Jurnal Matematika UNAND
Vol. **IX** No. **3** Hal. 256 – 261
Edisi Juli 2020
ISSN : 2303–291X
e-ISSN : 2721–9410

BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF TAK TERHUBUNG DENGAN GRAF LINTASAN DAN LIMA BINTANG GANDA SEBAGAI KOMPONEN-KOMPONENNYA

MUHAMMAD AZHARI, DES WELYYANTI*, EFFENDI
Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email : muhammadazhari5298@gmail.com, wely@sci.unand.ac.id, effendi@sci.unand.ac.id

Diterima 16 Juni 2020 Direvisi 22 Juni 2020 Dipublikasikan 13 Juli 2020

Abstrak. Misalkan H adalah graf tak terhubung dan c adalah pewarnaan-k titik pada H yang menginduksi partisi $\Pi = \{C_1, C_2, \cdots, C_k\}$ dari $V(H)$. Kode warna dari titik $v \in V(G)$ adalah $(d(v, C_1), d(v, C_2), \cdots, d(v, C_k))$ dengan $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) | x \in C_i\}$ dan $d(v, C_i) < \infty$ untuk $1 \le i \le k$. Pewarnaan c dikatakan pewarnaan k-lokasi jika semua kode warna dari semua titik di H berbeda. Bilangan kromatik lokasi dari graf tak terhubung H yang dinotasikan sebagai $\chi_L^{'}(H)$, adalah bilangan bulat terkecil k sedemikian sehingga H mempunyai k-pewarnaan lokasi. Pada tulisan ini akan dibahas bilangan kromatik lokasi graf tak tehubung dengan graf lintasan dan lima graf bintang ganda sebagai komponen-komponennya.

Kata Kunci: Bilangan Kromatik Lokasi, Graf tak Terhubung, Graf Lintasan, Graf Bintang Ganda

1. Pendahuluan

Bilangan kromatik lokasi pertama kali diperkenalkan oleh Chartand dkk (2002) [4]. Konsep ini merupakan perpaduan konsep pewarnaan titik suatu graf dan konsep dimensi partisi suatu graf. Pewarnaan titik suatu graf adalah pemberian warna ke semua titik-titik pada suatu graf dengan ketentuan setiap titik yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. Banyaknya warna minimum yang digunakan untuk pewarnaan titik pada suatu graf disebut bilangan kromatik lokasi yang dinotasikan dengan $\chi_L(G)$.

Berdasarkan penelitian Welyyanti dkk. pada tahun 2014 [6], menghasilkan suatu teori tentang perluasan pengertian bilangan kromatik lokasi suatu graf yang dapat diaplikasikan pada semua jenis graf termasuk pada graf tak terhubung dengan graf lintasan dan graf bintang ganda sebagai komponen-komponennya.

*penulis korespondensi

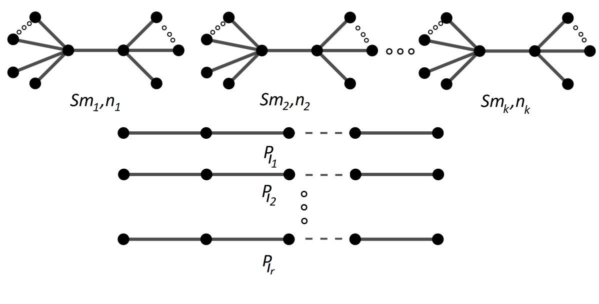
2. Landasan Teori

2.1. *Definisi dan Terminologi dalam Teori Graf*

Graf lintasan P_n adalah graf dengan n titik dan $n-1$ sisi, dengan titik-titiknya adalah $v_1, v_2, \cdots, v_n$ dan sisi-sisinya adalah $v_1v_2, v_2v_3, \cdots, v_{n-1}v_n$. Graf bintang S_n adalah graf dengan $n+1$ titik dimana ada tepat satu titik berderajat n yang disebut titik pusat dan n titik lainnya berderajat satu yang disebut daun. Graf bintang ganda $S_{m,n}$ didefinisikan sebagai graf yang dibangun oleh graf bintang S_m dan graf bintang S_n untuk $m \geq n \geq 2$ dengan graf bintang S_m dan graf bintang S_n terhubung oleh sebuah sisi yang disebut jembatan dari titik pusat graf S_m ke titik pusat graf S_n.

Dua graf G dan H dikatakan homogen jika $V(G) = V(H)$, $E(G) = E(H)$, dan unsur-unsur pembentuk sisi dari graf G dan H tersebut sama.

Definisikan graf tak terhubung dengan graf lintasan dan graf bintang ganda sebagai komponen-komponennya dinotasikan sebagai $H = rP_l \bigcup kS_{m,n}$ adalah graf yang dibangun oleh beberapa graf lintasan P_l yang homogen sebanyak r-komponen dan beberapa graf bintang ganda $S_{m,n}$ yang homogen sebanyak k-komponen dengan $r, k \geq 1,\ l \geq 3$, dan $m, n \geq 2$.



Gambar 1. Graf $H = rP_l \bigcup kS_{m,n}$ untuk $k \geq 1,\ l \geq 3$ dan $m, n \geq 2$

2.2. *Bilangan Kromatik Lokasi*

Misalkan c adalah suatu pewarnaan titik pada graf G dengan $c(u) \neq c(v)$, untuk u dan v yang bertetangga di G. Misalkan C_i adalah himpunan titik yang diberi warna i, yang selanjutnya disebut kelas warna, maka $\Pi = \{C_1, C_2, \cdots, C_k\}$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas-kelas warna dari $V(G)$. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari v adalah k-pasang terurut $(d(v, C_1), d(v, C_2), \cdots, d(v, C_k))$ dimana $d(v, C_i) = \min\{d(v, x)|x \in C_i\}$, untuk $1 \leq i \leq k$. Titik $v \in V(G)$ disebut titik dominan jika $d(v, C_i) = 1$ untuk $v \notin C_i$ dan 0 untuk yang lainnya. Jika setiap titik di G memiliki kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G. Banyaknya warna minimum yang digunakan untuk pewarnaan lokasi disebut bilangan kromatik lokasi dari G dan dinotasikan dengan $\chi_L(G)$.

Chartrand dkk. [4] telah memberikan teorema dasar bilangan kromatik lokasi suatu graf. Teorema tersebut dijelaskan pada teorema-teorema di bawah ini. Definisikan $N(v)$ sebagai himpunan yang berisi semua titik yang menjadi tetangga v.

Teorema 2.1. [4] *Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada graf terhubung G. Jika u dan v adalah dua titik yang berbeda di G sedemikian sehingga $d(u,w) = d(v,w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u,v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$. Secara khusus, jika u dan v titik titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) \neq N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.*

Proposisi 2.2. *Graf bintang ganda $S_{m,n}$ untuk $m \geq n \geq 2$ memiliki bilangan kromatik lokasi $\chi_L(S_{m,n}) = m + 1$.*

Pada graf tak terhubung, definisikan bilangan kromatik lokasi dari graf tak terhubung adalah sebagai berikut. Misalkan H adalah graf tak terhubung dan c adalah pewarnaan-k titik pada H yang menginduksi partisi $\Pi = \{C_1, C_2, \cdots, C_k\}$ dari $V(H)$. Kode warna dari titik $v \in V(G)$ adalah $(d(v,C_1), d(v,C_2), \cdots, d(v,C_k))$ dengan $d(v,C_i) = \min\{d(v,x)|x \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Pewarnaan c dikatakan pewarnaan k-lokasi jika semua kode warna dari semua titik di H berbeda. Bilangan kromatik lokasi dari graf tak terhubung H yang dinotasikan sebagai $\chi_L^{'}(H)$, adalah bilangan bulat terkecil k sedemikian sehingga H mempunyai k-pewarnaan lokasi. Jika tidak ada nilai k yang memenuhi, maka $\chi_L^{'}(H) := \infty$ [6].

Berikut adalah teorema yang berkaitan dengan bilangan kromatik-lokasi graf tak terhubung yang diambil dari [6].

Teorema 2.3. *[6] Untuk setiap i, misalkan G_i adalah graf terhubung dan misalkan $H = \bigcup_{i=1}^{m} G_i$. Jika $\chi'_L(H) < \infty$, maka $q \leq \chi'_L(H) \leq r$, dimana $q = \max\{\chi_L(G_i) : i \in [1,m]\}$ dan $r = \min\{|V(G_i)| : i \in [1,m]\}$.*

3. Pembahasan

Pada Teorema 3.1, dibahas tentang bilangan kromatik lokasi dari graf tak terhubung dengan graf lintasan P_l dan lima graf bintang ganda $S_{m,n}$ yang homogen, dinotasikan $P_l \bigcup 5\ S_{m,n}$, $l \geq 3$, dan $m, n \geq 2$.

Teorema 3.1. *Misalkan graf $H = P_l \bigcup 5\ S_{m,n}$, maka*

$$\chi_L^{'}(H) = m + 1 \begin{cases} \textit{untuk } m = n\ , m \geq 10, \ \textit{dan } l \geq m+1, \\ \textit{untuk } m > n\ , m \geq 5, \ \textit{dan } l \geq m+1. \end{cases}$$

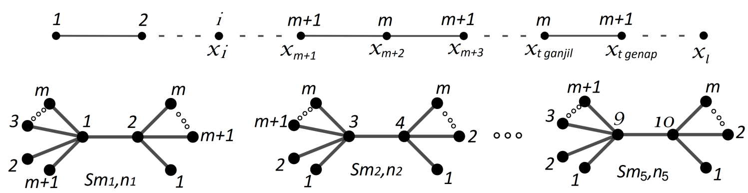
Bukti. Misalkan graf $5S_{m,n} = \bigcup_{i=1}^{5} S_{m,n}$. Berdasarkan Proposisi 2.2 dan Teorema 2.3, diperoleh $\chi_L^{'}(5S_{m,n}) \geq \max\{\chi_L(S_{m_i,n_i})|1 \leq i \leq 5\} = m + 1$. Karena graf H dibangun oleh graf lintasan P_l dan graf $5S_{m,n}$, maka nilai $l \geq m + 1$, sehingga $\chi_L^{'}(H) \geq m + 1$.

Selanjutnya, akan ditentukan pewarnaan lokasi graf H, yang akan dibagi menjadi beberapa kasus sebagai berikut.

Kasus 1. Untuk $m = n$.
Definisikan suatu pewarnaan $c : V(H) \to \{1, 2, \cdots, m+1\}$, untuk $1 \le i \le m+1$, $1 \le j \le n+1$, $1 \le k \le 5$ dan $m+2 \le t \le l$, sehingga

$$
\begin{aligned}
c(x_i) &= i, \\
c(x_t) &= \begin{cases} m+1, & t \text{ genap}, \\ m, & t \text{ ganjil}. \end{cases} \\
c(v_{1_{m_k}}) &= 2k-1, \\
c(v_{2_{n_k}}) &= 2k, \\
c(v_{1i_{m_k}}) &= \begin{cases} m+1, & i = 2k-1, \\ i, & i \neq 2k-1. \end{cases} \\
c(v_{2j_{n_k}}) &= \begin{cases} m+1, & j = 2k, \\ j, & j \neq 2k. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Selanjutnya, $\Pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_{m+1}\}$ adalah suatu partisi titik-titik pada graf H dengan S_i menyatakan kelas warna ke-i untuk $1 \le i \le m+1$. Setiap kode warna titik yang berada di kelas warna yang sama pada graf P_l dibedakan oleh jarak ke titik yang berada di kelas warna ke 1 dan setiap kode warna titik yang berada di kelas warna yang sama pada komponen graf $S_{m,n}$ dibedakan oleh jarak ke titik yang merupakan titik dominan. Pada graf H, setiap kode warna titik yang berada di kelas warna yang sama dibedakan oleh jarak ke titik yang bukan merupakan titik dominan. Diperoleh $\chi_L'(H) \le m+1$. Hal ini dapat dilihat pada Gambar 2.



Gambar 2. Pewarnaan lokasi graf $H = P_l \bigcup 5S_{m,n}$ untuk $m = n$

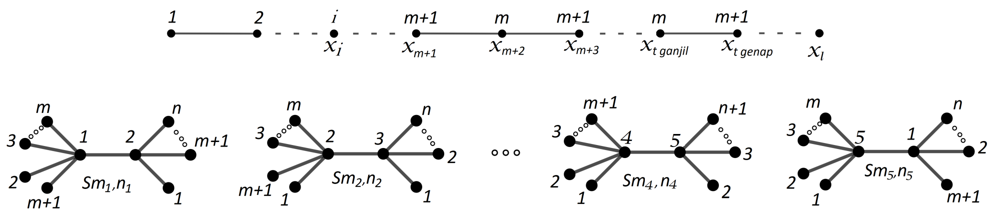
Kasus 2. Untuk $m > n$.
Definisikan suatu pewarnaan $c : V(H) \to \{1, 2, \cdots, m+1\}$, untuk $1 \le i \le m+1$,

$1 \leq j \leq n+1$, $1 \leq k \leq 5$ dan $m+2 \leq t \leq l$, sehingga

$$c(x_i) = i,$$
$$c(x_t) = \begin{cases} m+1, & t \text{ genap}, \\ m, & t \text{ ganjil}. \end{cases}$$
$$c(v_{1_{m_k}}) = k,$$
$$c(v_{2_{n_k}}) = \begin{cases} k+1, & k \neq m+1, \\ 1, & k = m+1. \end{cases}$$
$$c(v_{1i_{m_k}}) = \begin{cases} m+1, & i = k, \\ i, & i \neq k. \end{cases}$$
$$c(v_{2j_{n_k}}) = \begin{cases} j+1, & k = m, \\ m+1, & j = c(v_{2_{n_k}}), \\ j, & j \neq c(v_{2_{n_k}}). \end{cases}$$

Selanjutnya, $\Pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_{m+1}\}$ adalah suatu partisi titik-titik pada graf H dengan S_i menyatakan kelas warna ke-i untuk $1 \leq i \leq m+1$.

Setiap kode warna titik yang berada di kelas warna yang sama pada graf P_l dibedakan oleh jarak ke titik yang berada di kelas warna ke 1 dan setiap kode warna titik yang berada di kelas warna yang sama pada komponen graf $S_{m,n}$ dibedakan oleh jarak ke titik yang merupakan titik dominan. Pada graf H, setiap kode warna titik yang berada di kelas warna yang sama dibedakan oleh jarak ke titik yang bukan merupakan titik dominan. Sehingga diperoleh $\chi_L'(H) \leq m+1$. Hal ini dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3. Pewarnaan lokasi graf $H = P_l \bigcup 5S_{m,n}$ untuk $m > n$

Dari batas bawah dan batas atas yang diperoleh, terbukti $\chi_L'(H) = m+1$, untuk $m = n$, maka $m \geq 10$ dan untuk $m > n$, maka $m \geq 5$, dan $l \geq m+1$. □

4. Kesimpulan

Pada makalah ini telah dibahas bilangan kromatik lokasi graf tak terhubung dengan graf lintasan dan graf bintang ganda sebagai komponen-komponennya dengan hasil bahwa graf $H = P_l \bigcup 5S_{m,n}$ merupakan graf tak terhubung dengan graf P_l dan 5-komponen graf bintang ganda $S_{m,n}$ yang homogen. Bilangan kromatik lokasi graf

H adalah $\chi'_L(H) = m + 1$, untuk $m = n$, maka $m \geq 10$ dan untuk $m > n$, maka $m \geq 5$, dan $l \geq m + 1$.

5. Ucapan Terima Kasih

Penulis menngucapkan terima kasih kepada Dr. Lyra Yulianti, Monika Rianti Helmi, M.Si, Riri Lestari, M.Si yang telah memberikan kritikan dan masukan sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Asmiati and E.T. Baskoro, 2012. Characterizing All Graphs Containing Cycles With Locating-Chromatic Number 3. *AIP Conf. Proc.* 321 – 357

[2] Asmiati, H. Assiyatun, E. T. Baskoro, D. Suprijanto, R. Simanjuntak and S. Uttunggadewa. 2012. The locating-chromatic number of frecracker graphs. *Far East Journal of Mathematical Sciences.* **63**(1): 11 – 23

[3] Bondy, J.A.,U.S.R. Murty. 1976. *Graph Theory with Application.* Elsevier Science Publishing, New York.

[4] Chartrand, G., M.A. Henning, P.J. Slater, dan P. Zhang. 2002. The locating-chromatic number of a graph. *Bull.Inst. Combin. Appl.* **36**: 89 – 101

[5] Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M.A., Slater, P.J. dan Zhang, P. 2003. Graph of Order n With Locating-Chromatic Number n-1. *Discrete Math.* **269**: 65 – 79

[6] Welyyanti, D., Baskoro, E.T., Simanjuntak, R., Utunggadewa, S. 2014. The locating-Chromatic Number of Disconnected Graph. *Far East Journal of Mathematical Science.* **94**(2): 169 – 182

[7] Welyyanti, D., Lestari, R., Putri, S.R. 2019. The locating-Chromatic Number of Disconnected Graph with Path and Cycle Graph as its Components. *IOP Conference Series.* **1317**: 1 – 7