Jurnal Matematika UNAND
Vol. **2** No. **3** Hal. 49 – 57
ISSN : 2303–291X

PENURUNAN MODEL BLACK-SCHOLES DENGAN METODE BINOMIAL UNTUK SAHAM TIPE EROPA

LINA MUAWANAH NASIR
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
muawanahnasirlina@yahoo.co.id

Abstrak. Opsi Eropa adalah suatu kontrak keuangan yang memberikan hak (bukan kewajiban) kepada pemegang opsi untuk membeli atau menjual sejumlah aset tertentu pada waktu jatuh tempo dengan harga pelaksanaan yang sudah ditentukan. Harga opsi saham dapat ditentukan melalui model Black-Scholes yang mengasumsikan bahwa opsi yang digunakan adalah opsi tipe Eropa. Untuk panjang periode yang sangat pendek, metode binomial yang merupakan model penentuan harga opsi lainnya, memberi hampiran diskret untuk proses harga kontinu dibawah model Black-Scholes. Oleh karena itu, model Black-Scholes dapat diturunkan dari metode binomial. Model Black-Scholes dipengaruhi oleh faktor-faktor seperti harga saham, harga pelaksanaan, suku bunga bebas resiko, waktu jatuh tempo, dan volatilitas. Hasil pembahasan pada Intel Corporation menunjukkan pembeli opsi *call* memperoleh keuntungan maksimum pada harga pelaksanaan 22.5 dollar, dan pembeli opsi *put* memperoleh keuntungan maksimum pada harga pelaksanaan 26.5 dollar.

Kata Kunci: Opsi, metode Binomial, model Black-Scholes

1. Pendahuluan

Dalam dunia keuangan investor memiliki pilihan untuk membeli aset yaitu membeli aset yang diperdagangkan secara langsung dipasar keuangan atau membeli derivasi/turunan dari aset tersebut. Aset yang secara keseluruhan maupun sebagian nilainya merupakan turunan dari aset lain, disebut dengan aset derivatif. Beberapa produk derivatif antara lain : kontrak berjangka (*future contract*), kontrak *forward* dan kontrak opsi.

Opsi berdasarkan hak yang diberikan kepada pemegangnya dibedakan menjadi opsi *call* dan opsi *put*. Opsi *call* memberikan hak kepada pembeli untuk membeli aset tertentu dengan jumlah tertentu pada harga yang telah ditentukan selama periode waktu tertentu pula. Sedangkan opsi *put* memberikan hak kepada pembeli untuk menjual aset tertentu dengan jumlah tertentu pada harga yang telah ditentukan selama periode waktu tertentu pula. Sedangkan opsi berdasarkan periode waktu penggunaannya dibedakan menjadi opsi tipe Eropa dan opsi tipe Amerika. Opsi yang dapat dilaksanakan kapan saja sampai tanggal jatuh temponya disebut dengan opsi tipe Amerika. Opsi yang dapat dilaksanakan hanya pada saat tanggal jatuh tempo disebut dengan opsi tipe Eropa [3].

Metode penetapan harga opsi saham secara analitik dirumuskan oleh Fisher

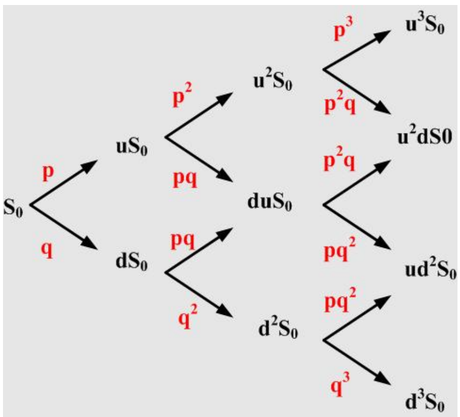
Black dan Mayor Scholes pada tahun 1973 yang dikenal dengan model Black-Scholes. Model Black-Scholes menggunakan beberapa asumsi, yaitu opsi yang digunakan adalah opsi tipe Eropa, volatilitas (ukuran perubahan harga saham) bersifat konstan selama usia opsi, terdapat suku bunga bebas resiko, proses acak dalam memperoleh harga saham, saham yang digunakan tidak memberikan dividen serta tidak terdapat pajak dan biaya transaksi [4].

Selain itu, penentuan harga opsi saham melalui pendekatan numerik salah satunya adalah dengan menggunakan metode binomial. Metode binomial dikembangkan oleh Cox, Ross dan Rubinstein (CRR) pada tahun 1979 dengan mengasumsikan bahwa dalam suatu interval waktu, harga saham akan naik sebesar faktor u (*up*) dan akan turun sebesar faktor d (*down*) karena dipengaruhi oleh faktor suku bunga. CRR juga mempertimbangkan bahwa pergerakan harga saham juga dipengaruhi oleh faktor volatilitas yang berarti model binomial memberi hampiran diskret untuk proses harga kontinu dibawah model Black-Scholes.

Oleh karena itu, dalam paper ini akan dilakukan penurunan model Black-Scholes menggunakan metode binomial. Adapun yang menjadi tujuan penulisan ini adalah untuk mengkaji model Black-Scholes pada opsi *call* dan opsi *put* tipe Eropa serta menghitung harga opsi *call* dan opsi *put* tersebut pada data saham, sehingga dapat dicari besarnya laba (rugi) yang akan diterima pembeli dan penjual opsi. Penulisan ini hanya dibatasi pada penurunan model Black-Scholes dengan metode binomial, serta penentuan harga opsi *call* dan opsi *put* tipe Eropa yang menggunakan data harga penutupan saham Intel Corporation selama satu tahun.

2. Perubahan Harga Saham dengan Metode Binomial

Perubahan harga saham terhadap waktu dapat diilustrasikan seperti berikut.



Gambar 1. Pohon Binomial Harga Saham dari 1 Periode sampai 3 Periode

Berdasarkan Gambar 1, harga saham pada waktu jatuh tempo T dapat ditulis menjadi

$$S_T = S_0 u^j d^{(n-j)}; j = 0, 1, 2, ..., n \tag{2.1}$$

dengan fkp dari harga saham pada waktu jatuh tempo $T = 1$ adalah

$$f(S_T) = \begin{cases} p & ; jika\ saham\ saat\ S_T\ bernilai\ S_T(u) \\ q & ; jika\ saham\ saat\ S_T\ bernilai\ S_T(d). \end{cases}$$

3. Model Cox Ross Rubinstein (CRR)

Berdasarkan pohon binomial, nilai ekspektasi harga saham model binomial pada $T = 1$ adalah

$$\begin{aligned} E[S_1] &= \sum_{\forall S_1} S_1 f(S_1) \\ &= uS_0p + dS_0q. \end{aligned}$$

Sedangkan nilai ekspektasi model kontinu

$$S_0e^{r\Delta t} = uS_0p + dS_0q,$$

jika kedua ruas nilai ekspektasi model kontinu dibagi S_0 dan nilai ekspektasi harga saham model binomial pada saat $S_0 = 1$, maka diperoleh

$$E[S_T] = pu + qd = e^{r\Delta t} \tag{3.1}$$

$$Var[S_T] = pq(u - d)^2. \tag{3.2}$$

Menentukan tingkat kenaikan harga saham u dan penurunan harga saham d dapat diperoleh dari persamaan (2.1). Peluang mendapatkan u untuk setiap satu periode Δt adalah p, artinya peubah acak J berdistribusi binomial dengan parameter n dan p, sehingga

$$E(J) = np \quad \text{dan} \quad Var(J) = npq.$$

Dalam [1], nilai ekspektasi dan variansi *return* saham adalah μT dan $\sigma^2 T$, maka diperoleh

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad \text{dan} \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}.$$

Nilai peluang resiko netral p dan q ditentukan berdasarkan persamaan (3.1), kemudian dengan mensubstitusi nilai u dan d maka diperoleh

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} \quad \text{dan} \quad q = \frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{r\Delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}.$$

Sehingga p dan q merupakan ukuran peluang baru yang disebut sebagai peluang resiko netral (*risk-neutral probability*).

Selanjutnya akan ditentukan model harga opsi model binomial, yang terdiri dari 1 periode sampai n periode. Pembentukan model dilakukan melalui replikasi portofolio yaitu suatu portofolio yang nilainya diakhir periode akan sama persis dengan kewajiban penerbit opsi diakhir periode. Replikasi portofolio terdiri atas saham sebanyak Δ_0 lembar serta tabungan atau pinjaman sebanyak Ψ. Nilai awal opsi *call* dapat ditulis

$$V_0 = \Delta_0 S_0 + \Psi. \tag{3.3}$$

Perhatikan nilai portofolio satu periode berikut

$$\Delta_0 S_0 u + \Psi e^{r\Delta t} = f_1(u)$$

$$\Delta_0 S_0 d + \Psi e^{r\Delta t} = f_1(d)$$

diperoleh

$$\Delta_0 = \tfrac{f_1(u)-f_1(d)}{S_0u-S_0d} \quad \text{dan} \quad \Psi = e^{-r\Delta t}\tfrac{uf_1(d)-df_1(u)}{u-d}.$$

Kemudian substitusikan nilai Δ_0 dan Ψ ke persamaan (3.3), didapat model opsi *call* binomial satu periode

$$V_0 = e^{-r\Delta t}[pf_1(u) + qf_1(d)].$$

Proses yang sama akan menghasilkan model binomial opsi *call* dua periode sebagai berikut

$$V_0 = e^{-r2\Delta t}\sum_{j=0}^{2}\binom{2}{j}p^j q^{2-j} max\{u^j d^{2-j}S_0 - K, 0\}.$$

Secara umum harga opsi *call* untuk n periode pada waktu $n\Delta t = T$ akan diperoleh

$$V_0 = e^{-rn\Delta t}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}p^j q^{n-j} max\{u^j d^{n-j}S_0 - K, 0\}. \tag{3.4}$$

Begitu juga untuk opsi *put*, secara umum harga opsi untuk n periode pada waktu $n\Delta t = T$ akan diperoleh

$$P_0 = e^{-rn\Delta t}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}p^j q^{n-j} max\{K - u^j d^{n-j}S_0, 0\}. \tag{3.5}$$

4. Penurunan Model Black-Scholes untuk Opsi Eropa

Terlebih dahulu diturunkan model Black-Scholes opsi *call* tipe Eropa melalui persamaan (3.4), yang dapat diurai menjadi

$$V_0 = e^{-rn\Delta t}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{n}{j}p^j q^{n-j} max\{u^j d^{n-j}S_0 - K, 0\} +$$
$$e^{-rn\Delta t}\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}p^j q^{n-j} max\{u^j d^{n-j}S_0 - K, 0\}$$

dengan k menyatakan tingkat kenaikan harga saham u yang akan menghasilkan

$$u^k d^{n-k}S_0 - K > 0$$

sehingga

$$\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}p^j q^{n-j}$$

merupakan peluang opsi *call* yang akan berakhir pada *in the money*, sedangkan peluang opsi *call* yang berakhir *out of the money* memberikan hasil

$$\sum_{j=k-1}^{n}\binom{n}{j}p^j q^{n-j} max\{u^j d^{n-j}S_0 - K, 0\} = 0.$$

Maka

$$
\begin{aligned}
V_0 &= e^{-rn\Delta t}\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}p^j q^{n-j} max\{u^j d^{n-j}S_0 - K, 0\} \\
&= S_0\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}(p^*)^j (q^*)^{n-j} - e^{-rn\Delta t}K\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}p^j q^{n-j}
\end{aligned}
$$

dengan

$$p^* = e^{-r\Delta t}pu \quad \text{dan} \quad q^* = e^{-r\Delta t}qd.$$

Terlebih dahulu perhatikan bagian pertama

$$\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}(p^*)^j (q^*)^{n-j} = P(J \geq k). \tag{4.1}$$

Bila dilakukan transformasi pada peubah acak J

$$Z = \frac{J - np^*}{\sqrt{np^*q^*}}$$

maka menurut Teorema Limit Pusat untuk $n \to \infty$ peubah acak Z berdistribusi normal baku $N(0, 1)$, sehingga persamaan (4.1) dapat dinyatakan dengan

$$P(J \geq k) = P\left(Z \geq \frac{k - np^*}{\sqrt{np^*q^*}}\right)$$

dengan

$$k > \frac{ln\left(\frac{K}{S_0}\right) + n\sigma\sqrt{\Delta t}}{2\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

sehingga

$$
\begin{aligned}
P(J \geq k) &= P\left(Z \geq \frac{ln\left(\frac{K}{S_0}\right) + \frac{T\sigma}{\sqrt{\Delta t}}(1 - 2p^*)}{2\sigma\sqrt{Tp^*q^*}}\right) \\
&= P\left(Z \geq \frac{ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
&= N\left(-\frac{ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
&= N\left(\frac{ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)
\end{aligned}
$$

Bagian kedua akan diperoleh melalui proses yang sama. Jadi model Black-Scholes opsi *call* tipe Eropa adalah

$$\begin{aligned} V_0 &= S_0 \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (p^*)^j (q^*)^{n-j} - e^{-rn\Delta t} K \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} p^j q^{n-j} \\ &= S_0 N \left(\frac{ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right) T}{2\sigma\sqrt{T}} \right) - e^{-rn\Delta t} K N \left(\frac{ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \end{aligned}$$

disederhanakan penulisannya menjadi

$$V_0 = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

Begitu juga dalam menentukan model Black-Scholes opsi *put* tipe Eropa, sehingga diperoleh

$$P_0 = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

dengan

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right) T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{dan} \quad d_2 = \frac{ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

5. Penerapan Model Black-Scholes Pada Data Harga Saham

Model Black-Scholes dipengaruhi oleh lima faktor yaitu: nilai volatilitas σ harga saham sebesar 0.2296 (diperoleh dari data saham harian Intel Corporation, diakses melalui http://www.finance.yahoo.com pada tanggal 3 Mei 2013), tingkat suku bunga bebas resiko r yang sedang berlaku di Amerika sebesar 0.0025 (diakses melalui http:/www.fxstreet.com/fundamental/interest-rates-table/), waktu jatuh tempo 28 Juni 2013 yang berarti 56 hari lagi dari tanggal 3 Mei 2013 (diperoleh $T = 0.15$), harga S_0 yang diperoleh dari data penutupan terakhir, harga K tersedia pada data saham jatuh tempo yang dipilih [2].

Perhitungan harga opsi *call* model Black-Scholes pada $K = 22.00$ dollar :

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{ln(\frac{23.96}{22}) + (0.0025 + \frac{0.053}{2})0.15}{0.2296\sqrt{0.15}} \\ &= 1.01 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &= \frac{ln(\frac{23.96}{22}) + (0.0025 - \frac{0.053}{2})0.15}{0.2296\sqrt{0.15}} \\ &= 0.92 \end{aligned}$$

Selanjutnya dapat dicari nilai dari $N(d_1)$ dan $N(d_2)$ dengan bantuan perintah NORMSDIST pada *software Microsoft Excel*. Sehingga nilai opsi *call* model Black-Scholes diperoleh seperti berikut

$$\begin{aligned} V_0 &= (23.96)\ N(1.01) - 22\ e^{-0.0025(0.15)}\ N(0.92) \\ &= 2.15 \end{aligned}$$

Nilai opsi *call* pada semua harga pelaksanaan akan dibandingkan dengan harga opsi *call* dipasaran, ternyata harga opsi *call* pada semua harga pelaksanaan opsi menarik untuk dibeli karena harga opsi *call* dipasar ternyata berada dibawah harga hitung model Black-Scholes. Begitu juga untuk nilai opsi *put*, pada semua harga pelaksanaan akan dibandingkan dengan harga opsi *put* dipasaran. Hasilnya harga hitung model Black-Scholes berada diatas harga yang ditawarkan dipasaran, lebih baik pembeli opsi *put* melaksanakan opsinya, karena semua harga opsi *put* yang ditawarkan dibawah nilai prediksi kewajaran opsi.

6. Analisa Laba (Rugi) bagi Pembeli dan Penjual Opsi Saham Tipe Eropa

Perhatikan tabel berikut.

Tabel 1. Laba (Rugi) Opsi *Call* (Data harga dalam Dollar)

Harga Pelaksanaan	Harga Opsi *Call* di Pasaran	Harga Saham saat Jatuh Tempo	Laba (Rugi) Pembeli	Laba (Rugi) Penjual
22	1.68	24.23	0.55	(0.55)
22.5	1.17	24.23	0.56	(0.56)
23	0.76	24.23	0.47	(0.47)
23.5	0.36	24.23	0.37	(0.37)
24	0.15	24.23	0.08	(0.08)
24.5	0.05	24.23	(0.05)	0.05
25	0.02	24.23	(0.02)	0.02
25.5	0.02	24.23	(0.02)	0.02
26.5	0.01	24.23	(0.01)	0.01

Pembeli opsi *call* memperoleh keuntungan maksimum sebesar 0.56 dollar untuk satu lembar saham dan kerugian maksimum yang ditanggung oleh pembeli opsi *call* sebesar opsi yang telah dibayarkan yaitu 0.05 dollar untuk satu lembar opsi. Sebaliknya bagi penjual opsi *call*. Sedangkan untuk opsi *put* adalah sebagai berikut.

Harga pelaksanaan 26.5 dan 28 dollar, pembeli opsi *put* memperoleh maksimum keuntungan sebesar 0.05 dollar untuk satu lembar saham. Kerugian maksimum yang dapat terjadi pada pembeli adalah sebesar 1.79 dollar. Sebaliknya bagi penjual opsi *put*. Intel Corporation memiliki strategi yang bagus agar dapat meraih keuntungan besar.

7. Penutup

Model harga opsi *call* dan opsi *put* tipe Eropa untuk model Black-Scholes diturunkan melalui metode binomial adalah sebagai berikut:

$$V_0 = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2),$$
$$P_0 = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1),$$

dimana

$$d_1 = \left(\frac{ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \quad \text{dan} \quad d_2 = \left(\frac{ln(\frac{S_0}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right).$$

Tabel 2. Laba (Rugi) Opsi *Put* (Data harga dalam Dollar)

Harga Pelaksanaan	Harga Opsi *Put* di Pasaran	Harga Saham saat Jatuh Tempo	Laba (Rugi) Pembeli	Laba (Rugi) Penjual
22.5	0.05	24.23	(0.05)	0.05
23	0.11	24.23	(0.11)	0.11
23.5	0.27	24.23	(0.27)	0.27
24	0.45	24.23	(0.45)	0.45
24.5	0.87	24.23	(0.87)	0.87
25	1.4	24.23	(1.4)	1.4
25.5	1.77	24.23	(1.77)	1.77
26	1.79	24.23	(1.79)	1.79
26.5	2.22	24.23	0.05	(0.05)
28	3.75	24.23	0.02	(0.02)

Berdasarkan hasil perhitungan akan diperoleh hasil laba (rugi) sebagai berikut:

(1) Setelah dihitung laba (rugi) pembeli opsi *call* pada semua harga pelaksanaan maka keuntungan terbesar yang akan diperoleh adalah 0.56 dollar untuk satu lembar sahamnya. Sedangkan kerugian yang diperoleh penjual opsi *call* sebesar keuntungan pembeli opsi *call*. Jadi semakin tinggi harga saham saat dilaksanakan semakin besar keuntungan yang diperoleh pembeli opsi *call*.

(2) Setelah dihitung laba (rugi) pembeli opsi *put* pada semua harga pelaksanaan maka keuntungan terbesar yang akan diperoleh adalah 0.05 dollar untuk satu lembar sahamnya. Sedangkan keuntungan yang diperoleh penjual opsi *put* adalah sebesar 1.79 dollar, padahal pada harga pelaksanaan lebih besar dari harga saham saat opsi jatuh tempo, ini terjadi karena tingginya harga opsi yang ditawarkan oleh Intel Corporation, membuat pembeli opsi *put* pada harga pelaksanaan 26 dollar tersebut tidak memperoleh keuntungan. Pada umumnya investor pembeli opsi *put* pada Intel Corporation tidak memperoleh keuntungan. Jadi semakin kecil harga saham saat opsi dilaksanakan dibanding harga pelaksanaan maka semakin besar keuntungan pembeli opsi *put*.

8. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Dr. Dodi Devianto, Ibu Riri Lestari, M.Si, Ibu Hazmira Yozza, M.Si, Ibu Izzati Rahmi, M.Si dan Ibu Dr. Lyra Yulianti yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Bodie Z, Kane A, Marcus AJ. 2005. *Investasi*.Jilid 1,2. Budi Wibowo. Penerjemah; Salemba Empat.

[2] Closing price. 2013. Available from: http://www.finance.yahoo.com. [diakses pada 3 Mei 2013].

[3] Halim, A. 2005.*Analisis Investasi*.Edisi Kedua. Jakarta:Salemba Empat.

[4] Hull, J.C. 2003.*Option Future and Other Derivative*. University of Toronto: Prentice hall International Inc.