Jurnal Matematika UNAND
Vol. **IX** No. **3** Hal. 247 – 255
Edisi Juli 2020
ISSN : 2303–291X
e-ISSN : 2721–9410

METODE *SMALL AREA ESTIMATION HIERARCHICAL BAYES* DALAM PENDUGAAN PERSENTASE KASUS PENYAKIT KUSTA BASAH DI PROVINSI JAWA TIMUR TAHUN 2018

NADIA HUSNA, HAZMIRA YOZZA*, DODI DEVIANTO
Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : nadia98husna@gmail.com

Diterima 16 Juni 2020 Direvisi 22 Juni 2020 Dipublikasikan 13 Juli 2020

Abstrak. Kusta adalah penyakit infeksi kronis yang disebabkan oleh bakteri yang disebut *Mycrobacterium leprae* yang menyerang saraf tepi, kulit dan jaringan tubuh lainnya. Kusta memiliki dua tipe yaitu kusta kering dan kusta basah. Penyakit kusta basah sangat mudah menular sehingga kasus kusta basah lebih banyak terjadi. Pada penelitian ini dilakukan pendugaan persentase kasus penyakit kusta basah di Provinsi Jawa Timur tahun 2018. Pendugaan dilakukan dengan penduga langsung dan dengan menggunakan metode *Small Area Estimation Hierarchical Bayes*. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa pendugaan persentase kusta basah dengan menggunakan metode *Small Area Estimation Hierarchical Bayes* diperoleh pada semua kabupaten/kota yang nilai dugaan persentase kusta basahnya diatas 90% dengan rata-rata pendugaan 0, 9550 dan cenderung lebih baik karena dilihat dari nilai *standard error*-nya yang lebih kecil dibandingkan dengan penduga langsung.

Kata Kunci: Kusta, *Small Are Estimation*, *Hierarchical Bayes*

1. Pendahuluan

Penyakit kusta merupakan penyakit menular yang disebabk*an oleh infeksi Mycrobacterium leprae* yang menyerang berbagai bagian tubuh di antaranya saraf dan kulit. Penyakit kusta memiliki dua tipe penderita yaitu penderita kusta kering dan penderita kusta basah. Kusta basah sangat mudah menular sehingga memiliki kasus yang lebih banyak. Provinsi Jawa Timur memiliki angka beban kusta tertinggi di Indonesia, berbagai program telah dilakukan namun masih banyak masyarakat yang menderita kusta. Agar program-program yang dilakukan tepat maka perlu diduga berapa persentase yang sesungguhnya menderita kusta basah atau kusta kering.

Pendugaan persentase kusta basah dilakukan dengan penduga langsung, karena ketersedian data di kabupaten/kota masih belum mencukupi untuk menduga

*penulis korespondensi

persentase kusta basah sehingga dengan ukuran sampel yang kecil akan menghasilkan ragam yang besar dan akan mempengaruhi keakuratan data tersebut. Agar tingkat akurasi lebih baik maka digunakan pendugaan tidak langsung menggunakan metode *Small Area Estimation Hierarchical Bayes* dengan meminjam informasi dari kabupaten/kota dan peubah penyerta lainnya. Peubah penyerta disini adalah faktor-faktor yang terkait dengan kusta, dengan mengetahui faktor-faktor tersebut pemerintah memilki gambaran langkah apa saja yang harus dilakukan dalam menekan angka kasus penyakit kusta di Provinsi Jawa Timur.

2. Landasan Teori

2.1. *Penduga Maximum Likelihood*

Metode *maximum likelihood* merupakan metode yang sangat berguna untuk mendapatkan penduga langsung bagi parameter. Metode penduga *maximum likelihood* adalah metode pendugaan parameter yang dilakukan dengan memaksimumkan fungsi *likelihood* yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1. *[1] Fungsi kepekatan peluang peubah acak* $X_1, X_2, \cdots, X_n$ *yang dihitung pada* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *ditulis dalam bentuk* $f(x_1, x_2, \cdots, x_n \mid \theta)$. *Untuk* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *tetap, fungsi likelihood adalah fungsi dari parameter bernilai* θ *yang dinotasikan dengan* $L(\theta)$. *Jika* $X_1, X_2, \cdots, X_n$ *merupakan sampel acak dari* $f(x \mid \theta)$ *maka*

$$\begin{aligned} L(\theta) &= f(x_1;\theta) f(x_2;\theta) \cdots f(x_n;\theta), \\ &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta). \end{aligned}$$

2.2. *Metode Pendugaan Parameter Menggunakan Metode Bayes*

Metode Bayes didasarkan pada distribusi *posterior* yang diperoleh melalui teorema Bayes dari distribusi *prior* dan dari data observasi yang digunakan untuk menyusun fungsi *likelihood*. Misalkan $f(\theta)$ adalah distribusi prior dan $f(\boldsymbol{x}|\theta)$ adalah fungsi *likelihood* dari $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$, maka fungsi kepekatan peluang posterior sebagai berikut [4]

$$f(\theta|\boldsymbol{x}) = \frac{f(\boldsymbol{x}|\theta) f(\theta)}{f(\boldsymbol{x})}. \tag{2.1}$$

Fungsi $f(\boldsymbol{x})$ merupakan *normalizing constant* yang tidak bergantung pada parameter sehingga persamaan (2.1) dapat ditulis menjadi

$$f(\theta|\boldsymbol{x}) \propto f(\boldsymbol{x}|\theta) f(\theta). \tag{2.2}$$

2.3. *Small Area Estimation (SAE)*

Small Area Estimation merupakan suatu teknik statistika untuk menduga parameter-parameter subpopulasi berdasarkan sampel yang ukurannya kecil. *Small*

Area Estimation terdiri dari dua model dasar yaitu model berbasis level area (*basic area level model*) dan model berbasis level unit (*basic unit level model*).

Basic area level, atau dapat disebut model level area, merupakan model yang didasarkan pada ketersediaan data pendukung yang hanya ada untuk area tertentu [5]. Misalkan $\boldsymbol{x}_{\mathbf{i}} = (x_{1i}, x_{2i}, \cdots, x_{pi})^T$ suatu vektor dimana i merupakan banyaknya area ke-i. Pada model ini, parameter yang akan diduga θ_i diasumsikan memiliki hubungan dengan $\boldsymbol{x}_i$ dan mengikuti model linier

$$\theta_i = \boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + v_i,\ i = 1, 2, \cdots, m. \tag{2.3}$$

dimana $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p)^T$ adalah vektor koefisien regresi berukuran $p \times 1$ dan v_i adalah pengaruh acak yang diasumsikan menyebar $N(0, \sigma_v^2)$.

Penduga θ_i dapat diketahui dengan mengasumsikan bahwa model penduga langsung $\widehat{\theta_i}$ ada, yaitu

$$\widehat{\theta_i} = \theta_i + e_i,\ i = 1, 2, \cdots, m, \tag{2.4}$$

dengan *sampling error* pada area ke-i yang diasumsikan $e_i \sim N(0, \psi_i)$, dengan ψ_i diketahui [5]. Berdasarkan persamaan (2.3) maka persamaan (2.4) akan menghasilkan model gabungan sebagai berikut:

$$\widehat{\theta_i} = \boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + v_i + e_i,\ i = 1, 2, \cdots, m. \tag{2.5}$$

2.4. *Metode Hierarchical Bayes pada SAE*

Metode *Hierarchical Bayes* (HB) merupakan metode yang mengasumsikan suatu distribusi *prior* dari suatu parameter dan teorema Bayes digunakan untuk mendefinisikan distribusi *posterior* dari parameter tersebut [5].

Dalam pendekatan HB, dinyatakan terlebih dahulu sebaran prior subjektif parameter model θ, kemudian untuk gugus data y diperoleh sebaran posterior $f(\theta|y)$ dari parameter θ yang diamati $f(\theta)$. Secara khusus, inferensi yang didasarkan pada sebaran *posterior* untuk parameter tersebut diduga melalui rata-rata *posterior*, dan presisinya diukur melalui ragam *posterior* [5].

3. Metode Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data jumlah kasus kusta di kabupaten/kota Provinsi Jawa Timur tahun 2018. Data pada penelitian ini didapatkan dari Profil Kesehatan Provinsi Jawa Timur tahun 2018.

Peubah respon dalam penelitian ini adalah jumlah kasus kusta basah di 38 kabupaten/kota di Provinsi Jawa Timur tahun 2018. Peubah penyerta terkait dengan penyakit kusta basah yang digunakan dalam penelitian ini adalah persentase rumah sehat (X_1), persentase keluarga berpemilikan sanitasi layak (X_2), kepadatan penduduk (X_3), persentase rumah tangga beperilaku hidup bersih dan sehat (X_4), persentase rumah tangga yang memiliki sarana air bersih (X_5).

Tahap-tahap yang dilakukan adalah :

(1) Mendeskripsikan peubah penyerta (X) dan peubah respon (Y).
(2) Melakukan pendugaan langsung dan menghitung *standard error*nya.

(3) Melakukan pendugaan tidak langsung menggunakan metode *Small Area Estimation Hierarchical Bayes* dan menghitung *standard error*nya.
(4) Menghitung perbandingan hasil pendugaan langsung dengan pendugaan tidak langsung begitu juga nilai *standard error*nya.

4. Pembahasan

4.1. *Pendugaan Langsung Menggunakan Maximum Likelihood*

Penduga *maximum likelihood* diperoleh dengan menentukan terlebih dahulu fungsi *likelihood*. Penduga diperoleh dengan memaksimumkan fungsi tersebut, hal ini sama dengan memaksimumkan *log likelihood*nya. Caranya dengan menurunkan fungsi tersebut terhadap parameter yang akan diduga lalu samakan dengan nol.

Misalkan U_i contoh acak Bernoulli bernilai 1 dan 0 sehingga fungsi kepekatan peluangnya menjadi

$$f(u_i|p) = p^{u_i}(1-p)^{1-u_i},\ u_i = 0, 1.$$

Selanjutnya fungsi *likelihood* dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} L(p \mid u_i) &= \prod_{i=1}^{n} f(u_i \mid p) \\ &= p^{\sum_{i=1}^{n} u_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} u_i}. \end{aligned}$$

Fungsi *log likelihood* dari distribusi ini adalah

$$\begin{aligned} \ln(L(p \mid u_i)) &= \ln\left(p^{\sum_{i=1}^{n} u_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} u_i}\right) \\ &= \ln\ p\sum_{i=1}^{n} u_i + \ln(1-p)\left(n - \sum_{i=1}^{n} u_i\right). \end{aligned}$$

Turunan pertama dari fungsi *likelihood* adalah:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp}\ln(L(p \mid u_i)) &= \frac{d}{dp}\left(\ln p\sum_{i=1}^{n} u_i + \ln(1-p)\left(n - \sum_{i=1}^{n} u_i\right)\right) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i}{p} + \frac{n-\sum_{i=1}^{n} u_i}{1-p}(-1). \end{aligned}$$

Dengan menyamakannya dengan 0 diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i}{p} &= \frac{n-\sum_{i=1}^{n} u_i}{1-p} \\ p &= \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i}{n}. \end{aligned}$$

Jika didefinisikan $Y = \sum_{i=1}^{n} U_i$ maka diperoleh penduga *maximum likelihood* bagi p adalah

$$\widehat{p} = \frac{Y}{n}. \tag{4.1}$$

Selanjutnya akan ditentukan nilai *standard error* dari $\widehat{p}$ dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$Standar\,Error(\widehat{p}) = \sqrt{Var(\widehat{p})}.$$

Dengan menggunakan penduga pada persamaan (3.1) diperoleh ragam penduga menjadi

$$\begin{aligned} Var(\widehat{p}) &= Var\left(\frac{Y}{n}\right) \\ &= Var\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} U_i}{n}\right) \\ &= \frac{p(1-p)}{n}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Berdasarkan Persamaan (3.2) diperoleh nilai *standart error* dari $\widehat{p}$ menjadi

$$\text{Standar Error}(\widehat{p}) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

Hasil penduga langsung dan nilai *standar error*nya akan disajikan pada Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Hasil Pendugaan Langsung Persentase Kasus Penyakit Kusta Basah di Provinsi Jawa Timur Tahun 2018

Kab/Kota	$\widehat{p_i}$	SE
Pacitan	1,0000	0,0000
Ponorogo	0,9714	0,0048
Trenggalek	1,0000	0,0000
Tulunagung	0,9310	0,0088
Blitar	1,0000	0,0000
Kediri	0,9434	0,0044
Malang	0,9286	0,0046
Lumajang	0,8895	0,0017
Jember	0,9671	0,0007
Banyuwangi	0,9459	0,0061
Bondowoso	0,9592	0,0040
Situbondo	0,9355	0,0026
Probolinggo	0,9011	0,0016
Pasuruan	0,9543	0,0012
Sidoarjo	0,9474	0,0040
Mojokerto	0,9783	0,0032
Jombang	0,9474	0,0030
Nganjuk	0,9773	0,0034
Madiun	1,0000	0,0000

Kab/Kota	$\widehat{p_i}$	SE
Magetan	0,9630	0,0070
Ngawi	0,9362	0,0052
Bojonegoro	0,9682	0,0028
Tuban	0,9133	0,0016
Lamongan	0,9437	0,0032
Gresik	0,9468	0,0024
Bangkalan	0,9828	0,0006
Sampang	0,9496	0,0005
Pamekasan	0,9810	0,0004
Sumenep	0,8916	0,0008
Kediri	1,0000	0,0000
Blitar	1,0000	0,0000
Malang	1,0000	0,0000
Probolinggo	0,9091	0,0131
Pasuruan	1,0000	0,0000
Mojokerto	1,0000	0,0000
Madiun	1,0000	0,0000
Surabaya	1,0000	0,0000
Batu	0,5000	0,2500

Berdasarkan Tabel 1 dapat dilihat bahwa dengan menggunakan penduga langsung pada beberapa kabupaten/kota diduga 90% penderita kusta di kabupaten/kota

Provinsi Jawa Timur itu mengalami kusta basah. Dengan kecilnya ukuran sampel di beberapa kabupaten/kota tersebut, diperkirakan pendugaan yang dilakukan tidak akurat, sehingga pendugaan akan dilakukan secara tidak langsung agar pendugaannya lebih akurat

4.2. *Pendugaan Tidak Langsung Kasus Penyakit Kusta Basah Di Provini Jawa Timur*

Pada penelitian ini model HB yang digunakan adalah model *Logitnormal* dengan peubah penyerta berbasis area [5]. Pada model ini,

(i) *sampling model* yang digunakan adalah

$$y_i \mid p_i \sim Binomial(n_i, p_i). \tag{4.3}$$

(ii) *linking model* yang digunakan adalah

$$\xi_i = logit(p_i) = \boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + v_i, v_i \sim (0, \sigma_v^2). \tag{4.4}$$

(iii) parameter $\boldsymbol{\beta}$ dan σ_v^2 diasumsikan saling bebas dengan

$$f(\boldsymbol{\beta}) \propto 1; \sigma_v^{-2} \sim GAM\,(a, b); a \geq 0, b > 0. \tag{4.5}$$

Berikut fungsi *likelihood* untuk model *Small Area Estimation* dengan fungsi kepekatan peluang sesuai Persamaan (4.3) yaitu

$$f(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\beta}) = \prod_{i=1}^{m} \binom{n_i}{y_i} p_i^{y_i} (1 - p_i)^{n_i - y_i}.$$

Selanjutnya $f(v)$ merupakan distribusi pengaruh acak yang berdistribusi normal $\xi_i \sim N(\boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{\beta}, \sigma_v^2)$ sehingga fungsi kepekatan peluangnya menjadi

$$f(v) \propto \tau_v^{m/2} \, \exp\left(-\frac{\tau_v}{2} \sum_{i=1}^{m} \left(\xi_i - \sum_{j=1}^{k} x_{ij} \beta \right)^2 \right) \tag{4.6}$$

Karena $f(\mathbf{y})$ merupakan *normalizing constant* maka dihasilkan distribusi posterior gabungan akhir dari pendugaan persentase kasus penyakit kusta basah di setiap kabupaten/kota Provinsi Jawa Timur dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} f(p_1, \cdots, p_m, \boldsymbol{\beta}, \tau_v | \mathbf{y}) \propto (\tau_v)^{b_{(\tau_v)} - 1} \exp\left(\frac{-\tau_v}{a_{\tau_v}} \right) \times \prod_{i=1}^{m} \binom{n_i}{y_i} p_i^{y_i} (1 - p_i)^{1 - y_i} \\ \times \tau_v^{m/2} \exp\left(-\frac{\tau_v}{2} \sum_{i=1}^{m} \left(\xi_i - \sum_{j=1}^{k} x_{ij} \beta \right)^2 \right) \times f(p_i, \boldsymbol{\beta}, \tau_v) \end{aligned}$$

Distribusi posterior marginal dari yang didapat untuk setiap parameter sangat kompleks sehingga digunakan metode Markov Chan Monte Carlo (MCMC), dengan algoritma *Gibss Sampling* dilakukan sebanyak 10.000 iterasi, dengan nilai a dan b pada Gamma masing-masing 0,0001 sebagaimana disajikan pada Tabel 2 berikut.

Berdasarkan hasil Tabel 2 diperoleh model untuk menduga persentase kusta basah di kabupaten/kota Provinsi Jawa Timur sebagai berikut.

Tabel 2. Nilai Parameter Metode SAE HB dalam Pendugaan Persentase Kasus Penyakit Kusta Basah di Provinsi Jawa Timur

Parameter	Mean	2.5%	97.5%	MC *error*
β_0	1,6550	-0,13360	3,6150	0,01190
β_1	0,0005	-0,01622	0,0168	0,00009
β_2	0,0056	-0,02063	0,0311	0,00020
β_3	0,0003	0,00005	0,0007	0,00000
β_4	-0,0025	-0,01887	0,0143	0,00008
β_5	0,0091	-0,00808	0,0267	0,00009
σ_v^2	0,4597	0,20750	0,7864	0,00162

$$logit(p_i) = 1,655 + 0,0005x_{1i} + 0,0056x_{2i} + 0,0003x_{3i} - 0,0025x_{4i} + 0,0091x_{5i} + v_i$$

Dengan model tersebut maka dapat dilakukan pendugaan persentase kusta basah tiap kabupaten/kota di Provinsi Jawa Timur pada tahun 2018. Untuk menguji kekonvergenannya lebih lanjut maka dapat dilihat pada *diagnostic plot* yang terdiri dari *trace plot*, *autocorrelation plot*, dan *density plot.*

4.3. *Perbandingan Pendugaan Langsung dan Pendugaan Tidak langsung Kasus Penyakit Kusta Basah*

Perbandingan nilai pendugaan langsung dan pendugaan tidak langsumg disajikan pada Tabel 3 berikut.

Tabel 3. Perbandingan Penduga Langsung dan Pendugaan Tidak Langsung Persentase Kasus Kusta Basah

Kab/Kota	$\widehat{p_i}$	$\widehat{p_i}^{HB}$
Pacitan	1,0000	0,9531
Ponorogo	0,9714	0,9567
Trenggalek	1,0000	0,9548
Tulunagung	0,9310	0,9420
Blitar	1,0000	0,9526
Kediri	0,9434	0,9508
Malang	0,9286	0,9331
Lumajang	0,8895	0,9063
Jember	0,9671	0,9592
Banyuwangi	0,9459	0,9417
Bondowoso	0,9592	0,9525
Situbondo	0,9355	0,9167
Probolinggo	0,9011	0,9116
Pasuruan	0,9543	0,9550

Kab/Kota	$\widehat{p_i}$	$\widehat{p_i}^{HB}$
Magetan	0,9630	0,9551
Ngawi	0,9362	0,9422
Bojonegoro	0,9682	0,9603
Tuban	0,9133	0,9235
Lamongan	0,9437	0,9493
Gresik	0,9468	0,9499
Bangkalan	0,9828	0,9703
Sampang	0,9496	0,9485
Pamekasan	0,9810	0,9749
Sumenep	0,8916	0,9003
Kediri	1,0000	0,9853
Blitar	1,0000	0,9766
Malang	1,0000	0,9892
Probolinggo	0,9091	0,9774

Sidoarjo	0,9474	0,9696	Pasuruan	1,0000	0,9845
Mojokerto	0,9783	0,9530	Mojokerto	1,0000	0,9823
Jombang	0,9474	0,9548	Madiun	1,0000	0,9869
Nganjuk	0,9773	0,9619	Surabaya	1,0000	0,9936
Madiun	1,0000	0,9509	Batu	0,5000	0,9358

Berdasarkan Tabel 3 dapat dilihat bahwa nilai pendugaan langsung dan nilai pendugaan tidak langsung dengan metode *Small Area Estimation Hierarchical Bayes* pada persentase kasus penyakit kusta basah di Provinsi Jawa Timur memiliki nilai yang hampir sama. Tapi jika dilihat lebih detail, nilai dari pendugaan persentase kasus penyakit kusta basah menggunakan pendekatan *Hierarchhical Bayes* umumnya sekitar di atas 90%.

Pada Tabel 4 disajikan nilai statistika deskriptif penduga langsung dan pendugaan tidak langsung menggunakan metode *Small Area Estimation Hierarchical Bayes* dari persentase kusta basah dan *standar error*-nya.

Tabel 4. Statistika Deskriptif Penduga Langsung dan Penduga Tidak Langsung Metode SAE HB Pada Persentase Kusta Basah dan *Standard Error*nya

Statistik	(p_i)	(p_i^{HB})	SE$(\widehat{p}_i)$	SE$(\widehat{p}_i^{\,HB})$
Minimum	0,5000	0,9003	0,0000	0,0004
Maksimum	1,0000	0,9936	0,2500	0,0350
Mean	0,9591	0,9540	0,0099	0,0048
Standar Deviasi	0,0820	0,0229	0,0039	0,0063

Berdasarkan Tabel 4 dalam pendugaan persentase kasus kusta basah di Provinsi Jawa Timur tahun 2018 dapat dilihat bahwa rata-rata dari nilai duga pendugaan HB meghasilkan nilai yang rendah dari rata-rata nilai duga pendugaan secara langsung. Begitu juga pada rata-rata *standar error* yang dihasilkan dari pendugaan tidak langsung lebih rendah dari rata-rata *standar error* penduga langsung. Hal ini berati pendugaan tidak langsung dengan metode *Small Area Estimation Hierarchical Bayes* cenderung lebih baik daripada pendugaan langsung.

5. Kesimpulan

Pada pendugaan persentase kusta basah di Provinsi Jawa Timur dengan menggunakan metode *Small Area Estimation Hierarchical Bayes* diperoleh pada semua kabupaten/kota yang nilai dugaan persentase kusta basahnya diatas 90% dengan rata-rata pendugaan $0,9550$. Dugaan ini diperoleh menggunakan model *logitnormal* dengan peubah respon yang menyebar binomial dengan fungsi *likelihood* yaitu

$$f(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\beta}) = \prod_{i=1}^{m} p_i^{y_i}(1-p_i)^{1-y_i},$$

dan dengan mengasumsikan bahwa sebaran *prior* yang *flat* bagi β yang saling bebas dengan σ_v^2 menyebar $GAM(a,b)$ sehingga diperoleh distribusi *prior* gabungan menjadi

$$f(\beta, \tau_v) \propto (\tau_v)^{b_{(\tau_v)}-1} \ \exp\left(\frac{-\tau_v}{a_{\tau_v}}\right).$$

Distribusi posterior gabungan akhir dari pendugaan persentase kasus penyakit kusta basah di setiap kabupaten/kota Provinsi Jawa Timur menjadi:

$$\begin{aligned} f(p_1, \cdots, p_m, \boldsymbol{\beta}, \tau_v|\mathbf{y}) \propto (\tau_v)^{b_{(\tau_v)}-1} \ \exp\left(\frac{-\tau_v}{a_{\tau_v}}\right) \times \prod_{i=1}^{m} \binom{n_i}{y_i} p_i^{y_i}(1-p_i)^{1-y_i} \\ \times \tau_v^{m/2} \exp\left(-\frac{\tau_v}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(\xi_i - \sum_{j=1}^{k} x_{ij}\beta\right)^2\right) \times f(p_i, \boldsymbol{\beta}, \tau_v). \end{aligned}$$

Karena distribusi posterior gabungan menghasilkan nilai yang kompleks, maka digunakan teknik MCMC algoritma *Gibbs sampling* untuk mencari nilai penduga.

Pendugaan tidak langsung dengan menggunakan metode *Small Area Estimation Hierarchical Bayes* menghasilkan pendugaan persentase kasus kusta basah di tingkat kabupaten/kota yang cenderung lebih baik daripada pendugaan langsung dapat dilihat pada rata-rata *standar error* yang dihasilkan oleh metode *Small Area Estimation Hierarchical Bayes* memiliki nilai yang lebih kecil yaitu $0,0048$ daripada *standar error* pada pendugaan langsung.

6. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terimakasih kepada Ibu Izzati Rahmi H.G., M.Si, Ibu Dr. Ferra Yanuar dan Ibu Dr. Des Welyyanti yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Bain, L.J., dan M. Engelhardt. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistic*, Second Edition. Duxbuy Press: California.

[2] Dinkes Provinsi Jatim. 2018. *Profil Dinas Keshatan Provinsi Jawa Timur Tahun 2018*. Dinkes Provinsi Jatim.

[3] Ghosh, M, dan J.K.N. Rao. 1994. Small Area Estimation: An Appraisal. *Statistical Science*. Vol 9: 55 – 93.

[4] Ntzoufras, I. 2009. *Bayesian Modeling Using Winbugs*. John Wiley and Sons, New Jersey.

[5] Rao, J.N.K. 2003. *Small Area Estimation*. John Wiley and Sons, New Jersey.