Jurnal Matematika UNAND
Vol. **2** No. **3** Hal. 82 – 90
ISSN : 2303–291X
©Jurusan Matematika FMIPA UNAND

PELABELAN TOTAL AJAIB PADA GABUNGAN GRAF BINTANG DAN BEBERAPA GRAF SEGITIGA

RAFIKA DESSY
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
rafikadesch27@yahoo.com

Abstrak. Pelabelan total pada graf $G = (V, E)$ adalah pemetaan bijektif λ dari $V(G) \cup E(G)$ ke $\{1, 2, \cdots, |V(G)| + |E(G)|\}$. Pelabelan total dikatakan pelabelan total sisi-ajaib apabila untuk $\forall uv \in E(G)$ berlaku $\lambda(u) + \lambda(uv) + \lambda(v) = k$, untuk suatu bilangan bulat positif k. Sedangkan pelabelan total dikatakan pelabelan total titik-ajaib apabila untuk $\forall u \in V(G)$ berlaku $\lambda(u) + \Sigma\lambda(uv) = h$, untuk suatu bilangan bulat positif h. Dalam skripsi ini kita mencari pelabelan total ajaib pada gabungan graf bintang dan beberapa graf segitiga.

Kata Kunci: Pelabelan total sisi-ajaib, pelabelan total titik-ajaib, graf bintang, graf segitiga

1. Pendahuluan

Suatu pelabelan dari graf $G = (V, E)$ adalah suatu pemetaan bijektif dari elemen graf G ke himpunan bilangan bulat positif. Apabila daerah asal dari pemetaan hanya himpunan titik, maka pelabelan disebut **pelabelan titik**. Apabila daerah asalnya hanya himpunan sisi, maka pelabelan disebut **pelabelan sisi**. Apabila daerah asal merupakan gabungan dari himpunan titik dan sisi, maka pelabelan disebut **pelabelan total**.

Misal terdapat $G = (V, E)$ dengan $|V(G)| = p$ dan $|E(G)| = q$. Notasi $|V(G)|$ berarti banyaknya titik pada G, sementara $|E(G)|$ berarti banyaknya sisi pada G. Suatu pelabelan total sisi ajaib pada graf $G = (V, E)$ adalah pemetaan bijektif λ dari $V(G) \cup E(G)$ ke $\{1, 2, \cdots, p + q\}$ sedemikian hingga untuk setiap sisi uv di G berlaku $\lambda(u) + \lambda(uv) + \lambda(v) = k$, untuk suatu bilangan bulat positif k. Suatu pelabelan total titik ajaib pada graf G adalah pemetaan bijektif λ dari $V(G) \cup E(G)$ ke $\{1, 2, \cdots, p + q\}$ sedemikian sehingga untuk setiap titik u di G berlaku $\lambda(u) + \sum_{v \in N(u)} \lambda(uv) = h$, untuk suatu bilangan bulat positif h, dimana $N(u)$ adalah himpunan semua titik yang bertetangga dengan titik u. Pada tulisan ini akan dikaji kembali tentang apakah terdapat pelabelan total ajaib pada gabungan graf bintang dan beberapa graf segitiga.

2. Pelabelan Total Ajaib untuk Graf tK_3

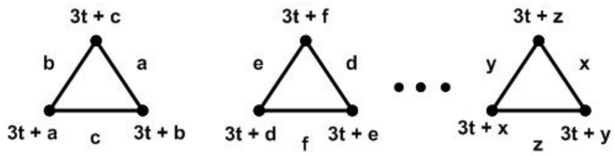
Untuk menentukan pelabelan total ajaib dari graf tK_3 akan digunakan lema berikut.

Lema 2.1. [4] *Himpunan bilangan bulat* $\{1, 2, \cdots, 3t\}$ *dapat dibagi menjadi* t *buah himpunan yang beranggotakan tiga elemen, dimana jumlah elemen masing-masing himpunan tersebut adalah* $\frac{3}{2}(3t+1)$ *jika dan hanya jika* t *ganjil.*

Bukti. Dapat dilihat bahwa jumlah dari semua anggota himpunan $\{1, 2, \cdots, 3t\}$ adalah $\frac{3}{2}(3t+1)$. Misalkan t ganjil. Untuk $i = 1, 2, \cdots, t$, misalkan $x_i = (3t + 2i - 1)/2$, di mana $t+1 \leq x_i \leq 2t$ dan misalkan $y_i = 3t - 2i + 2$, di mana $2t+1 \leq y_i \leq 3t$. Maka solusinya adalah $\{S_1, S_2, \cdots, S_t\}$, di mana $S_i = \{i, x_i, y_i\}$. □

Teorema 2.2. [4] *Terdapat pelabelan total ajaib pada graf* tK_3*, yaitu graf yang terdiri dari* t *buah graf segitiga, jika* t *adalah ganjil.*

Bukti. Terdapat t buah himpunan yang mana masing-masing himpunannya berisi tiga elemen seperti yang didefinisikan pada Lema 2.1. Untuk masing-masing segitiga, label sisi adalah elemen dari himpunan-himpunan tersebut. Jika sisi uv diberi label $\lambda(uv) = c$, maka titik yang berseberangan dengan sisi uv diberi label $3t + c$. Begitu juga dengan sisi-sisi lainnya, sehingga diperoleh bobot sisi pada masing-masing graf tK_3 adalah $6t + \frac{3}{2}(3t+1)$ dan bobot titik adalah $3t + \frac{3}{2}(3t+1)$. □



Gambar 2.1. Graf tK_3, dengan t ganjil

Untuk menentukan pelabelan yang merupakan pelabelan total ajaib pada tK_3, dengan t ganjil, digunakan beberapa lema berikut.

Lema 2.3. [3] *Untuk sebarang bilangan bulat positif* t *ganjil, maka graf* tK_3 *mempunyai pelabelan total ajaib dengan bobot titik* h *dan bobot sisi* k *sehingga* $k - h = d$ *untuk* $d = 1$ *atau* $d = 3$.

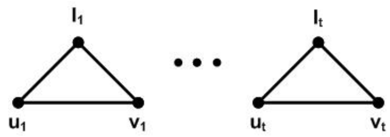
Bukti. Notasikan himpunan titik $V(tK_3)$ dan himpunan sisi $E(tK_3)$ untuk t ganjil sebagai berikut.

$$V(tK_3) = \{u_i | 1 \leq i \leq t\} \cup \{v_i | 1 \leq i \leq t\} \cup \{l_i | 1 \leq i \leq t\},$$
$$E(tK_3) = \{v_i l_i | 1 \leq i \leq t\} \cup \{u_i l_i | 1 \leq i \leq t\} \cup \{u_i v_i | 1 \leq i \leq t\}.$$

Pandang dua kasus berikut.

Kasus 1. $d = 1$.

Konstruksikan pelabelan terhadap titik dan sisi pada graf tK_3 dengan t ganjil,



Gambar 2.2. Graf tK_3, dengan t ganjil

$\lambda : V(tK_3) \cup E(tK_3) \to \{1, 2, \cdots, 6t\}$, sebagai berikut.

$$\lambda(v_i l_i) = a_i = 2i - 1,$$
$$\lambda(u_i l_i) = b_i = \begin{cases} 3t - i, \ i \text{ genap}, \\ 4t - i, \ i \text{ ganjil}. \end{cases}$$
$$\lambda(u_i v_i) = c_i = \begin{cases} 6t + 1 - i, \ i \text{ genap}, \\ 5t + 1 - i, \ i \text{ ganjil}, \end{cases}$$
$$\lambda(u_i) = x_i = a_i + 1,$$
$$\lambda(v_i) = y_i = b_i + 1 = \begin{cases} 3t - i + 1, \ i \text{ genap}, \\ 4t - i + 1, \ i \text{ ganjil}, \end{cases}$$
$$\lambda(l_i) = z_i = c_i + 1 = \begin{cases} 6t + 1 - i + 1, \ i \text{ genap}, \\ 5t + 1 - i + 1, \ i \text{ ganjil}. \end{cases}$$

Diperoleh bobot sisi untuk setiap sisinya adalah $k = 9t + 2$ dan bobot titik untuk setipa titiknya adalah $h = 9t + 1$.

Kasus 2. $d = 3$.
Konstruksikan pelabelan terhadap titik dan sisi pada graf tK_3, dengan t ganjil, $\lambda : V(tK_3) \cup E(tK_3) \to \{1, 2, \ldots, 6t\}$ sebagai berikut.

$$\lambda(v_i l_i) = a_i = 6i - 5,$$
$$\lambda(u_i l_i) = b_i = \begin{cases} 3t - 1 - 3i, \ i \text{ genap}, \\ 6t - 1 - 3i, \ i \text{ ganjil}. \end{cases}$$
$$\lambda(u_i v_i) = c_i = \begin{cases} 6t + 3 - 3i, \ i \text{ genap}, \\ 3t + 3 - 3i, \ i \text{ ganjil}, \end{cases}$$
$$\lambda(u_i) = x_i = a_i + 3,$$
$$\lambda(v_i) = y_i = b_i + 3 = \begin{cases} 3t - 1 - 3i + 3, \ i \text{ genap}, \\ 6t - 1 - 3i + 3, \ i \text{ ganjil}, \end{cases}$$
$$\lambda(l_i) = z_i = c_i + 3 = \begin{cases} 6t + 3 - 3i + 3, \ i \text{ genap}, \\ 3t + 3 - 3i + 3, \ i \text{ ganjil}. \end{cases}$$

Diperoleh bobot sisi untuk setiap sisinya adalah $k = 9t + 3$ dan bobot titik untuk setipa titiknya adalah $h = 9t$.

Berdasarkan dua kasus di atas diperoleh bahwa graf tK_3, dengan t ganjil mempunyai pelabelan total ajaib sehingga $k - h = d$ untuk $d = 1$ atau $d = 3$. $\square$

Pada Lema 2.4 berikut akan dibuktikan bahwa terdapat pelabelan total ajaib untuk s buah graf tK_3, dengan s dan t ganjil.

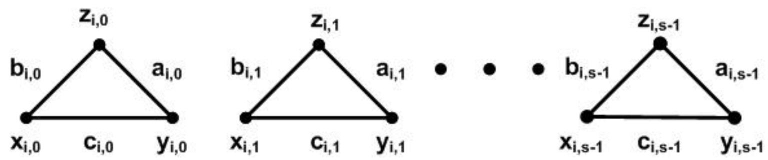
Lema 2.4. [3] *Misal s dan t adalah bilangan bulat positif ganjil dan misalkan terdapat pelabelan total ajaib untuk tK_3 dengan bobot titik h', bobot sisi k', dan $k' - h' = d'$. Maka terdapat pelabelan total ajaib pada stK_3 dengan bobot titik h, bobot sisi k, dan $d = k - h$ memenuhi $d = sd'$.*

Bukti. Misal terdapat pelabelan total ajaib untuk graf tK_3 dengan bobot titik h', bobot sisi k', dan $k' - h' = d'$. Maka terdapat suatu konstanta $r \in \mathbb{Z}^+$, di mana $r = a_i + b_i + c_i$, untuk $\forall i, i = 1, 2, \cdots, t$ yang diperoleh dari penjumlahan bobot titik untuk masing-masing titik dan bobot sisi untuk masing-masing sisi sehingga $k' = r + 2d'$ dan $h' = r + d'$.

Notasikan himpunan titik $V(stK_3)$ dan himpunan sisi $E(stK_3)$, dengan s ganjil dan t ganjil sebagai berikut.

$$\begin{aligned} V(stK_3) = &\{u_{i,j} | 1 \le i \le t, 0 \le j \le s-1\} \cup \{v_{i,j} | 1 \le i \le t, 0 \le j \le s-1\} \\ &\cup \{l_{i,j} | 1 \le i \le t, 0 \le j \le s-1\}, \\ E(stK_3) = &\{u_{i,j}v_{i,j} | 1 \le i \le t, 0 \le j \le s-1\} \cup \{v_{i,j}l_{i,j} | 1 \le i \le t, 0 \le j \le s-1\} \\ &\cup \{u_{i,j}l_{i,j} | 1 \le i \le t, 0 \le j \le s-1\}. \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa $|V(stK_3)| = 3st$ dan $|E(stK_3)| = 3st$.



Gambar 2.3. Graf stK_3, dengan s dan t ganjil

Konstruksikan pelabelan terhadap titik dan sisi pada graf stK_3, dengan s dan t ganjil, $\lambda : V(stK_3) \cup E(stK_3) \to \{1, 2, \cdots, 6st\}$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \lambda(v_{i,j}l_{i,j}) &= a_{i,j} = sa_i - j, \\ \lambda(u_{i,j}l_{i,j}) &= b_{i,j} = \begin{cases} sb_i - \frac{2s-j-2}{2}, & j \text{ genap}, \\ sb_i - \frac{s-j-2}{2}, & j \text{ ganjil}, \end{cases} \\ \lambda(u_{i,j}v_{i,j}) &= c_{i,j} = \begin{cases} sc_i - \frac{s-j-1}{2}, & j \text{ genap}, \\ sc_i - \frac{2s-j-1}{2}, & j \text{ ganjil}, \end{cases} \\ \lambda(u_{i,j}) &= x_{i,j} = a_{i,j} + sd' = sa_i - j + sd', \\ \lambda(v_{i,j}) &= y_{i,j} = b_{i,j} + sd' = \begin{cases} sb_i - \frac{2s-j-2}{2} + sd', & j \text{ genap}, \\ sb_i - \frac{s-j-2}{2} + sd', & j \text{ ganjil}, \end{cases}, \\ \lambda(l_{i,j}) &= z_{i,j} = c_{i,j} + sd' = \begin{cases} sc_i - \frac{s-j-1}{2} + sd', & j \text{ genap}, \\ sc_i - \frac{2s-j-1}{2} + sd', & j \text{ ganjil}, \end{cases} \end{aligned}$$

Diperoleh bahwa bobot sisi k untuk setiap sisi di stK_3 dan bobot titik h untuk setiap titiknya adalah

$$k = sr + 2sd' - \frac{3}{2}(s-1),$$
$$h = sr + sd' - \frac{3}{2}(s-1),$$

sehingga

$$k - h = (sr + 2sd' - \frac{3}{2}(s-1)) - (sr + sd' - \frac{3}{2}(s-1)) = sd' = d. \qquad \square$$

Berdasarkan kedua lema di atas dapat dibuktikan teorema berikut.

Teorema 2.5. [3] *Misalkan m adalah bilangan bulat positif ganjil untuk setiap $d \mid 3m$, maka terdapat pelabelan total ajaib dari mK_3 dengan bobot titik h dan bobot sisi k sehingga $k - h = d$.*

Bukti. Misalkan $q = \frac{3m}{d}$, dengan m ganjil dan d ganjil. Pandang dua kasus berikut.

Kasus 1. Misalkan $3 \mid q$.
Jika 3 membagi q, dinotasikan dengan $3 \mid q$, maka haruslah $d \mid m$. Dari Lema 2.3 telah diperoleh bahwa terdapat pelabelan total ajaib pada $\frac{m}{d}K_3$ untuk $\frac{m}{d}$ ganjil, dengan bobot titik h' dan bobot sisi k' sehingga $k' - h' = 1$. Karena d adalah bilangan ganjil, maka berdasarkan Lema 2.4, terdapat pelabelan total ajaib terhadap mK_3 dengan bobot titik h dan bobot sisi k sehingga $k - h = d$.

Kasus 2. Misalkan $3 \nmid q$.
Jika 3 tidak membagi q, dinotasikan dengan $3 \nmid q$, maka haruslah $3 \mid d$. Dari Lema 2.3 telah diperoleh bahwa terdapat pelabelan total ajaib $\frac{3m}{d}K_3$ dengan bobot titik h' dan bobot sisi k' sehingga $k' - h' = 3$. Karena q dan $\frac{d}{3}$ ganjil dan $m = \frac{d}{3}q$, maka berdasarkan Lema 2.4, terdapat pelabelan total ajaib dari mK_3 dengan bobot titik h dan bobot sisi k sehingga $k - h = d$.

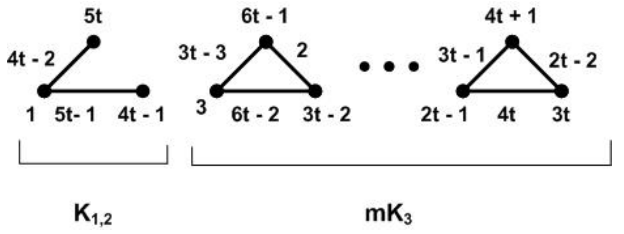
Dari Kasus 1 dan Kasus 2 terbukti bahwa graf mK_3 untuk m ganjil mempunyai pelabelan total ajaib. $\square$

2.1. *Pelabelan Total Ajaib untuk Graf $K_{1,2} \cup mK_3$*

Teorema 2.6. [3] *Graf $K_{1,2} \cup mK_3$ adalah graf total ajaib jika dan hanya jika m genap.*

Bukti. ($\Leftarrow$) Misalkan m genap, maka $m + 1$ adalah bilangan ganjil. Dari Teorema 2.5 telah diperoleh bukti bahwa terdapat pelabelan total ajaib dari $(m+1)K_3$. Cara melabeli graf tersebut diperoleh dari konstruksi yang terdapat pada Lema 3.3. Kemudian dilakukan proses *derivative*, yaitu proses penghapusan sisi yang mempunyai label 1, selanjutnya semua nilai label titik dan sisi pada pelabelan sebelumnya dikurangi dengan 1. Maka diperoleh bobot sisi $k = 9t - 1$ dan bobot titik $h = 9t - 2$.

($\Rightarrow$) Misalkan m ganjil dan $K_{1,2} \cup mK_3$ mempunyai pelabelan total ajaib. Dilakukan proses *derivative*, maka diperoleh bobot sisi k yaitu $9t - 1$ dan bobot titik h yaitu $9t - 2$. Jadi terdapat pelabelan total ajaib pada graf $K_{1,2} \cup mK_3$, dengan



Gambar 2.4. Graf total ajaib $K_{1,2} \cup mK_3$, dengan m genap

m genap. Ini kontradiksi dengan asumsi bahwa terdapat pelabelan total ajaib pada $K_{1,2} \cup mK_3$, dengan m ganjil. □

Misal λ adalah pelabelan total ajaib G dengan bobot titik h dan bobot sisi k sehingga $k - h = d$. Akan ditentukan apakah graf $K_{1,s} \cup mK_3$, untuk m genap adalah graf total ajaib.

Lema 2.7. [3] *Misal c adalah titik pusat dari graf bintang $K_{1,s}$ dan $b_1, b_2, \ldots, b_s$ adalah titik lain dari bintang. Maka $\lambda(c) = d$.*

Bukti. Untuk sisi b_1c berlaku $w(b_1c) = k = \lambda(c) + \lambda(b_1c) + \lambda(b_1)$, sementara untuk titik b_1 berlaku $w(b_1) = h = \lambda(b_1c) + \lambda(b_1)$. Karena $d = k - h$ maka $d = \lambda(c)$. □

Lema 2.8. [3] *Misal M adalah label maksimum untuk pelabelan total terhadap graf $K_{1,s} \cup mK_3$. Maka $M = 6m + 2s + 1$.*

Bukti. Banyaknya titik pada $K_{1,s} \cup mK_3$ adalah $s + 1 + 3m$, sementara banyaknya sisi adalah $s + 3m$. Karena M adalah label maksimum maka $M = |V| + |E| = 6m + 2s + 1$. □

Lema 2.9. [3] *Misalkan h adalah bobot titik dan M adalah label maksimum. Maka*

$$h = \frac{\frac{M(M+1)}{2} - d(m+1)}{2m + s}.$$

Bukti. Jumlah semua label $K_{1,s} \cup mK_3$ adalah $\frac{M(M+1)}{2}$. Karena jumlah label dari masing-masing K_3 adalah $h + k$ dan untuk masing-masing i, $\lambda(b_i) + \lambda(b_ic) = h$, maka jumlah label $mK_3 = m(h + k)$ dan jumlah label $K_{1,s} = s(\lambda(b_i) + \lambda(b_ic)) + \lambda(c) = sh + \lambda(c)$.

Jumlah semua label adalah

$$\begin{aligned}\frac{M(M+1)}{2} &= m(h+k)+\lambda(c)+sh\\ &= m(h+d+h)+\lambda(c)+sh\\ &= m(2h+d)+d+sh\\ &= 2mh+md+d+sh\\ &= (2m+s)h+d(m+1)\\ (2m+s)h &= \frac{M(M+1)}{2}-d(m+1)\\ h &= \frac{\frac{M(M+1)}{2}-d(m+1)}{2m+s}.\end{aligned}$$

□

Lema 2.10. [3] *Misal h adalah bobot titik dan $s \geq 1$ adalah jumlah sisi pada graf $K_{1,s}$. Misal M adalah label maksimum dan d adalah selisih dari bobot sisi dengan bobot titik. Maka*

$$h(s-1) \leq s(M-\frac{(s-1)}{2})-d.$$

Bukti. Untuk titik c berlaku :

$$\begin{aligned}h &= d+\Sigma\lambda(b_i c)\\ h-d &= \Sigma\lambda(b_i c).\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa M merupakan label terbesar, sehingga

$$\begin{aligned}\Sigma\ \lambda(b_i c) &\leq (M-0)+(M-1)+(M-2)+\cdots+(M-(s-1))\\ &= sM-s\frac{(s-1)}{2}.\end{aligned}$$

Dengan menggunakan sifat pelabelan titik ajaib, berlaku $\lambda(b_i c) = h-\lambda(b_i), \forall i = 1,2,\cdots,s$. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}h-d &\geq sh-s(M-\frac{(s-1)}{2})\\ sh-h &\leq s(M-\frac{(s-1)}{2})-d\\ h(s-1) &\leq s(M-\frac{(s-1)}{2})-d.\end{aligned}$$

□

Lema 2.11. [3] *Misalkan s adalah banyak sisi pada graf $K_{1,s}$ dan m adalah banyaknya graf K_3. Maka*

$$(s-3)(6m^2+3(s+1)m+s\frac{(s+2)}{2})+s-1+d \leq (s-3)md.$$

Bukti. Substitusikan h dari Lema 2.9 ke dalam pertaksamaan yang terdapat pada Lema 2.10.

$$\frac{M\frac{(M+1)}{2}-(m+1)d}{2m+s}(s-1) \leq s(M-\frac{(s-1)}{2})-d$$

Kemudian substitusikan M dari Lema 2.9 dan kalikan kedua ruas dengan $2m+s$.

$$\begin{aligned}
(s-1)((6m+2s+1)(3m+s+1)-(m+1)d) &\leq (2m+s)(s((6m+2s+1)-\frac{(s-1)}{2})-d)\\
(s-1)(18m^2+12ms+9m+2s^2+3s+1-md-d) &\leq (2m+s)(s(6m+\frac{3s}{2}+\frac{3}{2})-d)\\
&= (2m+s)(6ms+\frac{3s^2}{2}+\frac{3s}{2}-d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6m^2s+3ms^2-6ms+\frac{s^3}{2}-\frac{s^2}{2}-18m^2-9m-2s-1+d &\leq mds-3md\\
m^2(6s-18)+m(3s^2-6s-9)+s(\frac{s^2}{2}-\frac{s}{2}-2)+d-1 &\leq (s-3)md
\end{aligned}$$

Faktorkan $(s-3)$ dari pertaksamaan di atas.

$$\begin{aligned}
(s-3)md &\geq 6m^2(s-3)+3m(s+1)(s-3)+\frac{s^3}{2}-\frac{s^2}{2}-2s+d-1,\\
&= 6(s-3)m^2+3(s-3)(s+1)m+s(s-3)\frac{(s+2)}{2}+s-1+d,\\
&= (s-3)(6m^2+3(s+1)m+s\frac{(s+2)}{2})+s-1+d.
\end{aligned}$$

□

Lema 2.12. [3] *Misalkan s adalah banyak sisi pada graf $K_{1,s}$ dan m adalah banyaknya graf K_3. Maka*

$$(s-3)(6m^2+3(s+1)m) < (s-3)md.$$

Bukti. Berdasarkan Lema 2.11, diperoleh

$$\begin{aligned}
(s-3)md &\geq (s-3)(6m^2+3(s+1)m+s\frac{(s+2)}{2})+s-1+d,\\
&= (s-3)(6m^2+3(s+1)m)+(s-3)(s\frac{s+2}{2})+s-1+d.
\end{aligned}$$

Jika $s \geq 3$, maka haruslah

$$(s-3)(s\frac{(s+2)}{2})+s-1+d > 0.$$

Sehingga diperoleh bahwa

$$(s-3)(6m^2+3(s+1)m) < (s-3)md.$$ □

Lema 2.13. [3] *Misalkan s adalah banyak sisi pada graf $K_{1,s}$. Agar graf G total ajaib maka haruslah $s=2$.*

Bukti. Jika $s \geq 3$ dan $m=0$, maka dari Lema 2.12 diperoleh $0<0$. Dari Lema 2.12 diperoleh bahwa $6m+3(s+1)<d$. Jika $s>3$ dan $m>0$, maka Lema 2.8 dan Lema 2.12 menyatakan $M=6m+2s+1<6m+3s+3<d$. Tapi, pada Lema 2.7 menyatakan $M \geq d$. Jika $s=1$, maka $\lambda(b_1)=d=\lambda(c)$. Jadi $K_{1,s}\cup mK_3$ bukan graf total ajaib. Agar $G \cong K_{1,s}\cup mK_3$ graf total ajaib maka haruslah $s=2$. □

Berdasarkan Lema 2.7 – Lema 2.13 dapat dibuktikan Teorema 2.14 berikut.

Teorema 2.14. [3] *Untuk sebarang* $m \geq 0$ *dengan* m *genap dan* $s \geq 1$*, graf* $G \cong K_{1,s} \cup mK_3$ *adalah graf total ajaib apabila* $s = 2$.

3. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Lyra Yulianti, Bapak Budi Rudianto, M.Si, Ibu Izzati Rahmi HG, M.Si, Ibu Hamira Yozza, M.Si dan Bapak Syafruddin, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Baskoro, E. T. 2007. *Mengenalkan Indonesia Melalui Teori Graf.* Balai Pertemuan Ilmiah ITB, Bandung
[2] Bondy, J. A. dan Murty, U. S. R. 1976. *Graph Theory with Applications.* London: The Macmillan Press Ltd
[3] Calhoun, B, dkk. 2005. *Totally Magic Labelings Graphs.* Australasian Journal of Combinatorics, 47 – 59
[4] Exoo, G, dkk. 2002. *Totally Magic Graphs.* Discrete Math **254** : 103 – 113
[5] Ngurah. A.A.G. 2007. *Ketotalsisiajaiban Graf dan Defisiensinya. Disertasi-S3*, tidak diterbitkan
[6] Rosen, K. A. 2003. *Discrete Mathematics and Its Application.* Boston: McGrawHill
[7] W. D. Wallis. 2007. *A Beginner's Guide to Graph Theory.* Birkhauser. Boston
[8] W. D. Wallis. 2001. *Magic graphs.* Birkhauser. Boston