Jurnal Matematika UNAND
Vol. **IX** No. **4** Hal. 330 – 338
Edisi Oktober 2020
ISSN : 2303–291X
e-ISSN : 2721–9410

PELABELAN TOTAL SISI ANTI AJAIB SUPER PADA GRAF TANGGA SEGITIGA DIPERUMUM

RIZKI REFORMAN, LYRA YULIANTI*, NARWEN
Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : rizkireforman@gmail.com, lyra@sci.unand.ac.id, narwen@sci.unand.ac.id

Diterima 15 September 2020 Direvisi 14 Oktober 2020 Dipublikasikan 21 Oktober 2020

Abstrak. Misalkan terdapat graf G dengan p titik dan q sisi. Suatu pelabelan total (a,d)-sisi anti ajaib pada graf G adalah suatu fungsi bijektif $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \cdots, p+q\}$ sedemikian sehingga himpunan bobot sisi untuk semua sisi di G, yang dinotasikan dengan $W = \{w(xy) | w(xy) = f(x) + f(xy) + f(y), xy \in E(G)\}$ dapat dituliskan sebagai $W = \{a, a+d, a+2d, \cdots, a+(q-1)d\}$. Pada makalah ini akan dibahas tentang pelabelan total (a,d)-sisi anti ajaib super pada graf tangga segitiga diperumum Tr_n, untuk $n \geq 2$.

Kata Kunci: Pelabelan total sisi (a,d)-sisi ajaib super, graf tangga segitiga diperumum

1. Pendahuluan

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang sangat bermanfaat untuk membantu menyelesaikan suatu permasalahan agar lebih mudah dimengerti dan diselesaikan. Salah satu kajian yang terdapat di teori graf adalah mengenai pelabelan, pelabelan merupakan suatu pemetaan satu-satu yang memetakan unsur himpunan titik dan unsur himpunan sisi ke bilangan asli yang disebut label.

Dalam [1], pelabelan yang banyak dibahas adalah pelabelan titik (*vertex labeling*), pelabelan sisi (*edge labeling*), dan pelabelan total (*total labeling*). Dalam pelabelan terdapat pelabelan $(a,d)-$anti ajaib, yaitu pelabelan dengan himpunan bobot titik/bobot sisi yang membentuk barisan aritmatika dengan nilai awal a dan nilai beda d. Permasalahan yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah bagaimana menentukan pelabelan total $(a,d)-$sisi anti ajaib super pada graf tangga segitiga diperumum Tr_n dengan $n \geq 2$, dan akan diberikan beberapa contoh untuk memperjelas pelabelan total tersebut.

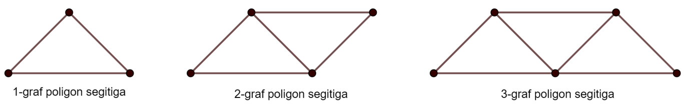
*penulis korespondensi

2. Landasan Teori

2.1. *Definisi dan Terminologi Graf*

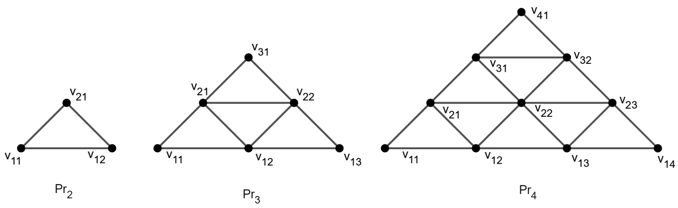
Suatu graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ himpunan tidak kosong yang elemen-elemennya dinamakan *titik*(*vertex*) dari G dan $E(G)$ merupakan pasangan-pasangan yang tak berurut dari titik yang disebut sisi (*edge*) dari G. Umumnya himpunan titik dari graf G dinotasikan sebagai $V(G)$ dan himpunan sisi dari graf G dinotasikan sebagai $E(G)$. Banyaknya titik pada graf G dinotasikan dengan $|V(G)|$. Banyaknya sisi pada graf G dinotasikan dengan $|E(G)|$. Jika suatu graf G memiliki banyak titik p dan banyak sisi q maka dapat ditulis $|V(G)| = p$ dan $|E(G)| = q$.

Graf poligon segitiga adalah suatu graf tangga yang diperoleh dari suatu pengubinan pada bidang menggunakan segitiga. Pada tulisan ini, dua segitiga dikatakan terhubung jika kedua segitiga tersebut beririsan di satu sisi.



Gambar 1. k-graf Poligon Segitiga,1 $\leq$ k $\leq$ 3.

Graf piramida Pr_n adalah graf yang dibangun dari sejumlah 1-graf poligon segitiga, 3-graf poligon segitiga, 5-graf poligon segitiga,$\cdots$, $(2n-5)$-graf poligon segitiga dan $(2n-3)$-graf poligon segitiga [3]. Contoh graf tersebut diberikan pada Gambar 2. Graf tangga segitiga Tr_n dikonstruksi dengan cara menambahkan satu titik v



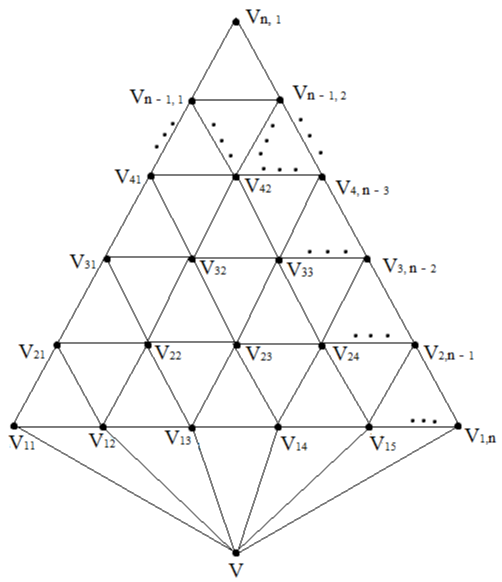
Gambar 2. Graf Piramida Pr_n, $n = 1, 2, 3$.

(dinamakan titik utama), serta menambahkan sisi dari titik v ke $v_{11}, v_{12}, \cdots, v_{1n}$ di graf piramida, untuk $n \geq 2$.

Dengan demikian diperoleh himpunan titik dan himpunan sisi dari graf tangga segitiga adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} V(Tr_n) &= \{v\} \cup \{v_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n-i+1\} \text{ dan himpunan sisi} \\ E(Tr_n) &= \{vv_{1j} \mid 1 \leq j \leq n\} \cup \\ &\quad \{v_{ij}v_{i(j+1)} \mid 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n-i\} \cup \\ &\quad \{v_{ij}v_{(i+1)j} \mid 1 \leq i \leq n-j, 1 \leq j \leq n-1\} \cup \\ &\quad \{v_{ij}v_{(i+1)(j-1)} \mid 1 \leq i \leq j-1, 2 \leq j \leq n\}. \end{aligned}$$

Berdasarkan bentuk umum di atas, dapat dilihat titik pada graf tangga segitiga diperumum dinamakan titik v_{ij} , dimana i merupakan banyaknya tingkatan pada graf dan j merupakan urutan titik pada setiap tingkatan yang sama pada graf. Pada Gambar 3 diberikan ilustrasi untuk graf tangga segitiga yang diperumum Tr_n :



Gambar 3. Graf Tangga Segitiga diperumum Tr_n.

2.2. *Pelabelan Total* (a, d)*-Sisi Anti Ajaib Super*

Berdasarkan [1], misalkan suatu graf G memiliki banyak titik p dan banyak sisi q, suatu fungsi bijeksi $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \cdots, p+q\}$ dikatakan sebagai pelabelan total (a, d) sisi anti ajaib pada graf G jika himpunan bobot sisi untuk semua sisi di G, $W = \{w(xy) | w(xy) = f(x) + f(y) + f(xy), \forall xy \in E(G)\}$, dapat ditulis sebagai $W = \{a, a+d, a+2d, \cdots, a+(q-1)d\}$ untuk suatu $a > 0$ dan $d \geq 0$ dengan suku pertama a dan beda d. Pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib dari graf G dikatakan super jika $f(V) = \{1, 2, \cdots, p\}$ dan $f(E) = \{p+1, p+2, \cdots, p+q\}$ [1].

3. PELABELAN TOTAL SISI ANTI AJAIB SUPER PADA GRAF TANGGA SEGITIGA DIPERUMUM

Berikut adalah hasil terkait pelabelan total sisi anti ajaib super pada graf tangga segitiga Tr_n, untuk $n \geq 2$.

Teorema 3.1. *Misalkan terdapat graf tangga segitiga diperumum Tr_n dengan $n \geq 3$. Jika Tr_n memiliki pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib super maka $d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $n = 2$ dan $d \in \{0, 1\}$ untuk $n \geq 3$.*

Bukti. Misalkan $G = Tr_n$ untuk $n \geq 2$. Banyak titik dan banyak sisi dari graf G adalah $|V(G)| = 1 + \frac{(n+1)n}{2}$ dan $|E(G)| = n + \frac{3(n-1)n}{2}$. Berdasarkan banyak titik dan banyak sisi dari graf G tersebut dapat didefinisikan pelabelan sisi anti ajaib super pada graf G adalah $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \cdots, 2n^2 + 1\}$ untuk $f(V(G)) = \{1, 2, \cdots, 1 + \frac{(n+1)n}{2}\}$ merupakan label titik pada graf G dan $f(E(G)) = \{\frac{(n+1)n}{2} + 2, \frac{(n+1)n}{2} + 3, \cdots, 2n^2 + 1\}$ merupakan label sisi pada graf G. Selanjutnya akan ditentukan nilai beda dari bobot sisi d sehingga himpunan bobot sisi

$$W = \{w(xy)|w(xy) = f(x) + f(y) + f(xy), xy \in E(G)\}$$

dapat dinyatakan sebagai suku-suku pada barisan aritmatika yang terbentuk dengan bobot sisi minimum a dan beda d, yaitu:

$$W = \{a, a + d, a + 2d, \cdots, a + \left(n + \frac{3(n-1)n}{2} - 1\right) d\}.$$

Perhatikan bahwa untuk bobot sisi minimum yang mungkin pada pelabelan f adalah

$$\frac{(n+1)n}{2} + 5 \leq a,$$

dan untuk bobot sisi maksimum yang mungkin pada pelabelan f adalah

$$a + (n + \frac{3(n-1)n}{2} - 1)d \leq 3n^2 + n + 2,$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)n}{2} + 5 + (n + \frac{3(n-1)n}{2} - 1)d &\leq 3n^2 + n + 2, \\ (n + \frac{3(n-1)n}{2} - 1)d &\leq 3n^2 + n + 2 - \frac{(n+1)n}{2} - 5, \\ (\frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - 1)d &\leq \frac{5}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 3, \end{aligned}$$

$$d \leq \frac{\frac{5}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 3}{\frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - 1}.$$

Perhatikan bahwa, untuk $n = 2$ berlaku

$$\begin{aligned} d &\leq \frac{10+1-3}{6-1-1}, \\ d &\leq 2. \end{aligned}$$

Sedangkan untuk $n \geq 3$ berlaku

$$\begin{aligned} d &\leq \frac{\frac{5}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 3}{\frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - 1}, \\ d &< 2. \end{aligned}$$

Diperoleh bahwa apabila graf G memiliki pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib super maka $d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $n = 2$ dan $d \in \{0, 1\}$ untuk $n \geq 3$. $\square$

Teorema 3.2. *Misalkan terdapat graf tangga segitiga diperumum Tr_2. Maka Tr_2 mempunyai pelabelan total $(a, 0)$-sisi anti ajaib super, $(a, 1)$-sisi anti ajaib super, dan $(a, 2)$-sisi anti ajaib super.*

Bukti. Misalkan terdapat graf segitiga diperumum Tr_2. Banyak titik dan sisi dari graf tersebut adalah $|V(Tr_2)| = 4$ dan $|E(Tr_2)| = 5$. Akan ditunjukkan bahwa terdapat pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib super pada graf Tr_2 dengan $d = \{0, 1, 2\}$. Pandang beberapa kasus berikut.
Kasus 1. Akan ditunjukkan bahwa terdapat pelabelan total $(a, 0)$-sisi anti ajaib super pada graf tangga segitiga diperumum Tr_2.
Didefinisikan $f : V(Tr_2) \cup E(Tr_2) \to \{1, 2, 3, \cdots, 9\}$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} f(v) = 1,&\ \ f(vv_{11}) = 9, \\ f(v_{11}) = 2,&\ \ f(vv_{12}) = 8, \\ f(v_{12}) = 3,&\ \ f(v_{11}v_{12}) = 7, \\ f(v_{21}) = 4,&\ \ f(v_{11}v_{21}) = 6, \\ f(v_{12}v_{21}) = 5.& \end{aligned}$$

Maka bobot sisi

$$\begin{aligned} w(vv_{11}) &= f(v) + f(v_{11}) + f(vv_{11}) = 1 + 2 + 9 = 12, \\ w(vv_{12}) &= f(v) + f(v_{12}) + f(vv_{12}) = 1 + 3 + 8 = 12, \\ w(v_{11}v_{12}) &= f(v_{11}) + f(v_{12}) + f(v_{11}v_{12}) = 2 + 3 + 7 = 12, \\ w(v_{11}v_{21}) &= f(v_{11}) + f(v_{21}) + f(v_{11}v_{21}) = 2 + 4 + 6 = 12, \\ w(v_{12}v_{21}) &= f(v_{12}) + f(v_{21}) + f(v_{12}v_{21}) = 3 + 4 + 5 = 12. \end{aligned}$$

Diperoleh bahwa graf Tr_2 memiliki pelabelan total $(a, 0)$-sisi anti ajaib super dengan $a = 12$.
Kasus 2. Akan ditunjukkan bahwa terdapat pelabelan total $(a, 1)$-sisi anti ajaib super pada graf tangga segitiga diperumum Tr_2.

Didefinisikan $f : V(Tr_2) \cup E(Tr_2) \to \{1, 2, 3, \cdots, 9\}$ sedemikian sehingga:

$$\begin{aligned} f(v) &= 1,\ f(vv_{11}) = 7,\\ f(v_{11}) &= 2,\ f(vv_{12}) = 9,\\ f(v_{12}) &= 3,\ f(v_{11}v_{12}) = 6,\\ f(v_{21}) &= 4,\ f(v_{11}v_{21}) = 8,\\ f(v_{12}v_{21}) &= 5. \end{aligned}$$

Maka bobot sisi

$$\begin{aligned} w(vv_{11}) &= f(v) + f(v_{11}) + f(vv_{11}) = 1 + 2 + 7 = 10,\\ w(v_{11}v_{12}) &= f(v_{11}) + f(v_{12}) + f(v_{11}v_{12}) = 2 + 3 + 6 = 11,\\ w(v_{12}v_{21}) &= f(v_{12}) + f(v_{21}) + f(v_{12}v_{21}) = 3 + 4 + 5 = 12,\\ w(vv_{12}) &= f(v) + f(v_{12}) + f(vv_{12}) = 1 + 3 + 9 = 13,\\ w(v_{11}v_{21}) &= f(v_{11}) + f(v_{21}) + f(v_{11}v_{21}) = 2 + 4 + 8 = 14. \end{aligned}$$

Diperoleh bahwa $W = \{10, 11, 12, 13, 14\}$, sehingga graf Tr_2 memiliki pelabelan total $(a, 1)$-sisi anti ajaib super dengan $a = 10$.
Kasus 3 : Akan ditunjukkan bahwa terdapat pelabelan total $(a, 2)$-sisi anti ajaib super pada graf tangga segitiga diperumum Tr_2.
Didefinisikan $f : V(Tr_2) \cup E(Tr_2) \to \{1, 2, 3, \cdots, 9\}$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} f(v) &= 1,\ f(vv_{12}) = 6,\\ f(v_{11}) &= 2,\ f(v_{11}v_{12}) = 7,\\ f(v_{12}) &= 3,\ f(v_{11}v_{21}) = 8,\\ f(v_{21}) &= 4,\ f(v_{12}v_{21}) = 9,\\ f(vv_{11}) &= 5. \end{aligned}$$

Maka bobot sisi

$$\begin{aligned} w(vv_{11}) &= f(v) + f(v_{11}) + f(vv_{11}) = 1 + 2 + 5 = 8,\\ w(vv_{12}) &= f(v) + f(v_{12}) + f(vv_{12}) = 1 + 3 + 6 = 10,\\ w(v_{11}v_{12}) &= f(v_{11}) + f(v_{12}) + f(v_{11}v_{12}) = 2 + 3 + 7 = 12,\\ w(v_{11}v_{21}) &= f(v_{11}) + f(v_{21}) + f(v_{11}v_{21}) = 2 + 4 + 8 = 14,\\ w(v_{12}v_{21}) &= f(v_{12}) + f(v_{21}) + f(v_{12}v_{21}) = 3 + 4 + 9 = 16. \end{aligned}$$

Diperoleh bahwa $W = \{8, 10, 12, 14, 16\}$, sehingga graf Tr_2 memiliki pelabelan total $(a, 2)$-sisi anti ajaib super dengan $a = 8$. □

Teorema 3.3. *Misalkan terdapat graf tangga segitiga diperumum Tr_n untuk $n > 2$. Maka graf Tr_n tidak memiliki pelabelan total $(a, 0)$-sisi anti ajaib super.*

Bukti. Misalkan Tr_n adalah graf tangga segitiga diperumum untuk $n \geq 2$. Banyak titik dan banyak sisi dari graf Tr_n adalah $|V(Tr_n)| = 1 + \dfrac{(n+1)n}{2}$ dan $|E(Tr_n)| =$

$n+\dfrac{3(n-1)n}{2}$. Andaikan graf Tr_n memiliki pelabelan total $(a,0)$-sisi anti ajaib super untuk $n\geq 2$, maka tidak terdapat sisi yang memiliki bobot yang sama. Akan dibuktikan bahwa graf Tr_n memuat minimal dua sisi dengan bobot yang sama, yaitu dengan menggunakan prinsip sangkar burung. Pertama-tama, akan diberikan label kepada titik-titik di Tr_n. Perhatikan uraian berikut.

$$\begin{aligned}
\binom{1+\frac{(n+1)n}{2}}{2} &= \frac{\left(1+\frac{(n+1)n}{2}\right)\left(\frac{(n+1)n}{2}\right)\left(\frac{(n+1)n}{2}-1\right)!}{2!\left(\frac{(n+1)n}{2}-1\right)!},\\
&= \frac{\left(1+\frac{(n+1)n}{2}\right)\left(\frac{(n+1)n}{2}\right)}{2!},\\
&= \frac{\left(\frac{(n+1)n}{2}\right)\left(\frac{(n+1)n}{2}\right)^2}{2!},\\
&= \left(\frac{(n+1)n}{4}\right)\left(\frac{(n+1)^2n^2}{8}\right),\\
&= \left(\frac{2(n+1)n+(n+1)^2n^2}{8}\right),\\
&= \left(\frac{2n^2+2n+n^4+2n^3+n^2}{8}\right),\\
&= \left(\frac{n^4+2n^3+3n^2+2n}{8}\right),\\
&= \left(\frac{n^3+2n^2+3n+2}{8}\right). \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

Untuk banyaknya sisi di Tr_n, perhatikan uraian berikut,

$$\begin{aligned}
n+\frac{3(n-1)n}{2} &= \frac{2n+3(n-1)n}{2},\\
&= \frac{4(2n+3(n-1)n)}{8},\\
&= \frac{4(3n^2-n)}{8},\\
&= \frac{12n^2-4n}{8},\\
&= \frac{12n-4}{8}. \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Dari persamaan (3.1) dan persamaan (3.2), jelas bahwa untuk $n>2$ berlaku

$$\left(\frac{n^3+2n^2+3n+2}{8}\right) > \frac{12n-4}{8}. \qquad (3.3)$$

Dari persamaan (3.3), diperoleh bahwa $\binom{|V(Tr_n)|}{2} > |E(Tr_n)|$. Berdasarkan prinsip sangkar burung merpati, akan terdapat minimal 2 sisi dengan bobot sisi pada pelabelan titik tersebut yang sama. Dapat disimpulkan bahwa graf tangga segitiga diperumum Tr_n tidak memiliki pelabelan total $(a, 0)$-sisi anti ajaib super untuk $n > 2$. □

Teorema 3.4. *Misalkan terdapat graf tangga segitiga diperumum Tr_n untuk $n = 2$ dan 3. Maka Tr_n memiliki pelabelan total $(a, 1)$-sisi anti ajaib super.*

Bukti. Misalkan G adalah graf segitiga diperumum Tr_n dengan $n = 2$ dan$n = 3$. Banyak titik dan sisi dari graf tersebut disimbolkan dengan $|V(G)|$ dan $|E(G)|$. Akan ditunjukkan bahwa terdapat pelabelan total $(a, 1)$-sisi anti ajaib super pada graf Tr_n dengan $n = 2$ dan 3. Pandang beberapa kasus berikut.
Kasus 1 : Misalkan G_1 adalah graf segitiga diperumum Tr_2. Akan ditunjukkan pelabelan total $(a, 1)$-sisi anti ajaib super pada graf Tr_2.

Dalam Teorema 3.2. sudah diperlihatkan bukti pelabelan total $(a, 1)$-sisi anti ajaib super pada graf Tr_2.

Kasus 2 : Misalkan G_2 adalah graf segitiga diperumum Tr_3. Akan ditunjukkan pelabelan total $(a, 1)$-sisi anti ajaib super pada graf Tr_3.

Banyak titik dan sisi dari graf tersebut adalah $|V(G_2)| = 7$ dan $|E(G_2)| = 12$. Didefinisikan $f : V(G_2) \cup E(G_2) \rightarrow \{1, 2, 3, \cdots, 19\}$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned}
f(v) &= (1), \;\; f(v_{11}) = (2), \\
f(v_{12}) &= (4), \;\; f(v_{13}) = (3), \\
f(v_{21}) &= (5), \;\; f(v_{22}) = (6), \\
f(v_{31}) &= (7), \;\; f(vv_{11}) = (19), \\
f(vv_{12}) &= (11), \;\; f(vv_{13}) = (14), \\
f(v_{11}v_{12}) &= (17), \;\; f(v_{12}v_{13}) = (10), \\
f(v_{11}v_{21}) &= (12), \;\; f(v_{12}v_{21}) = (18), \\
f(v_{12}v_{22}) &= (16), \;\; f(v_{13}v_{22}) = (15), \\
f(v_{21}v_{22}) &= (9), \;\; f(v_{21}v_{31}) = (13), \\
f(v_{22}v_{31}) &= (8).
\end{aligned}$$

Maka bobot sisi

$$\begin{aligned}
w(vv_{11}) &= f(v) + f(v_{11}) + f(vv_{11}) = 1 + 2 + 19 = 22, \\
w(vv_{12}) &= f(v) + f(v_{12}) + f(vv_{12}) = 1 + 4 + 11 = 16, \\
w(vv_{13}) &= f(v) + f(v_{13}) + f(vv_{13}) = 1 + 3 + 14 = 18, \\
w(v_{11}v_{12}) &= f(v_{11}) + f(v_{12}) + f(v_{11}v_{12}) = 2 + 4 + 17 = 23, \\
w(v_{12}v_{13}) &= f(v_{12}) + f(v_{13}) + f(v_{12}v_{13}) = 4 + 3 + 10 = 17, \\
w(v_{11}v_{21}) &= f(v_{11}) + f(v_{21}) + f(v_{11}v_{21}) = 2 + 5 + 12 = 19,
\end{aligned}$$

$$w(v_{12}v_{21}) = f(v_{12}) + f(v_{21}) + f(v_{12}v_{21}) = 4 + 5 + 18 = 27,$$
$$w(v_{12}v_{22}) = f(v_{12}) + f(v_{22}) + f(v_{12}v_{22}) = 4 + 6 + 16 = 26,$$
$$w(v_{13}v_{22}) = f(v_{13}) + f(v_{22}) + f(v_{13}v_{22}) = 3 + 6 + 15 = 24,$$
$$w(v_{21}v_{22}) = f(v_{21}) + f(v_{22}) + f(v_{21}v_{22}) = 5 + 6 + 9 = 20,$$
$$w(v_{21}v_{31}) = f(v_{21}) + f(v_{31}) + f(v_{21}v_{31}) = 5 + 7 + 13 = 25,$$
$$w(v_{22}v_{31}) = f(v_{22}) + f(v_{31}) + f(v_{22}v_{31}) = 6 + 7 + 8 = 21.$$

Berdasarkan uraian diatas diperoleh bahwa

$$W = \{16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27\},$$

sehingga graf G_2 memiliki pelabelan total $(16, 1)$-sisi anti ajaib super. □

4. Kesimpulan

Graf tangga segitiga diperumum Tr_n untuk $d \in \{0, 1, 2\}$ dengan $n = 2$ dan $d \in \{0, 1\}$ dengan $n \geq 3$, mempunyai pelabelan total (a, d)-sisi anti ajaib super. Selanjutnya, graf Tr_2 mempunyai pelabelan total $(a, 0)$-sisi anti ajaib super, $(a, 1)$-sisi anti ajaib super, dan $(a, 2)$-sisi anti ajaib super. Sementara untuk $n > 2$, Tr_n tidak memiliki pelabelan total $(a, 0)$-sisi anti ajaib super. Dalam penelitian ini juga diperoleh bahwa untuk $n = 2$ dan $n = 3$, graf Tr_n memiliki pelabelan total $(a, 1)$-sisi anti ajaib super.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terimakasih kepada bapak Syafrizal Sy, ibu Susila Bahri, dan ibu Monika Rianti Helmi yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Baca, M dan Miller, M. 2008. *Super Edge-Antimagic Graph : A wealth of Problems and Some Solutions*. Brown Walker Press, USA.

[2] Bondy, J.A.,U.S.R. Murty. 2019. *Graph Theory with Application*. Elsevier Science Publishing, New York.

[3] Low, R.M dan Lee, S.M. 2004. On the integer-magic spectra of tessellation graphs. *Australian Journal of Combinatorics*. (34): 195 – 210.

[4] Riza, D. N, 2011, *Pelabelan Total (a, d)-Sisi-Anti Ajaib Pada Graf Bintang*, skripsi, tidak diterbitkan, Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas, Padang.

[5] Yulianti, L. Narwen, Fitrianda, S. Azizu, K.A. 2020. On the Rainbow Connection Number and Strong Rainbow Connection Number of Generalized Triangle Ladder Graph. *Proceeding of the 2^{nd} ICST 2019*, Bengkulu, pp 86 – 90