Jurnal Matematika UNAND
Vol. **IX** No. **4** Hal. 373 – 381
Edisi Oktober 2020
ISSN : 2303–291X
e-ISSN : 2721–9410
©Jurusan Matematika FMIPA UNAND

EXTERNAL DAN INTERNAL DIRECT PRODUCTS PADA GRUP

HESTI SRI HANDANI*, I MADE ARNAWA, NOVA NOLIZA BAKAR
Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : hestihandanii@gmail.com, arnawa@sci.unand.ac.id, novanoliza@sci.unand.ac.id

Diterima 15 September 2020 Direvisi 14 Oktober 2020 Dipublikasikan 21 Oktober 2020

Abstrak. Misalkan G_1 dan G_2 suatu grup dengan operasi biner, maka grup $(G_1 \times G_2, \circledast)$ disebut grup *external direct products* dari G_1 dan G_2. Misalkan G adalah suatu grup dengan operasi biner, dan H_1 dan H_2 subgrup dari G. G disebut *internal direct products* dari H_1 dan H_2, jika setiap elemen dari H_1 komutatif dengan setiap elemen dari H_2, dan setiap elemen dari G dapat dinyatakan secara tunggal sebanyak hasil kali dari elemen H_1 dan H_2.

Kata Kunci: Grup, Subgrup, Koset, Subgrup Normal, Fungsi, Isomorfisma Grup, *External Direct Products*, *Internal Direct Products*

1. Pendahuluan

Himpunan tak kosong G disebut grup jika di G didefinisikan suatu operasi biner sedemikian sehingga himpunan G dengan operasi biner memenuhi sifat tertutup, asosiatif, terdapat unsur identitas di G, dan untuk setiap unsur di G mempunyai invers (balikan). Jika berlaku sifat komutatif pada suatu grup, maka grup tersebut disebut grup abelian. Subgrup H adalah himpunan bagian dari G jika dengan operasi biner yang sama dengan G, juga membentuk grup [4].

Misalkan G_1 dan G_2 suatu grup dengan operasi biner, maka grup $(G_1 \times G_2, \circledast)$ disebut grup *external direct products* dari G_1 dan G_2. Misalkan G adalah suatu grup dengan operasi biner, dan H_1 dan H_2 subgrup dari G. G disebut *internal direct products* dari H_1 dan H_2, jika setiap elemen dari H_1 komutatif dengan setiap elemen dari H_2, dan setiap elemen dari G dapat dinyatakan secara tunggal sebanyak hasil kali dari elemen H_1 dan H_2 [6].

*penulis korespondensi

2. Landasan Teori

2.1. *Grup dan Subgrup*

Definisi 2.1. [4] *Suatu himpunan tidak kosong G disebut suatu grup jika pada G dapat didefinisikan suatu operasi biner ditulis $*$, sedemikian sehingga:*

(1) Jika $a, b \in G$, maka $a * b \in G$ (Sifat Tertutup).
(2) Jika $a, b, c \in G$, maka $a * (b * c) = (a * b) * c$ (Sifat Asosiatif).
(3) Terdapat suatu unsur e di G, sedemikian sehingga $a * e = e * a = a$ untuk semua $a \in G$ (Keberadaan Unsur Identitas).
(4) Untuk setiap $a \in G$, terdapat suatu unsur $a^{-1} \in G$, sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (Keberadaan Unsur Invers).

Definisi 2.2. [4] *Suatu grup G disebut grup abelian (grup komutatif) jika untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $ab = ba$.*

Lema 2.3. [4] *Jika G suatu grup, maka*

(1) Unsur identitas di G adalah tunggal.
(2) Untuk setiap $a \in G$ memiliki invers tunggal di G.
(3) Untuk setiap $a \in G$, $(a^{-1})^{-1} = a$.
(4) Untuk setiap a,$b \in G$, $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$.

Definisi 2.4. [4] *Suatu himpunan bagian tak kosong H dari G dikatakan subgrup dari G, jika H dengan operasi biner yang sama dengan G juga membentuk grup.*

Lema 2.5. [4] *Suatu himpunan bagian tak kosong H dari G disebut subgrup dari G, jika dan hanya jika:*

(1) Untuk setiap $a, b \in H$, berlaku $ab \in H$.
(2) Untuk setiap $a \in H$, berlaku $a^{-1} \in H$.

Lema 2.6. [4] *Misalkan H, K subgrup dari G, maka $H \cap K$ subgrup dari G.*

2.2. *Koset, Subgrup Normal, dan Grup Faktor*

Berikut akan dijelaskan sifat-sifat dari Koset, Subgrup Normal, dan Grup Faktor.

Definisi 2.7. [2] *Misalkan G suatu grup, dan H subgrup dari G. Untuk setiap $a \in G$,*

$$Ha = \{\ ha | h \in H\ \}$$

adalah koset kanan dari H oleh a;

$$aH = \{\ ah | h \in H\ \}$$

adalah koset kiri dari H oleh a.

Definisi 2.8. [4] *Suatu subgrup N dari G dikatakan subgrup normal dari G jika untuk setiap $g \in G$ dan $n \in N$ berlaku $gng^{-1} \in N$.*

Lema 2.9. [4] *Subgrup N dari G adalah subgrup normal dari G jika dan hanya jika perkalian dari dua koset kanan dari N di G adalah koset kanan di G.*

Teorema 2.10. [4] *Jika G adalah suatu grup, N adalah subgrup normal dari G. Maka $G/N = \{Ng | g \in G$ disebut grup kuosien atau grup faktor dari G oleh $N\}$.*

2.3. *Fungsi*

Definisi 2.11. [1]*Misalkan A dan B adalah dua himpunan tak kosong, ϕ dikatakan suatu fungsi dari A ke B jika setiap unsur di A dipetakan secara tunggal ke suatu unsur di B, ditulis $\phi : A \to B$. Apabila ϕ memetakan suatu $x \in A$ ke suatu $y \in B$ maka y disebut peta dari x, ditulis dengan $\phi : x \mapsto y$, sedangkan x disebut prapeta dari y. Himpunan A dinamakan daerah asal (domain) dari fungsi ϕ dan himpunan B dinamakan daerah hasil (range) dari fungsi ϕ tersebut.*

Definisi 2.12. [3]*Suatu fungsi dari himpunan A ke himpunan B adalah satu-satu jika setiap elemen di B mempunyai paling banyak satu elemen dari A dipetakan ke B, dan dikatakan pada B jika setiap elemen dari B mempunyai paling sedikit satu elemen dari A dipetakan ke B.*

2.4. *Isomorfisma Grup*

Definisi 2.13. [4] *Suatu pemetaan ϕ dari grup G ke grup G' ($\phi : G \to G'$) dikatakan homomorfisma jika untuk setiap $a, b \in G$ berlaku*

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b).$$

Lema 2.14. [4] *Jika ϕ adalah pemetaan homomorfisma dari G ke G' maka:*

(1) $\phi(e) = e'$, e' suatu unsur identitas dari G' .
(2) $\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$, untuk setiap $x \in G$.

Lema 2.15. [4] *Misalkan G adalah suatu grup, N adalah subgrup normal dari G. Didefinisikan ϕ suatu pemetaan dari G ke G/N oleh $\phi(x) = Nx$, untuk setiap $x \in G$, maka ϕ adalah homomorfisma dari G pada G/N.*

Definisi 2.16. [4] *Jika ϕ adalah homomorfisma dari G ke G', maka kernel ϕ, K_ϕ, didefinisikan sebagai $K_\phi = \{x \in G | \phi(x) = e', e' =$ unsur identitas di $G'\}$.*

Lema 2.17. [4] *Jika ϕ suatu homomorfisma dari G ke G' dengan kernel K, maka K adalah subgrup normal dari G.*

Definisi 2.18. [3] *Suatu isomorfisma $\phi : G \to G'$ adalah suatu homomorfisma yang satu-satu dan pada. Dinotasikan dengan $G \cong G'$.*

Teorema 2.19. [5] *Suatu homomorfisma $\phi : G \to G'$ adalah satu-satu jika dan hanya jika $K_\phi = \{e\}, e \in G$.*

Teorema 2.20. [4] *Misalkan ϕ suatu homomorfisma pada dari G ke G' dengan kernel K. Maka $G/K \cong G'$.*

3. Pembahasan

3.1. *External Direct Products*

Definisi 3.1. [6] *Misalkan G_1 dan G_2 adalah dua grup sebarang. Didefinisikan product dari dua himpunan ini, $G_1 \times G_2$ sebagai*

$$G_1 \times G_2 = \{(a_1, a_2) \mid a_1 \in G_1 \text{ dan } a_2 \in G_2\}$$

Teorema 3.2. [6] *Misalkan G_1 dan G_2 adalah dua grup. Definisikan suatu operasi perkalian $\circledast$ pada $G_1 \times G_2$ sebagai berikut:*

$$(a_1, a_2) \circledast (b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$$

untuk setiap elemen (a_1, a_2), $(b_1, b_2) \in G_1 \times G_2$.
Maka $(G_1 \times G_2, \circledast)$ suatu grup dan disebut grup external direct products dari G_1 dan G_2.

Bukti. Misalkan G_1 dan G_2 adalah dua grup dan $G_1 \times G_2 = \{(a_1, a_2) \mid a_1 \in G_1$ dan $a_2 \in G_2\}$.
Akan ditunjukkan $(G_1 \times G_2, \circledast)$ suatu grup dan disebut grup *external direct products* dari G_1 dan G_2.

(i) (Sifat Tertutup) Misalkan (a_1, a_2) dan (b_1, b_2) merupakan elemen dari $G_1 \times G_2$, maka $a_1, b_1 \in G_1$ dan $a_2, b_2 \in G_2$.
Perhatikan bahwa:

$$(a_1, a_2) \circledast (b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$$

Karena G_1 dan G_2 suatu grup, maka $a_1 b_1 \in G_1$ dan $a_2 b_2 \in G_2$, sehingga $(a_1, a_2) \circledast (b_1, b_2) \in G_1 \times G_2$.
Jadi untuk setiap $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in G_1 \times G_2$ berlaku $(a_1, a_2) \circledast (b_1, b_2) \in G_1 \times G_2$ sehingga $G_1 \times G_2$ bersifat tertutup.

(ii) (Sifat Asosiatif) Misalkan (a_1, a_2), (b_1, b_2) dan (c_1, c_2) merupakan elemen dari $G_1 \times G_2$, maka $a_1, b_1, c_1 \in G_1$ dan $a_2, b_2, c_2 \in G_2$.
Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}
\{(a_1, a_2) \circledast (b_1, b_2)\} \circledast (c_1, c_2) &= (a_1 b_1, a_2 b_2) \circledast (c_1, c_2) \\
&= ((a_1 b_1) c_1, (a_2 b_2) c_2) \\
&= (a_1 (b_1 c_1), a_2 (b_2 c_2)) \\
&= (a_1, a_2) \circledast (b_1 c_1, b_2 c_2) \\
&= (a_1, a_2) \circledast \{(b_1, b_2) \circledast (c_1, c_2)\}
\end{aligned}$$

Jadi untuk setiap (a_1, a_2), (b_1, b_2) dan $(c_1, c_2) \in G_1 \times G_2$ berlaku $\{(a_1, a_2) \circledast (b_1, b_2)\} \circledast (c_1, c_2) = (a_1, a_2) \circledast \{(b_1, b_2) \circledast (c_1, c_2)\}$.

(iii) (Keberadaan Unsur Identitas) Misalkan e_1 identitas di G_1, e_2 identitas di G_2, maka $(e_1, e_2) \in G_1 \times G_2$. Selain itu, untuk setiap $(a_1, a_2) \in G_1 \times G_2$ berlaku

(a) $(a_1, a_2) \circledast (e_1, e_2) = (a_1 e_1, a_2 e_2) = (a_1, a_2)$
(b) $(e_1, e_2) \circledast (a_1, a_2) = (e_1 a_1, e_2 a_2) = (a_1, a_2)$

Jadi untuk setiap $(a_1, a_2) \in G_1 \times G_2$ terdapat $(e_1, e_2) \in G_1 \times G_2$ sehingga $(a_1, a_2) \circledast (e_1, e_2) = (e_1, e_2) \circledast (a_1, a_2) = (a_1, a_2)$.

(iv) (Keberadaan Unsur Invers) Misalkan (a_1, a_2) adalah suatu elemen pada $G_1 \times G_2$, maka $a_1 \in G_1$ dan $a_2 \in G_2$.
Karena $a_1 \in G_1$ dan G_1 grup, maka berlaku $a_1^{-1} \in G_1$.
Karena $a_2 \in G_2$ dan G_2 grup, maka berlaku $a_2^{-1} \in G_2$.
Perhatikan bahwa:

(a) $(a_1, a_2) \circledast (a_1^{-1}, a_2^{-1}) = (a_1 a_1^{-1}, a_2 a_2^{-1}) = (e_1, e_2)$
(b) $(a_1^{-1}, a_2^{-1}) \circledast (a_1, a_2) = (a_1^{-1} a_1, a_2^{-1} a_2) = (e_1, e_2)$

Jadi untuk setiap $(a_1, a_2) \in G_1 \times G_2$ terdapat $(a_1^{-1}, a_2^{-1}) \in G_1 \times G_2$ sehingga $(a_1, a_2) \circledast (a_1^{-1}, a_2^{-1}) = (a_1^{-1}, a_2^{-1}) \circledast (a_1, a_2) = (e_1, e_2)$.

Karena (i), (ii), (iii), dan (iv), diperoleh $(G_1 \times G_2, \circledast)$ suatu grup dan disebut grup *external direct products* dari G_1 dan G_2. □

Contoh 3.3. Misalkan $U(6) = \{1, 5\}$ merupakan grup terhadap operasi perkalian modulo 6 dan $U(8) = \{1, 3, 5, 7\}$ merupakan grup terhadap operasi perkalian modulo 8. Akan ditunjukkan $(U(6) \times U(8), \circledast)$ suatu grup *external direct products* dari $U(6)$ dan $U(8)$. Berdasarkan Definisi 3.1, diperoleh $U(6) \times U(8) = \{(1,1), (1,3), (1,5), (1,7), (5,1), (5,3), (5,5), (5,7)\}$ dengan operasi $\circledast$.

(i) Akan ditunjukkan setiap unsur di $(U(6) \times U(8), \circledast)$ bersifat tertutup. Dibawah ini akan diuraikan tabel perkalian $\circledast$ dari setiap unsur di $U(6) \times U(8)$.

Tabel 1. Hasil perkalian $\circledast$ setiap unsur di $U(6) \times U(8)$

$\circledast$	(1,1)	(1,3)	(1,5)	(1,7)	(5,1)	(5,3)	(5,5)	(5,7)
(1,1)	(1,1)	(1,3)	(1,5)	(1,7)	(5,1)	(5,3)	(5,5)	(5,7)
(1,3)	(1,3)	(1,1)	(1,7)	(1,5)	(5,3)	(5,1)	(5,7)	(5,5)
(1,5)	(1,5)	(1,7)	(1,1)	(1,3)	(5,5)	(5,7)	(5,1)	(5,3)
(1,7)	(1,7)	(1,5)	(1,3)	(1,1)	(5,7)	(5,5)	(5,3)	(5,1)
(5,1)	(5,1)	(5,3)	(5,5)	(5,7)	(1,1)	(1,3)	(1,5)	(1,7)
(5,3)	(5,3)	(5,1)	(5,7)	(5,5)	(1,3)	(1,1)	(1,7)	(1,5)
(5,5)	(5,5)	(5,7)	(5,1)	(5,3)	(1,5)	(1,7)	(1,1)	(1,3)
(5,7)	(5,7)	(5,5)	(5,3)	(5,1)	(1,7)	(1,5)	(1,3)	(1,1)

Dari Tabel 3.1.1, diketahui bahwa untuk setiap unsur $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in U(6) \times U(8)$ berlaku $(a_1, a_2) \circledast (b_1, b_2) \in U(6) \times U(8)$ sehingga terbukti $(U(6) \times U(8), \circledast)$ bersifat tertutup.

(ii) Akan ditunjukkan setiap unsur di $(U(6) \times U(8), \circledast)$ bersifat asosiatif. Berdasarkan Tabel 3.1.1, untuk setiap unsur $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) \in U(6) \times U(8)$ berlaku$\{(a_1, a_2) \circledast (b_1, b_2)\} \circledast (c_1, c_2) = (a_1, a_2) \circledast \{(b_1, b_2) \circledast (c_1, c_2)\}$. Ini berarti $(U(6) \times U(8), \circledast)$ bersifat asosiatif.

(iii) Akan ditunjukkan setiap unsur di $(U(6) \times U(8), \circledast)$ memiliki unsur identitas. Berdasarkan Tabel 3.1.1, diperoleh $(1, 1)$ merupakan unsur identitas di $(U(6) \times U(8)$. Ini berarti $(U(6) \times U(8), \circledast)$ memiliki unsur identitas.

(iv) Akan ditunjukkan setiap unsur di $(U(6)\times U(8), \circledast)$ memiliki invers. Berdasarkan Tabel 3.1.1, untuk setiap $(a_1, a_2) \in U(6) \times U(8)$ berlaku $(a_1, a_2)^{-1} \in U(6) \times U(8)$. Ini berarti $(U(6) \times U(8), \circledast)$ memiliki invers.

Berdasarkan (i), (ii), (iii), dan (iv), diperoleh $(U(6) \times U(8), \circledast)$ suatu grup *external direct products* dari $U(6)$ dan $U(8)$.

Teorema 3.4. [6]*Misalkan G_1 dan G_2 adalah grup. Misalkan e_1 dan e_2 adalah elemen identitas masing-masing pada G_1 dan G_2, maka $G_1 \times \{e_2\}$ dan $\{e_1\} \times G_2$ pada $G_1 \times G_2$ adalah subgrup normal dari $G_1 \times G_2$.*

Teorema 3.5. [6]*Misalkan G_1 dan G_2 merupakan grup. Misalkan e_1 dan e_2 adalah elemen identitas masing-masing pada G_1 dan G_2, maka $G_1 \times \{e_2\} \cong G_1$ dan $\{e_1\} \times G_2 \cong G_2$.*

Teorema 3.6. [6]*Misalkan G_1 dan G_2 merupakan grup. Misalkan e_1 dan e_2 adalah elemen identitas masing-masing pada G_1 dan G_2, maka*

(a) $(G_1 \times \{e_2\}) \cap (\{e_1\} \times G_2) = \{(e_1, e_2)\}$.
(b) $\forall x \in G_1 \times \{e_2\}$ *dan* $y \in \{e_1\} \times G_2$ *berlaku* $x \circledast y = y \circledast x$.
(c) $\forall z \in G_1 \times G_2$, *$z$ dapat ditulis secara tunggal sebagai* $z = x \circledast y$ *untuk suatu* $x \in G_1 \times \{e_2\}$ *dan* $y \in \{e_1\} \times G_2$.
(d) $G_1 \times G_2 \cong G_2 \times G_1$.

3.2. *Internal Direct Products*

Definisi 3.7. [6]*Misalkan $(G, *)$ adalah suatu grup. Grup $(G, *)$ dikatakan internal direct products dari dua subgrup H_1 dan H_2 jika:*

(i) setiap elemen dari H_1 komutatif dengan setiap elemen dari H_2.
(ii) setiap elemen dari G dapat dinyatakan secara tunggal sebanyak hasil kali dari elemen H_1 dan H_2.

Contoh 3.8. Misalkan $G = \{I, (a\ \ b), (c\ \ d), (a\ \ b)\circ(c\ \ d)\}$ suatu grup yang memuat empat permutasi terhadap operasi komposisi fungsi. Misalkan $H_1 = \{I, (a\ \ b)\}$ dan $H_2 = \{I, (c\ \ d)\}$ yang merupakan subgrup dari G. Akan ditunjukkan G *internal direct products* dari H_1 dan H_2.

a) Akan ditunjukkan setiap elemen dari H_1 komutatif dengan setiap elemen dari H_2. Di bawah ini akan diuraikan tabel komposisi setiap unsur di G.

Tabel 2. Hasil komposisi setiap unsur di G

$\circ$	I	$(a\ \ b)$	$(c\ \ d)$
I	I	$(a\ \ b)$	$(c\ \ d)$
$(a\ \ b)$	$(a\ \ b)$	I	$(a\ \ b)(c\ \ d)$
$(c\ \ d)$	$(c\ \ d)$	$(a\ \ b)(c\ \ d)$	I

Perhatikan bahwa:

$$(a\ \ b) \circ (c\ \ d) = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix}$$

dan

$$(c\ \ d) \circ (a\ \ b) = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & d & c \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix}$$

Dari uraian diatas dapat dilihat bahwa setiap elemen dari H_1 komutatif dengan setiap elemen dari H_2.

b) Akan ditunjukkan setiap elemen dari G dapat dinyatakan secara tunggal sebanyak hasil kali dari elemen dari H_1 dan H_2.
Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} I &= I \circ I \\ (a\ \ b) &= (a\ \ b) \circ I \\ (c\ \ d) &= I \circ (c\ \ d) \\ (a\ \ b) \circ (c\ \ d) &= (a\ \ b) \circ (c\ \ d) \end{aligned}$$

Dari uraian diatas dapat dilihat bahwa setiap elemen dari G dapat dinyatakan secara tunggal sebanyak hasil kali dari elemen dari H_1 dan H_2.

Teorema 3.9. [6] *Misalkan grup G suatu internal direct products dari dua subgrup H_1 dan H_2, maka*

(i) $H_1 \cap H_2 = \{e\}$.
(ii) $H_1 \times H_2 \cong G$.

Teorema 3.10. [6]*Misalkan grup G suatu internal direct products dari dua subgrup H_1 dan H_2. Maka H_1 dan H_2 subgrup normal dari G.*

Bukti. Misalkan grup G suatu *internal direct products* dari dua subgrup H_1 dan H_2.

a) Akan ditunjukkan H_1 subgrup normal dari G.
Ambil sebarang $a \in H_1$ dan $x \in G$.
Karena $G = H_1 \times H_2$ maka $x = h_1h_2$ untuk suatu $h_1 \in H_1$ dan $h_2 \in H_2$.
Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} xax^{-1} &= (h_1h_2)a(h_1h_2)^{-1} \\ &= h_1h_2ah_2^{-1}h_1^{-1} \\ &= h_1ah_2h_2^{-1}h_1^{-1} \\ &= h_1aeh_1^{-1} \\ &= h_1ah_1^{-1} \end{aligned}$$

Karena $h_1, a, h_1^{-1} \in H_1$ dan H_1 subgrup maka $h_1ah_1^{-1} \in H_1$.
Ini berarti H_1 subgrup normal dari G.

b) Akan ditunjukkan H_2 subgrup normal dari G.
Ambil sebarang $a \in H_2$ dan $x \in G$.
Karena $G = H_1 \times H_2$ maka $x = h_1 h_2$ untuk suatu $h_1 \in H_1$ dan $h_2 \in H_2$.
Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} xax^{-1} &= (h_1h_2)a(h_1h_2)^{-1} \\ &= h_1h_2ah_2^{-1}h_1^{-1} \\ &= h_2h_1ah_1^{-1}h_2^{-1} \\ &= h_2ah_1h_1^{-1}h_2^{-1} \\ &= h_2aeh_2^{-1} \\ &= h_2ah_2^{-1} \end{aligned}$$

Karena $h_2, a, h_2^{-1} \in H_2$ dan H_2 subgrup maka $h_2ah_2^{-1} \in H_2$.
Ini berarti H_2 subgrup normal dari G. □

Teorema 3.11. [6]*Misalkan grup G suatu internal direct products dari dua subgrup H_1 dan H_2. Maka*

i) $G/H_2 \cong H_1$.
ii) $G/H_1 \cong H_2$.

4. Kesimpulan

(1) Jika G_1 dan G_2 suatu grup maka $(G_1 \times G_2, \circledast)$ suatu grup dan disebut grup *external direct products* dari G_1 dan G_2.
(2) Jika G_1 dan G_2 suatu grup dengan e_1 dan e_2 identitas pada masing-masing G_1 dan G_2 maka
   (a) $G_1 \times \{e_2\}$ dan $\{e_1\} \times G_2$ pada $G_1 \times G_2$ adalah subgrup normal dari $G_1 \times G_2$.
   (b) $G_1 \times \{e_2\}$ isomorfik ke G_1 dan $\{e_1\} \times G_2$ isomorfik ke G_2.
   (c) $(G_1 \times \{e_2\}) \cap (\{e_1\} \times G_2) = \{(e_1, e_2)\}$.
   (d) $\forall x \in G_1 \times \{e_2\}$ dan $y \in \{e_1\} \times G_2$ berlaku $x \circledast y = y \circledast x$.
   (e) $\forall z \in G_1 \times G_2$, z dapat ditulis secara tunggal sebagai $z = x \circledast y$ untuk suatu $x \in G_1 \times \{e_2\}$ dan $y \in \{e_1\} \times G_2$.
   (f) $G_1 \times G_2$ isomorfik ke $G_2 \times G_1$.
(3) Jika $(G, *)$ merupakan suatu grup *internal direct products* dari dua subgrup H_1 dan H_2 maka
   (a) Irisan dari H_1 dan H_2 yaitu elemen identitas e dari G.
   (b) $H_1 \times H_2$ isomorfik ke G.
   (c) H_1 dan H_2 adalah subgrup normal dari G.
   (d) G/H_1 isomorfik ke H_2 dan G/H_2 isomorfik ke H_1.
(4) Setiap *internal direct products* pada G isomorfik dengan *external direct products.*

Daftar Pustaka

[1] Bartle, R.G. dan D.R. Sherbert. 2000. *Introduce to Real Analysis* 3rd Edition. John Wiley and Sons, United States of America.

[2] Ehrlich, G. 1991. *Fundamental Concepts of Abstract Algebra*. PWS – KENT Publishing Company, United States of America.
[3] Fraleigh, J. B. dan K, Victor. 1994. *A First Course in Abstract Algebra*, Fifth Edition. Addison – Wesley Publishing Company, United States of America.
[4] Herstein, I. N. 1975. *Topics in Algebra,* Second Edition. John Wiley & Sons, New York.
[5] Khanna, V. K. dan Bhambri, S. K. 1993. *A Course in Abstract Algebra, Fifth Edition*. Vikas Publishing House PVT LTD, New Delhi.
[6] Raisinghania, M. D. dan Aggarwal, R. S. 1980. *Modern Algebra*. S. Chand & Company LTD, New Delhi.