INTERPOLASI SPLIN KUBIK PERIODIK

WIRA AMLIZA, MAHDHIVAN SYAFWAN*, SUSILA BAHRI

*Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : wiraamliza017@gmail.com, mahdhivan@sci.unand.ac.id, susilabahri@sci.unand.ac.id*

Diterima 15 Desember 2020 Direvisi 29 Desember 2020 Dipublikasikan 12 Januari 2021

Abstrak. Tulisan ini membahas tentang penurunan interpolasi splin kubik untuk kasus syarat batas periodik dengan lebar selang sebarang. Interpolasi jenis ini digunakan untuk menghampiri data yang memiliki sifat periodik dengan siklus tunggal. Dari hasil simulasi, diperoleh hasil interpolasi yang sangat baik dalam menghampiri data periodik.

Kata Kunci: Interpolasi splin kubik, batas periodik

1. Pendahuluan

Penentuan nilai taksiran di antara titik-titik data yang diketahui dinamakan masalah pencocokan kurva (*curve fitting*). Salah satu pendekatan alternatif yang digunakan untuk menyelesaikan masalah pencocokan kurva adalah dengan menerapkan polinomial orde rendah terhadap subkumpulan titik data. Polinomial ini disebut dengan *fungsi splin*.

Interpolasi splin terdiri dari splin linier, splin kuadratik, dan splin kubik. Splin kubik sering digunakan karena memberikan aproksimasi yang lebih tepat. Meskipun turunan ketiga atau lebih tinggi bisa saja diskontinu, namun hal tersebut biasanya tidak dapat dideteksi secara visual sehingga dapat diabaikan [4].

Tujuan interpolasi splin kubik adalah menurunkan suatu polinomial orde tiga di setiap interval titik data (x_i, x_{i+1}) , yaitu

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i, i = 1, 2, \dots, n,$$

dimana a_i, b_i, c_i dan d_i merupakan koefisien-koefisien yang nilainya akan dicari. Splin kubik terdiri dari beberapa jenis yang dicirikan berdasarkan syarat batasnya, seperti splin kubik alami, splin kubik berujung parabolik, splin kubik berujung pangkat tiga, splin kubik periodik, dan splin kubik terapan. Splin kubik alami dan berujung parabolik untuk lebar selang seragam ($h = x_{i+1} - x_i$) telah dijelaskan dalam [1]. Splin kubik alami dan berujung parabolik tersebut kemudian dibahas

*penulis korespondensi

secara umum untuk lebar selang sebarang ($h_i = x_{i+1} - x_i$) dalam [2,5]. Dalam makalah ini akan dibahas secara khusus splin kubik periodik untuk lebar selang sebarang.

2. Interpolasi Splin Kubik

Diberikan n titik data di bidang- xy ,

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

yang nilai-nilainya diketahui. Titik-titik data ini diinterpolasi dengan menggunakan metode *splin kubik*, yaitu dengan membangun fungsi

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x), & x_1 \leq x \leq x_2 \\ S_2(x), & x_2 \leq x \leq x_3 \\ \vdots \\ S_{n-1}(x), & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases} \quad (2.1)$$

dimana $S_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, adalah polinomial kubik yang didefinisikan oleh

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i, x_i \leq x \leq x_{i+1} \quad (2.2)$$

dengan a_i , b_i , c_i , dan d_i adalah koefisien yang nilai-nilainya akan dicari.

Teorema berikut memberikan nilai-nilai dari koefisien a_i , b_i , c_i dan d_i yang merupakan perumuman dari Teorema Interpolasi Splin Kubik dengan $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Teorema 2.1. [1] (*Interpolasi Splin Kubik*) Diberikan n titik data $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ dengan $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, *Splin kubik*

$$S(x) = \begin{cases} a_1(x - x_1)^3 + b_1(x - x_1)^2 + c_1(x - x_1) + d_1, & x_1 \leq x \leq x_2 \\ a_2(x - x_2)^3 + b_2(x - x_2)^2 + c_2(x - x_2) + d_2, & x_2 \leq x \leq x_3 \\ \vdots \\ a_{n-1}(x - x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + c_{n-1}(x - x_{n-1}) + d_{n-1}, & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

yang menginterpolasi titik-titik tersebut, mempunyai koefisien-koefisien yang dinyatakan dengan

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{M_{i+1} - M_i}{6h_i} \\ b_i &= \frac{M_i}{2} \\ c_i &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \left[\frac{M_{i+1} + 2M_i}{6} \right] h_i \\ d_i &= y_i \end{aligned} \quad (2.3)$$

untuk $i = 1, 2, \dots, n-1$, di mana $M_i = S''(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$

Bukti. Persamaan (2.2) dapat ditulis dalam persamaan (2.1) sebagai berikut:

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) &= a_1(x - x_1)^3 + b_1(x - x_1)^2 + c_1(x - x_1) + d_1, \\ &x_1 \leq x \leq x_2 \\ S_2(x) &= a_2(x - x_2)^3 + b_2(x - x_2)^2 + c_2(x - x_2) + d_2, \\ &x_2 \leq x \leq x_3 \\ \vdots \\ S_{n-1}(x) &= a_{n-1}(x - x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + c_{n-1}(x - x_{n-1}) \\ &\quad + d_{n-1}, \\ &x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases} \quad (2.4)$$

Turunan pertama dari $S(x)$ adalah

$$S'(x) = \begin{cases} S'_1(x) = 3a_1(x-x_1)^2 + 2b_1(x-x_1) + c_1, \\ \quad x_1 \leq x \leq x_2 \\ S'_2(x) = 3a_2(x-x_2)^2 + 2b_2(x-x_2) + c_2, \\ \quad x_2 \leq x \leq x_3 \\ \vdots \\ S'_{n-1}(x) = 3a_{n-1}(x-x_{n-1})^2 + 2b_{n-1}(x-x_{n-1}) + c_{n-1}, \\ \quad x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases} \quad (2.5)$$

dan turunan kedua dari $S(x)$ adalah

$$S''(x) = \begin{cases} S''_1(x) = 6a_1(x-x_1) + 2b_1, \\ \quad x_1 \leq x \leq x_2 \\ S''_2(x) = 6a_2(x-x_2) + 2b_2, \\ \quad x_2 \leq x \leq x_3 \\ \vdots \\ S''_{n-1}(x) = 6a_{n-1}(x-x_{n-1}) + 2b_{n-1}, \\ \quad x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases} \quad (2.6)$$

Selanjutnya persamaan (2.4), (2.5), (2.6) memenuhi keempat sifat berikut:

- (1) $S(x)$ melalui seluruh titik-titik data yang diketahui,
- (2) $S(x)$ kontinu pada interval $[x_1, x_n]$,
- (3) $S'(x)$ kontinu pada interval $[x_1, x_n]$,
- (4) $S''(x)$ kontinu pada interval $[x_1, x_n]$.

Keempat sifat splin di atas akan digunakan untuk menentukan koefisien a_i, b_i, c_i dan d_i , $i = 1, 2, \dots, n-1$.

- (1) $S(x)$ melalui seluruh titik-titik data yang diketahui Karena $S(x)$ melalui seluruh titik data (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, maka berlaku

$$S(x_1) = y_1, S(x_2) = y_2, \dots, S(x_n) = y_n. \quad (2.7)$$

Karena $x_i \in [x_i, x_{i+1}]$ dari persamaan (2.1) dan (2.2) didapatkan $S(x_i) = S_i(x_i) = d_i$ dengan menggunakan $n-1$ persamaan pertama pada persamaan (2.7), diperoleh

$$d_i = y_i, i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.8)$$

Selanjutnya, dengan menggunakan persamaan terakhir pada persamaan (2.1) dan persamaan (2.2) untuk $x = x_n$, dapat ditulis

$$S(x_n) = S_{n-1}(x_n) = a_{n-1}(x_n - x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x_n - x_{n-1})^2 + c_{n-1}(x_n - x_{n-1}) + d_{n-1}. \quad (2.9)$$

Dengan menggunakan persamaan terakhir pada persamaan (2.7), maka persamaan (2.9) dapat ditulis

$$a_{n-1}h_{n-1}^3 + b_{n-1}h_{n-1}^2 + c_{n-1}h_{n-1} + d_{n-1} = y_n, \quad (2.10)$$

dengan $h_{n-1} = x_n - x_{n-1}$.

- (2) $S(x)$ kontinu pada interval $[x_1, x_n]$ Karena $S(x)$ kontinu pada $x_1 \leq x \leq x_n$, maka untuk setiap titik x_i pada $x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$, berlaku

$$S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, n-2. \quad (2.11)$$

Dengan menggunakan $S_i(x_i) = y_i$ dan persamaan (2.11) diperoleh

$$S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1. \quad (2.12)$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (2.4), maka persamaan (2.12) menjadi

$$\begin{aligned} a_1 h_1^3 + b_1 h_1^2 + c_1 h_1 + d_1 &= y_2, \\ &\vdots \\ a_{n-2} h_{n-2}^3 + b_{n-2} h_{n-2}^2 + c_{n-2} h_{n-2} + d_{n-2} &= y_{n-1}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

dengan $h_i = x_{i+1} - x_i, i = 1, 2, \dots, n-2$. Dari persamaan (2.10) dan (2.13) dapat dibuat hubungan berikut:

$$a_i h_i^3 + b_i h_i^2 + c_i h_i + d_i = y_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.14)$$

- (3) $S'(x)$ kontinu pada interval $[x_1, x_n]$ Karena $S'(x)$ kontinu pada $x_1 \leq x \leq x_n$, maka untuk tiap titik-titik interior pada $x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$, berlaku

$$S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, n-2. \quad (2.15)$$

Dari persamaan (2.5), diketahui bahwa

$$S'_i(x_i) = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.16)$$

Substitusikan persamaan (2.5) ke ruas kiri persamaan (2.15) dan substitusikan persamaan (2.16) ke ruas kanan persamaan (2.15), maka diperoleh

$$3a_i h_i^2 + 2b_i h_i + c_i = c_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2. \quad (2.17)$$

dimana $h_{n-1} = x_n - x_{n-1}$.

- (4) $S''(x)$ kontinu pada interval $[x_1, x_n]$ Karena $S''(x)$ kontinu untuk $x_1 \leq x \leq x_n$, maka untuk tiap titik-titik interior pada $x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$, berlaku

$$S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, n-2. \quad (2.18)$$

Dari persamaan (2.6), diketahui bahwa

$$S''_i(x_i) = 2b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.19)$$

Substitusikan persamaan (2.6) ke ruas kiri persamaan (2.18) dan (2.19) ke ruas kanan persamaan (2.18), diperoleh

$$6a_i h_i + 2b_i = 2b_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2 \quad (2.20)$$

dimana $h_i = x_{i+1} - x_i$.

Persamaan-persamaan (2.8), (2.14), (2.17) dan (2.20) membentuk sebuah sistem dengan $4n - 6$ persamaan linier. Sementara itu persamaan (2.14) memberikan $4n - 4$ koefisien-koefisien yang tak diketahui untuk a_i, b_i, c_i dan $d_i, i = 1, 2, \dots, n-1$. Akibatnya, diperlukan dua persamaan tambahan untuk menentukan koefisien-koefisien tersebut. Untuk mempermudah penulisan, misalkan

$$M_i = S''(x_i), i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.21)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.19) ke persamaan (2.21), diperoleh

$$M_i = 2b_i, i = 1, 2, \dots, n-1$$

atau

$$b_i = \frac{M_i}{2}, i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.22)$$

Substitusikan nilai b_i pada persamaan (2.22) ke persamaan (2.20), dan sebelumnya telah diketahui bahwa pada persamaan (2.18) dan (2.19) maka $2b_{i+1} = S_i''(x_{i+1})$, sehingga

$$6a_i h_i + M_i = S_i''(x_{i+1}).$$

Karena $S_i''(x_{i+1}) = S''(x_{i+1})$ dan persamaan (2.21), maka

$$a_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{6h_i}, i = 1, 2, \dots, n-2. \quad (2.23)$$

dengan menggunakan persamaan terakhir pada persamaan (2.6) untuk $x = x_n$ dan substitusikan nilai b_i dengan $i = n-1$ pada persamaan (2.22) ke persamaan di atas dan $h_{n-1} = x_n - x_{n-1}$ serta $S''(x_n) = M_n$, maka

$$a_{n-1} = \frac{M_n - M_{n-1}}{6h_{n-2}}. \quad (2.24)$$

Dari persamaan (2.23) dan (2.24) dapat ditulis kembali

$$a_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{6h_i}, i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.25)$$

Dari persamaan (2.23) dan (2.24) dapat ditulis kembali

$$a_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{6h_i}, i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.26)$$

Terakhir, dengan mensubstitusikan nilai a, b dan d masing-masing pada persamaan (2.26), (2.22) dan (2.8) ke persamaan (2.14), diperoleh

$$c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \left[\frac{M_{i+1} + 2M_i}{6} \right] h_i, i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.27)$$

Perhatikan bahwa nilai-nilai koefisien a_i, b_i dan c_i bergantung pada nilai $M_i, i = 1, 2, \dots, n$ yang belum diketahui. Nilai-nilai M_i tersebut dapat dicari dengan mensubstitusikan koefisien a_i, b_i dan c_i pada persamaan (2.17), sehingga diperoleh

$$6 \left[\frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} \right] = h_i M_i + 2(h_i + h_{i+1}) M_{i+1} + h_{i+1} M_{i+2} \quad (2.28)$$

dengan $i = 1, 2, \dots, n-2$.

Persamaan (2.28) dapat ditulis kembali dalam bentuk matriks,

$$H\mathbf{m} = 6\mathbf{k}, \quad (2.29)$$

dimana

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix}, \mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \\ \frac{y_4 - y_3}{h_3} - \frac{y_3 - y_2}{h_2} \\ \vdots \\ \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_2} - \frac{y_{n-2} - y_{n-3}}{h_{n-3}} \\ \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \end{bmatrix}.$$

3. Splin Periodik

Splin periodik digunakan untuk menginterpolasi titik-titik $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ yang diasumsikan berada pada siklus tunggal dari kurva periodik (satu periode) dengan periode $x_n - x_1$. Dengan demikian splin periodik memenuhi syarat batas berikut :

$$S(x_1) = S(x_n), \quad (3.1)$$

$$S'(x_1) = S'(x_n), \quad (3.2)$$

$$S''(x_1) = S''(x_n). \quad (3.3)$$

Berdasarkan persamaan (2.7) dan syarat batas (3.1), diperoleh

$$y_1 = y_n. \quad (3.4)$$

Karena telah dimisalkan $S''_i(x) = M_i$ maka syarat batas (3.3) dapat ditulis ulang menjadi

$$M_1 = M_n. \quad (3.5)$$

Selanjutnya berdasarkan persamaan (2.16) dan syarat batas (3.2), diperoleh

$$S'(x_1) = c_1. \quad (3.6)$$

Dari persamaan (2.17) dihasilkan $S'_{i+1}(x_{i+1}) = c_{i+1}$, sehingga dengan persamaan (2.5) untuk $x = x_n$ dan syarat batas (3.2), diperoleh

$$S'(x_n) = S'_{n-1}(x_n) = 3a_{n-1}h_{n-1}^2 + 2b_{n-1}h_{n-1} + c_{n-1}, \quad (3.7)$$

dengan $h_{n-1} = x_n - x_{n-1}$. Substitusikan persamaan (3.6) dan (3.7) ke syarat batas (3.2) serta gunakan nilai koefisien pada persamaan (2.3), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} &= \frac{h_1 M_2}{6} + \frac{2h_1 M_1}{6} - \frac{h_{n-1} M_n}{6} \\ &\quad - \frac{2h_{n-1} M_{n-1}}{6} + \frac{6h_{n-1} M_{n-1}}{6} \\ &\quad + \frac{3h_{n-1} M_n}{6} - \frac{3h_{n-1} M_{n-1}}{6}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Substitusikan persamaan (3.4) dan (3.5) ke persamaan (3.8), diperoleh

$$6 \left[\frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_{n-1}}{h_{n-1}} \right] = 2(h_1 + h_{n-1})M_1 + h_1M_2 + h_{n-1}M_{n-1}. \quad (3.9)$$

Perhatikan persamaan (2.17) untuk $i = n - 2$ dan menggunakan koefisien pada persamaan (2.3), maka

$$\begin{aligned} \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} &= \frac{h_{n-1}M_n}{6} + \frac{2h_{n-1}M_{n-1}}{6} - \frac{h_{n-2}M_{n-1}}{6} \\ &\quad - \frac{2h_{n-2}M_{n-2}}{6} + \frac{6h_{n-2}M_{n-2}}{6} \\ &\quad + \frac{3h_{n-2}M_{n-1}}{6} - \frac{3h_{n-2}M_{n-2}}{6}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Substitusikan persamaan (3.4) dan (3.5) ke persamaan (3.10), sehingga

$$6 \left[\frac{y_1 - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \right] = h_{n-1}M_1 + h_{n-2}M_{n-2} + 2(h_{n-1} + h_{n-2})M_{n-1}. \quad (3.11)$$

Dengan menambahkan persamaan (3.5), (3.9), dan (3.11) ke persamaan (2.28), dapat ditulis dalam bentuk matriks berikut:

$$H_2 \mathbf{m} = 6\mathbf{k}, \quad (3.12)$$

dimana

$$H_2 = \begin{bmatrix} 2(h_1 + h_{n-1}) & h_1 & 0 & \cdots & 0 & h_{n-1} \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} \\ h_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix}, \mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_{n-1}}{h_{n-1}} \\ \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \\ \vdots \\ \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} - \frac{y_{n-2} - y_{n-3}}{h_{n-3}} \\ \frac{y_1 - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \end{bmatrix}.$$

4. Contoh Kasus

Diberikan titik-titik data pada Tabel 1 yang dibangkitkan dari fungsi $f(x) = \sin(x)$ pada $[0, 2\pi]$. Titik-titik data tersebut akan diinterpolasi dengan fungsi splin periodik sehingga menghasilkan kurva yang mulus.

Dari Tabel 1, maka banyak titik data yang akan diinterpolasi adalah $n = 5$. Selanjutnya substitusikan nilai-nilai pada Tabel 1 ke persamaan (3.12) diperoleh

Tabel 1. Titik-Titik Data Fungsi Periodik

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	1	$\frac{1}{2}$	-1	0
h	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	

sistem persamaan berikut:

$$\begin{bmatrix} 2\pi & \frac{\pi}{2} & 0 & \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \frac{5\pi}{3} & \frac{\pi}{3} & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{3} & 2\pi & \frac{2\pi}{3} \\ \frac{\pi}{2} & 0 & \frac{2\pi}{3} & \frac{7\pi}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 0 \\ -21 \\ \frac{\pi}{9} \\ \frac{2\pi}{51} \\ 2\pi \end{bmatrix}$$

Akan dicari nilai M_1, M_2, M_3 dan M_4 dengan menggunakan operasi invers pada aplikasi MATLAB, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0131 \\ -1.1841 \\ -0.4428 \\ 1.2366 \end{bmatrix}$$

Karena syarat batas splin periodik, sehingga $M_1 = M_5 = -0.0131$.

Selanjutnya akan dicari nilai-nilai koefisien a_i, b_i, c_i dan d_i , sehingga

- (1) $a_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{6h_i}$, maka
 $a_1 = -0.1242, a_2 = 0.118, a_3 = 0.1336$, dan $a_4 = -0.1326$.
- (2) $b_i = \frac{M_i}{2}$, maka
 $b_1 = -0.0066, b_2 = -0.592, b_3 = -0.2214$, dan $b_4 = 0.6183$.
- (3) $c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \left[\frac{M_{i+1} + 2M_i}{6} \right] h_i$, maka
 $c_1 = 0.9535, c_2 = 0.0131, c_3 = -0.8387$, dan $c_4 = -0.0074$.
- (4) $d_i = y_i$, maka
 $d_1 = 0, d_2 = 1, d_3 = \frac{1}{2}$, dan $d_4 = -1$.

Koefisien yang telah diperoleh, disubstitusikan ke persamaan (2.1), sehingga

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = -0.1242(x-0)^3 - 0.0066(x-0)^2 + 0.9535(x-0), & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ S_2(x) = 0.118(x-\frac{\pi}{2})^3 - 0.592(x-\frac{\pi}{2})^2 + 0.0131(x-\frac{\pi}{2}) + 1, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{6} \\ S_3(x) = 0.1336(x-\frac{5\pi}{6})^3 - 0.2214(x-\frac{5\pi}{6})^2 - 0.8387(x-\frac{5\pi}{6}) + \frac{1}{2}, & \frac{5\pi}{6} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \\ S_4(x) = -0.1326(x-\frac{3\pi}{2})^3 + 0.6183(x-\frac{3\pi}{2})^2 - 0.0074(x-\frac{3\pi}{2}) - 1, & \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

Dengan menggunakan aplikasi Matlab, kurva spline kubik periodik dan kurva fungsi sinus diplot dalam satu gambar, maka akan terlihat seperti pada Gambar 1. Dari gambar dapat dilihat bahwa kurva spline kubik dapat mengaproksimasi kurva fungsi sinus dengan cukup baik.

Gambar 1. Kurva Spline Kubik Periodik dan Kurva Sinus Digabungkan

5. Kesimpulan

Dari penelitian yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa :

(1) Fungsi spline kubik $S(x)$

$$S(x) = \begin{cases} a_1(x-x_1)^3 + b_1(x-x_1)^2 + c_1(x-x_1) + d_1, & x_1 \leq x \leq x_2 \\ a_2(x-x_2)^3 + b_2(x-x_2)^2 + c_2(x-x_2) + d_2, & x_2 \leq x \leq x_3 \\ \vdots \\ a_{n-1}(x-x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x-x_{n-1})^2 + c_{n-1}(x-x_{n-1}) + d_{n-1}, & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

memenuhi sifat-sifat berikut :

- (a) $S(x)$ melalui seluruh titik-titik data yang diketahui,
- (b) $S(x)$ kontinu pada interval $[x_1, x_n]$,
- (c) $S'(x)$ kontinu pada interval $[x_1, x_n]$,
- (d) $S''(x)$ kontinu pada interval $[x_1, x_n]$.

Dari keempat sifat-sifat di atas dapat diperoleh nilai-nilai koefisien a_i, b_i, c_i dan d_i .

- (2) Splin kubik periodik memiliki tiga syarat batas, yaitu:

- (a) $S(x_1) = S(x_n)$,
- (b) $S'(x_1) = S'(x_n)$,
- (c) $S''(x_1) = S''(x_n)$.

Dari ketiga syarat batas tersebut diperoleh :

- (a) $y_1 = y_n$,
- (b) $M_1 = M_2$,
- (c) $6 \left[\frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_{n-1}}{h_{n-1}} \right] = 2(h_1 + h_{n-1})M_1 + h_1M_2 + h_{n-1}M_{n-1}$,

dimana $M_i = S''_i(x), i = 1, 2, \dots, n$.

- (3) Penambahan syarat batas splin periodik di atas menghasilkan sistem persamaan matriks berukuran $(n-1) \times (n-1)$.
- (4) Penggunaan interpolasi splin kubik periodik cukup baik dalam menghampiri data yang memiliki sifat periodik dengan siklus tunggal.

6. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada ibu Lyra Yulianti, ibu Riri Lestari dan ibu Yanita yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Anton, H. and C. Rorres. 20013. *Elementary Linear Algebra*, Applications Version. Edisi ke-11. Wiley. New York.
- [2] Syafwan, E. 2011. *Aplikasi Matriks Tridiagonal Pada Interpolasi Splin Kubik. Skripsi S-1*. Universitas Andalas.
- [3] Purcell, E.J. dan D. Varberg. 1999. *Kalkulus dan Geometri Analitis* Edisi ke-5 jilid 1. Alih Bahasa : I Nyoman Susila, Bana Kartasasmita, Rawuh. Erlangga. Jakarta.
- [4] Schied, F. 1992. *Analisis Numerik*. Alih Bahasa : Pantur Silaban. Erlangga. Jakarta.
- [5] Mathews, John H., K.D. Fink. 1992. *Numerical Methods for Computer Science. Engineering, and Mathematics*. Edisi ke-2. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.