Jurnal Matematika UNAND
Vol. **IX** No. **4** Hal. 287 – 293
Edisi Oktober 2020
ISSN : 2303–291X
e-ISSN : 2721–9410

SEMI KUASA TITIK TERHADAP ELIPS DENGAN TITIK PUSAT $H(h, k)$ DAN TITIK FOKUS DI SUMBU $y = x - (h - k)$

YOZA FERNANDA, JENIZON*, HARIPAMYU
Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email : yozafer100797@gmail.com, jenizon@sci.unand.ac.id, haripamyu@sci.unand.ac.id

Diterima 15 September 2020 Direvisi 14 Oktober 2020 Dipublikasikan 21 Oktober 2020

Abstrak. Kuasa titik tidak hanya dibahas pada lingkaran, tetapi kuasa titik juga dapat ditentukan dari irisan kerucut lain, yaitu elips. Pada tulisan ini dibahas mengenai bagaimana menentukan semi kuasa titik terhadap elips yang berpusat di $H(h, k)$ dan titik fokus di sumbu $y = x - (h - k)$.

Kata Kunci: Elips, Semi Kuasa Titik

1. Pendahuluan

Geometri merupakan salah satu cabang ilmu yang mempelajari tentang titik, garis, bidang, dan ruang [2]. Dalam geometri terdapat perubahan-perubahan bentuk atau ukuran dari suatu objek misalnya pergeseran(translasi), pencerminan(refleksi), dan perputaran(rotasi) [3].

Kuasa titik terhadap lingkaran merupakan kuadrat panjang segmen garis dari suatu titik diluar lingkaran ke titik singgung dari segmen garis pada lingkaran tersebut [2]. Kuasa titik juga dapat ditentukan pada irisan kerucut lainnya seperti elips. Titik singgung pada lingkaran selalu tegak lurus terhadap pusat lingkaran, lain halnya dengan elips, titik singgung elips tidak selalu tegak lurus terhadap *latus rectum* dan sumbu simetri sehingga pada elips dinamakan semi kuasa titik terhadap elips [3].

Semi kuasa titik terhadap elips telah dibahas oleh Arnidasari, Mashadi, Kartini, tetapi hanya dibahas dalam bentuk elips yang mempunyai fokus di sumbu simetri x dan berpusat di $O(0, 0)$. Oleh karena itu, penulis akan mengembangkan semi kuasa titik terhadap elips yang titik fokus nya berada pada garis $y = x - (h - k)$ dan berpusat di $H(h, k)$, khususnya semi kuasa titik yang berada di luar elips.

*penulis korespondensi

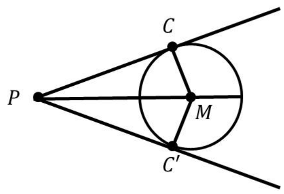
2. Landasan Teori

Dalam kuasa titik terdapat sedikit perbedaan dengan semi kuasa titik yang akan dijelaskan sebagai berikut.

2.1. *Kuasa Titik*

Berikut akan dijelaskan tentang kuasa titik terhadap lingkaran. Pada Gambar 1, misalkan M titik pusat lingkaran, dengan jari-jari R, P titik diluar lingkaran, C dan C' titik berada pada lingkaran, sehingga PC merupakan garis yang menyinggung lingkaran di C. Garis singgung terhadap lingkaran selalu tegak lurus terhadap jari-jari di titik singgung lingkaran tersebut sehingga garis PC tegak lurus terhadap CM, dengan menggunakan rumus *phytagoras* diperoleh $PM^2 - R^2 = PC^2$ [1]. Pada Gambar 2 PC^2 merupakan kuasa titik P terhadap lingkaran [1].

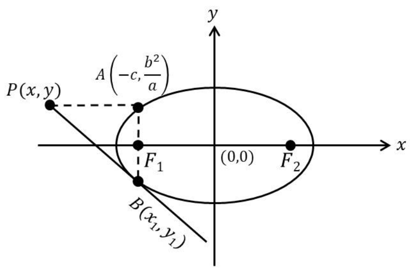
Berikut gambar suatu lingkaran yang berpusat di M dan garis yang menyinggung lingkaran di titik C dan C' yang melalui titik P.



Gambar 1. Kuasa titik di luar lingkaran

2.2. *Semi Kuasa Titik*

Berikut akan dijelaskan tentang semi kuasa titik terhadap elips.



Gambar 2. Garis singgung terhadap elips

Pada Gambar 2, misalkan titik P berada diluar elips $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, dimana $b^2 = a^2 - c^2$, titik A dan B merupakan verteks dari *latus rectum* sehingga koordinat dari titik A dan B adalah $(-c, \pm\frac{b^2}{a})$. Misalkan garis PB merupakan garis singgung terhadap elips, garis PB menyinggung *latus rectum* pada ordinat $y = -\frac{b^2}{a}$, garis PA memotong elips di ordinat $y = \frac{b^2}{a}$ dan tegak lurus terhadap *latus rectum*. Jika ordinat y tersebut disubstitusikan ke persamaan elips maka diperoleh

$$b^2x^2 + b^4 - a^2b^2 = 0. \tag{2.1}$$

nilai diskriminan dari persamaan (2.1) adalah $D = 4b^2(a^2 - b^4)$.

Nilai diskriminan D memiliki tiga kemungkinan yaitu $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$. Jika $D > 0$, maka garis akan memotong elips. Jika $D = 0$, maka garis akan menyinggung elips. Jika $D < 0$, maka akar-akar dari persamaan kuadrat bernilai imaginer [1].

Garis PB merupakan garis yang menyinggung elips, sedangkan garis PA merupakan garis yang memotong elips, sehingga garis PB tidak sama dengan garis PA dan garis PB tidak selalu tegak lurus terhadap *latus rectum* serta pada sumbu simetri. Oleh karena itu, Semi kuasa titik terhadap elips merupakan kuadrat panjang garis singgung dari sautu titik di luar elips ke titik singgung elips, pada Gambar 2, PB^2 merupakan semi kuasa titik P terhadap elips [1].

3. Pembahasan

Berikut persamaan elips yang berpusat di (h, k) dan titik fokus pada garis $y = x - (h - k)$.

Teorema 3.1. *Suatu titik (x, y) berada pada elips dengan puncak $(h \pm a_1, k \pm a_1)$ dan titik fokus $(h \pm c_1, k \pm c_1)$ jika dan hanya jika memenuhi persamaan*

$$\frac{((x-h)+(y-k))^2}{a^2} + \frac{((x-h)-(y-k))^2}{b^2} = 1 \tag{3.1}$$

dimana $a^2 = 4a_1^2$, $b^2 = 4(a_1^2 - c_1^2)$, $a, b \in \mathbb{R}, a, b \neq 0$.

Persamaan garis singgung elips dengan titik pusat di $H(h, k)$ dan titik fokus di sumbu $y = x - (h - k)$ yang melalui titik (x_1, y_1) adalah

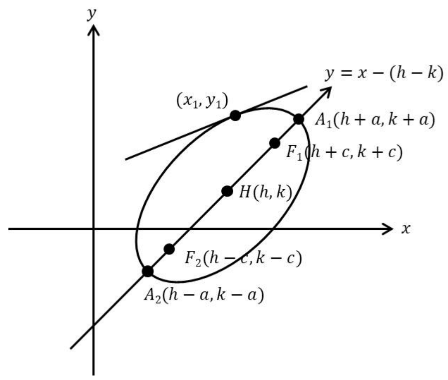
$$\frac{((x-h)+(y-k))((x_1-h)+(y_1-k))}{a^2} + \frac{((x-h)-(y-k))((x_1-h)-(y_1-k))}{b^2} = 1 \tag{3.2}$$

Berikut gambar dari persamaan garis singgung elips yang berpusat di (h, k) dan titik fokus pada garis $y = x - (h - k)$.

Berikut semi kuasa titik terhadap elips dengan titik pusat (h, k) dan titik fokus pada garis $y = x - (h - k)$.

Diberikan elips dengan titik pusat $H(h, k)$ dan titik fokus di sumbu $y = x - (h - k)$. Ambil sebarang titik $P(x_1, y_1)$ terletak di luar elips, akan dicari koordinat titik singgung elips pada garis yang melalui titik (x_1, y_1). Persamaan (3.2) dapat tulis dalam bentuk

$$y - k = \frac{a^2b^2 - (x-h)(b^2((x_1-h)+(y_1-k)) + a^2((x_1-h)-(y_1-k)))}{b^2((x_1-h)+(y_1-k)) - a^2((x_1-h)-(y_1-k))}$$



Gambar 3. Garis Singgung Elips yang Berpusat $H(h,k)$ dan Titik Fokus di Sumbu $y = x-(h-k)$ di titik (x_1, y_1)

Misalkan $p = a^2b^2 - (x-h)(b^2((x_1-h)+(y_1-k)) + a^2((x_1-h)-(y_1-k)))$ dan $q = b^2((x_1-h)+(y_1-k)) - a^2((x_1-h)-(y_1-k))$, maka diperoleh ordinat singgung pada elips adalah

$$y - k = \frac{p}{q} \tag{3.3}$$

Substitusikan persamaan (3.3) ke persamaan (3.1), diperoleh suatu persamaan kuadrat sebagai berikut

$$\begin{aligned}&(x-h)^2(4a^2b^2(a^2((x_1-h)-(y_1-k))^2 + b^2((x_1-h)+(y_1-k))^2)) +\\&(x-h)(-8a^4b^4(x_1-h)) + a^2b^2(a^2b^4 + a^4b^2 - (b^2((x_1-h)+(y_1-k)) -\\&a^2((x_1-h)-(y_1-k)))^2) = 0.\end{aligned}$$

Misalkan

$$\begin{aligned}A &= 4a^2b^2(a^2((x_1-h)-(y_1-k))^2 + b^2((x_1-h)+(y_1-k))^2),\\B &= -8a^4b^4(x_1-h),\\C &= a^2b^2(a^2b^4 + a^4b^2 - (b^2((x_1-h)+(y_1-k)) - a^2((x_1-h)-(y_1-k)))^2)\end{aligned}$$

dengan menggunakan rumus ABC, diperoleh absis dari titik singgung elips sebagai berikut

$$\begin{aligned}(x_{2,3}-h) = &\left(\frac{1}{(a^2((x_1-h)-(y_1-k))^2 + b^2((x_1-h)+(y_1-k))^2)}\right)\\&(a^2b^2(x_1-h) \pm (a^4b^4(x_1-h)^2 - \frac{1}{4}((a^2((x_1-h) -\\&(y_1-k))^2 + b^2((x_1-h)+(y_1-k))^2))(a^2b^4 + a^4b^2 -\\&(b^2((x_1-h)+(y_1-k)) - a^2((x_1-h)-(y_1-k)))^2))^{\frac{1}{2}}).\end{aligned}$$

Misalkan

$$\begin{aligned}
X &= (x_1 - h) + (y_1 - k), \\
Y &= (x_1 - h) - (y_1 - k), dan \\
Z &= (a^4 b^4 (x_1 - h)^2 - \frac{1}{4}((a^2((x_1 - h) - (y_1 - k))^2 + b^2((x_1 - h) + \\
&\quad (y_1 - k))^2))(a^2 b^4 + a^4 b^2 - (b^2((x_1 - h) + (y_1 - k)) - a^2((x_1 - \\
&\quad h) - (y_1 - k)))^2))^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Maka absis dari titik singgung elips dapat disederhanakan menjadi

$$x_{2,3} = \frac{a^2 b^2 (x_1 - h) \pm Z}{a^2 Y^2 + b^2 X^2} + h. \tag{3.4}$$

Substitusikan persamaan (3.4) ke persamaan (3.1) diperoleh ordinat dari titik singgung elips sebagai berikut

$$y_{2,3} = \frac{a^2 b^2 (a^2 Y^2 + b^2 X^2 - (x_1 - h)(b^2 X + a^2 Y)) \mp Z(b^2 X + a^2 Y)}{(a^2 Y^2 + b^2 X^2)(b^2 X - a^2 Y)} + k. \tag{3.5}$$

Jadi, koordinat titik singgung elips adalah

$$\begin{aligned}
Q(x_2, y_2) = (&\frac{a^2 b^2 (x_1 - h) + Z}{a^2 Y^2 + b^2 X^2} + h, \\
&\frac{a^2 b^2 (a^2 Y^2 + b^2 X^2 - (x_1 - h)(b^2 X + a^2 Y)) - Z(b^2 X + a^2 Y)}{(a^2 Y^2 + b^2 X^2)(b^2 X - a^2 Y)} + k)
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
R(x_3, y_3) = (&\frac{a^2 b^2 (x_1 - h) - Z}{a^2 Y^2 + b^2 X^2} + h, \\
&\frac{a^2 b^2 (a^2 Y^2 + b^2 X^2 - (x_1 - h)(b^2 X + a^2 Y)) + Z(b^2 X + a^2 Y)}{(a^2 Y^2 + b^2 X^2)(b^2 X - a^2 Y)} + k)
\end{aligned}$$

sehingga semi kuasa titik di luar elips dengan pusat $H(h, k)$ dan titik fokus di garis $y = x - (h - k)$ dapat ditentukan dengan

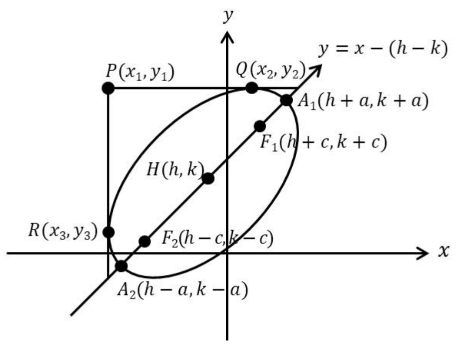
$$\begin{aligned}
S_{PQ(x_1,y_1)} &= \mid PQ \mid^2 \\
&= \left(x_1 - \left(\frac{a^2 b^2 (x_1 - h) + Z}{a^2 Y^2 + b^2 X^2} + h\right)\right)^2 + \\
&\quad \left(y_1 - \left(\frac{a^2 b^2 (a^2 Y^2 + b^2 X^2 - (x_1 - h)(b^2 X + a^2 Y)) - Z(b^2 X + a^2 Y)}{(a^2 Y^2 + b^2 X^2)(b^2 X - a^2 Y)} + k\right)\right)^2
\end{aligned} \tag{3.6}$$

dengan $a, b, h, k, x_1, y_1 \in \mathbb{R}$, $a^2 Y^2 + b^2 X^2 \neq 0$, $(b^2 X - a^2 Y) \neq 0$

$$\begin{aligned}
S_{PR(x_1,y_1)} &= \mid PR \mid^2 \\
&= \left(x_1 - \left(\frac{a^2 b^2 (x_1 - h) - Z}{a^2 Y^2 + b^2 X^2} + h\right)\right)^2 + \\
&\quad \left(y_1 - \left(\frac{a^2 b^2 (a^2 Y^2 + b^2 X^2 - (x_1 - h)(b^2 X + a^2 Y)) + Z(b^2 X + a^2 Y)}{(a^2 Y^2 + b^2 X^2)(b^2 X - a^2 Y)} + k\right)\right)^2
\end{aligned} \tag{3.7}$$

dengan $a, b, h, k, x_1, y_1 \in \mathbb{R}$, $a^2Y^2 + b^2X^2 \neq 0$, $(b^2X - a^2Y) \neq 0$

Berikut gambar dari semi kuasa titik terhadap elips yang berpusat di (h, k) dan titik fokus pada garis $y = x - (h - k)$.



Gambar 4. Semi kuasa titik terhadap elips yang Berpusat $H(h, k)$ dan Titik Fokus di Sumbu $y = x - (h - k)$

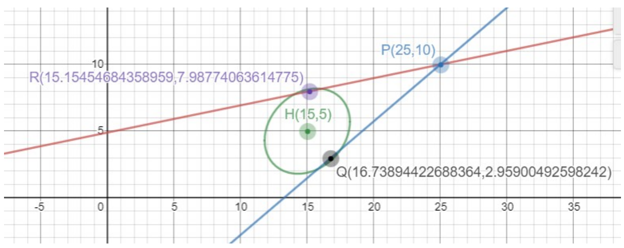
Contoh 3.2. Misalkan elips $\dfrac{(x + y - 20)^2}{25} + \dfrac{(x - y - 10)^2}{16} = 1$, dan titik $P(25, 10)$ di luar elips. Akan dicari semi kuasa titik elips tersebut dan plot gambarnya. Dengan menggunakan persamaan (3.6) dan (3.7) sehingga dapat ditentukan semi kuasa titik elips tersebut sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
S_{PQ(x_1,y_1)} &= \mid PQ \mid^2 \\
&= 88,8432139975996,
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
S_{PR(x_1,y_1)} &= \mid PR \mid^2 \\
&= 99,5866198753883.
\end{aligned}
$$

Plot gambar semi kuasa titik $P(x_1, y_1)$ terhadap elips yang berpusat di $(15, 5)$ dan titik fokus di garis $y = x - 10$ diberikan pada Gambar 5.



Gambar 5. Semi kuasa titik di luar elips

4. Kesimpulan

Pada tulisan ini telah dibahas semi kuasa titik terhadap elips yang berpusat $H(h,k)$ dan titik fokus di sumbu $y = x - (h - k)$. Semi kuasa titik terhadap elips dapat ditentukan dengan persamaan (3.6) dan (3.7).

5. Ucapan Terima Kasih

Penulis menngucapkan terima kasih kepada Dr. Shelvi Ekariani, Narwen, M.Si, Budi Rudianto, M.Si yang telah memberikan kritikan dan masukan sehingga tulisan ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Arnidasari, Mashadi, Kartini. Pekanbaru, 2017. *Semi Kuasa Titik Terhadap Elips*. KARISMATIKA - ISSN : 2442- 0366.
[2] Irma Fitri, Mashadi, Hasriati. Pekanbaru, 2017. *Semi Kuasa Titik di Dalam Lengkungan Hiperbola*. Jurnal Matematika Vol.16 No.2.
[3] Mashadi. 2015. *Geometri* 2. Riau: Universitas Riau Press.