sciences*, 26(2): 147 – 159.
- [9] Ogata, K., 2002, *Modern Control Engineering*, Prentice Hall, New Jersey.
- [10] Varberg, D., Purcell, E.J., dan Rigdon, S.E., 2006, *Calculus*, Pearson, New York.