PENYELESAIAN MASALAH NILAI BATAS UNTUK PERSAMAAN DIFERENSIAL FRAKSIONAL LINIER ORDE 2α DENGAN TURUNAN TIPE CAPUTO

RATNA HAYANI TSANI*, MAHDHIVAN SYAFWAN

*Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : ratnahasyani@gmail.com, mahdhivan@sci.unand.ac.id*

Diterima 15 Desember 2020 Direvisi 29 Desember 2020 Dipublikasikan 12 Januari 2021

Abstrak. Dalam penelitian ini diselesaikan masalah nilai batas untuk persamaan diferensial fraksional linier orde 2α dengan turunan tipe Caputo. Teorema-teorema utama menyajikan bentuk umum dan bentuk khusus solusi dari persamaan diferensial serta beberapa contoh yang mengilustrasikan teorema utama yang dipaparkan.

Kata Kunci: Masalah nilai batas, persamaan diferensial fraksional linier orde 2α , turunan tipe Caputo

1. Pendahuluan

Persamaan diferensial fraksional adalah suatu persamaan yang memuat satu atau beberapa fungsi tak diketahui beserta turunan-turunan fraksional terhadap satu atau beberapa variabel bebas. Persamaan diferensial fraksional pertama kali diperkenalkan oleh L'Hôpital pada tahun 1695. Bentuk umum persamaan dari diferensial fraksional linier orde $n\alpha$ dengan $\alpha \in (m-1, m)$, $m, n \in \mathbb{N}$, diberikan oleh persamaan berikut [7]:

$$D^{n\alpha}x(t) + a_1D^{(n-1)\alpha}x(t) + a_2D^{(n-2)\alpha}x(t) + \cdots + a_nx(t) = f(t), \quad (1.1)$$

dimana $D^{n\alpha}$ menyatakan turunan fraksional orde $n\alpha$ dan a_j , $j = 1, 2, 3, \dots, n$ adalah konstanta.

Beberapa peneliti sebelumnya telah menggunakan operator turunan Caputo dalam penelitiannya, salah satunya oleh 'Aisy dan Husna dalam literatur [1], yaitu solusi sistem persamaan diferensial fraksional linier orde fraksional dengan turunan tipe Caputo serta oleh Sari dan Baqi dalam literatur [5], yaitu penggunaan metode Mittag-Leffler untuk menyelesaikan persamaan diferensial fraksional linier dengan koefisien konstan, dimana juga menggunakan operator turunan tipe Caputo. Dalam

*penulis korespondensi

artikel ini kembali akan digunakan turunan tipe Caputo dalam menyelesaikan persamaan diferensial fraksional linier orde 2α berikut.

$$D^{2\alpha}x(t) + a_0 D^\alpha x(t) + b_0 x(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad t_0 > 0, \quad (1.2)$$

dengan syarat batas

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad (1.3)$$

yang dalam hal ini a_0, b_0 merupakan konstanta dan D^α adalah turunan fraksional tipe Caputo orde α . Persamaan (1.2) bersama syarat batas (1.3) disebut sebagai masalah nilai batas untuk persamaan diferensial fraksional orde 2α . Pada artikel ini akan dibahas formulasi eksplisit solusi persamaan (1.2) dengan syarat batas (1.3) yang merujuk pada literatur [9] yang mana membahas tentang solusi sistem persamaan diferensial. Adapun tujuan penulisan artikel ini adalah untuk mengetahui secara eksplisit solusi dari persamaan (1.2) dengan syarat batas (1.3) dimana nilai α berada pada selang $m - 1 < \alpha < m, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{N}$.

2. Landasan Teori

Dalam bab ini akan dijabarkan beberapa teori terkait dengan permasalahan yang akan dibahas pada bab selanjutnya, yaitu fungsi Gamma, fungsi Beta, fungsi Mittag-Leffler, dan turunan fraksional tipe Caputo.

Definisi 2.1. [11] *Fungsi Gamma dinyatakan sebagai $\Gamma(n)$, didefinisikan sebagai berikut:*

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx, \quad n > 0.$$

Definisi 2.2. [8] *Fungsi Beta didefinisikan sebagai berikut:*

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad x \in \mathbb{R}, \quad p, q \in \mathbb{C},$$

dimana $p > 0$ dan $q > 0$.

Definisi 2.3. [8] *Fungsi Mittag-Leffler satu parameter didefinisikan sebagai berikut:*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.1)$$

Fungsi Mittag-Leffler dua parameter didefinisikan sebagai berikut:

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.2)$$

Berikut ini diberikan definisi turunan fraksional tipe Caputo.

Definisi 2.4. [10] Turunan fraksional Caputo orde $\alpha \in \mathbb{R}$ dari fungsi $f(t)$ dengan $m - 1 < \alpha < m$, $m \in \mathbb{N}$, dinotasikan dengan $D^\alpha f(t)$, didefinisikan sebagai berikut:

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha+1-m}}, \quad m - 1 < \alpha < m, \quad m \in \mathbb{N} \quad (2.3)$$

dimana $f^{(m)}(\tau)$ adalah turunan ke- m dari fungsi $f(\tau)$ dan $\Gamma(m - \alpha)$ menyatakan fungsi gamma dari $(m - \alpha)$.

Teorema 2.5. [4] Turunan fraksional Caputo untuk fungsi $f(t) = t^p$ adalah

$$D^\alpha t^p = \begin{cases} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha}, & m - 1 < \alpha < m, \quad p > m - 1 \\ 0, & m - 1 < \alpha < m, \quad p \leq m - 1, \quad p \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Berikut turunan fraksional Caputo ke- α dan ke- 2α dari fungsi Mittag-Leffler $E_\alpha(\lambda t^\alpha)$ [2]. Dengan menggunakan Definisi 2.3, diperoleh

$$D^\alpha E_\alpha(\lambda t^\alpha) = \lambda E_\alpha(\lambda t^\alpha), \quad (2.5)$$

$$D^{2\alpha} E_\alpha(\lambda t^\alpha) = \lambda^2 E_\alpha(\lambda t^\alpha). \quad (2.6)$$

3. Formulasi Solusi

Perhatikan kembali persamaan (1.2). Suatu fungsi $x(t)$ dikatakan solusi bagi persamaan (1.2) jika $x(t)$ memenuhi persamaan (1.2) tersebut. Untuk mendapatkan solusi persamaan (1.2) tersebut, misalkan

$$x(t) = E_\alpha(\lambda t^\alpha), \quad (3.1)$$

yang dalam hal ini $E_\alpha(\lambda t^\alpha)$ adalah fungsi Mittag-Leffler satu parameter dengan parameter λ . Substitusikan, persamaan (3.1) ke persamaan (1.2), diperoleh:

$$\begin{aligned} D^{2\alpha}(E_\alpha(\lambda t^\alpha)) + a_0 D^\alpha(E_\alpha(\lambda t^\alpha)) + b_0 E_\alpha(\lambda t^\alpha) &= 0, \\ \lambda^2 E_\alpha(\lambda t^\alpha) + a_0 \lambda E_\alpha(\lambda t^\alpha) + b_0 E_\alpha(\lambda t^\alpha) &= 0, \\ (\lambda^2 + a_0 \lambda + b_0) E_\alpha(\lambda t^\alpha) &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dari persamaan (3.2) diperoleh bahwa fungsi Mittag-Leffler (3.1) merupakan solusi dari persamaan (1.2), jika λ memenuhi persamaan kuadrat berikut.

$$\lambda^2 + a_0 \lambda + b_0 = 0. \quad (3.3)$$

Persamaan (3.3) disebut sebagai persamaan karakteristik dari persamaan (1.2).

Terdapat tiga kemungkinan akar karakteristik bagi persamaan karakteristik (3.3), yaitu

- (1) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ dengan $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
- (2) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ dengan $\lambda_1 = \lambda_2$.
- (3) $\lambda_1 = p + iq, \lambda_2 = p - iq$, dengan $p, q \in \mathbb{R}$ dan $i = \sqrt{-1}$.

Untuk Kasus 1, solusi persamaan (1.2) dengan syarat batas (1.3) diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 3.1. Untuk persamaan diferensial fraksional (1.2), jika $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ dengan $\lambda_1 \neq \lambda_2$ adalah akar-akar persamaan karakteristik (3.3), maka solusi dari persamaan (1.2) adalah

$$x(t) = C_1 E_\alpha(\lambda_1 t^\alpha) + C_2 E_\alpha(\lambda_2 t^\alpha), \quad (3.4)$$

dengan C_1 dan C_2 memenuhi sistem persamaan linier berikut.

$$\begin{pmatrix} E_\alpha(\lambda_1 t_0^\alpha) & E_\alpha(\lambda_2 t_0^\alpha) \\ E_\alpha(\lambda_1 t_1^\alpha) & E_\alpha(\lambda_2 t_1^\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Bukti. Berdasarkan persamaan (2.5) dan (2.6), turunan bagi (3.4) adalah

$$D^\alpha x(t) = C_1 \lambda_1 E_\alpha(\lambda_1 t^\alpha) + C_2 \lambda_2 E_\alpha(\lambda_2 t^\alpha) \quad (3.6)$$

$$D^{2\alpha} x(t) = C_1 \lambda_1^2 E_\alpha(\lambda_1 t^\alpha) + C_2 \lambda_2^2 E_\alpha(\lambda_2 t^\alpha). \quad (3.7)$$

Substitusikan persamaan (3.4), (3.6), dan (3.7) ke dalam ruas kiri persamaan (1.2), diperoleh

$$C_1[\lambda_1^2 + a_0 \lambda_1 + b_0] E_\alpha(\lambda_1 t^\alpha) + C_2[\lambda_2^2 + a_0 \lambda_2 + b_0] E_\alpha(\lambda_2 t^\alpha). \quad (3.8)$$

Karena λ_1, λ_2 adalah akar dari persamaan (3.3), maka $\lambda_1^2 + a_0 \lambda_1 + b_0 = 0$ dan $\lambda_2^2 + a_0 \lambda_2 + b_0 = 0$, sehingga (3.8) adalah nol. Ini menunjukkan bahwa (3.4) adalah solusi dari (1.2).

Untuk memperlihatkan bahwa C_1 dan C_2 memenuhi sistem persamaan linier (3.5), evaluasi persamaan (3.4) di $t = t_0$ dan $t = t_1$.

$$\begin{pmatrix} E_\alpha(\lambda_1 t_0^\alpha) & E_\alpha(\lambda_2 t_0^\alpha) \\ E_\alpha(\lambda_1 t_1^\alpha) & E_\alpha(\lambda_2 t_1^\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

yang dalam hal ini $E_\alpha(\lambda_{1,2} t_0^\alpha)$ dan $E_\alpha(\lambda_{1,2} t_1^\alpha)$ dapat dihitung dengan menggunakan *software* Matlab. $\square$

Sebagai suatu ilustrasi, perhatikan persamaan diferensial fraksional orde $\left(\frac{2}{6}\right)$ berikut ini:

$$D^{\frac{2}{6}} x(t) - \frac{1}{4} D^{\frac{1}{6}} x(t) - \frac{1}{8} x(t) = 0 \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \quad (3.10)$$

dengan syarat batas

$$x\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \quad x(1) = 2. \quad (3.11)$$

Solusi bagi persamaan diferensial (3.10) adalah

$$x(t) = C_1 E_{\frac{1}{6}}\left(\frac{1}{2} t^{\frac{1}{6}}\right) + C_2 E_{\frac{1}{6}}\left(-\frac{1}{4} t^{\frac{1}{6}}\right). \quad (3.12)$$

Dengan menggunakan aplikasi Matlab, diperoleh

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,9706 \\ -8,0153 \end{pmatrix}.$$

Jadi, solusi bagi persamaan (3.10) adalah

$$x(t) = 3,9706E_{\frac{1}{6}}\left(\frac{1}{2}t^{\frac{1}{6}}\right) - 8,0153E_{\frac{1}{6}}\left(-\frac{1}{4}t^{\frac{1}{6}}\right). \quad (3.13)$$

Untuk Kasus 2, solusi persamaan (1.2) dengan syarat batas (1.3) diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 3.2. *Untuk persamaan diferensial fraksional (1.2), jika $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ dengan $\lambda_1 = \lambda_2$ adalah akar-akar persamaan karakteristik (3.3), maka solusi bagi persamaan (1.2) adalah*

$$x(t) = C_1 E_\alpha(\lambda_1 t^\alpha) + C_2 t^\alpha E_\alpha^{(1)}(\lambda_1 t^\alpha), \quad (3.14)$$

dengan C_1 dan C_2 memenuhi sistem persamaan linier berikut.

$$\begin{pmatrix} E_\alpha(\lambda_1 t_0^\alpha) & t_0^\alpha E_\alpha^{(1)}(\lambda_1 t_0^\alpha) \\ E_\alpha(\lambda_1 t_1^\alpha) & t_1^\alpha E_\alpha^{(1)}(\lambda_1 t_1^\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Bukti. Dari formula (2.2) pada Definisi 2.3 dan berdasarkan turunan fraksional Caputo (2.5) dan (2.6), diperoleh

$$E_\alpha^{(1)}(\lambda_1 t^\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2\lambda_1 t^\alpha}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{3\lambda_1^2 t^{2\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots \quad (3.16)$$

$$t^\alpha E_\alpha^{(1)}(\lambda_1 t^\alpha) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2\lambda_1 t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{3\lambda_1^2 t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots$$

$$D^\alpha \left(t^\alpha E_\alpha^{(1)}(\lambda_1 t^\alpha) \right) = 1 + \frac{2\lambda_1 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{3\lambda_1^2 t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \dots \quad (3.17)$$

$$D^{2\alpha} \left(t^\alpha E_\alpha^{(1)}(\lambda_1 t^\alpha) \right) = 2\lambda_1 + \frac{3\lambda_1^2 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{4\lambda_1^3 t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \dots \quad (3.18)$$

Substitusikan (3.14), (3.17) dan (3.18) ke dalam ruas kiri persamaan (1.2), diperoleh

$$\begin{aligned} & C_1(\lambda_1^2 + a_0\lambda_1 + b_0)E_\alpha(\lambda_1 t^\alpha) + C_2(2\lambda_1 + a_0) \\ & + C_2(3\lambda_1^2 + 2a_0\lambda_1 + b_0)\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + C_2(4\lambda_1^3 + 3a_0\lambda_1^2 + 2\lambda_1 b_0)\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\ & + C_2(5\lambda_1^4 + 4a_0\lambda_1^3 + 3\lambda_1^2 b_0)\frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots \end{aligned} \quad (3.19)$$

Karena λ_1 adalah akar kembar dari persamaan karakteristik (3.3), maka

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 + a_0\lambda_1 + b_0 &= 0 \\ 2\lambda_1 + a_0 &= 0 \\ 3\lambda_1^2 + 2a_0\lambda_1 + b_0 &= 0 \\ 4\lambda_1^3 + 3a_0\lambda_1^2 + 2\lambda_1 b_0 &= 0 \\ 5\lambda_1^4 + 4a_0\lambda_1^3 + 3\lambda_1^2 b_0 &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

dan akibatnya (3.19) adalah nol. Ini menunjukkan bahwa (3.14) adalah solusi dari (1.2). Untuk memperlihatkan bahwa C_1 dan C_2 memenuhi sistem persamaan linier (3.15), evaluasi persamaan (3.14) di $t = t_0$ dan $t = t_1$.

$$\begin{pmatrix} E_\alpha(\lambda_1 t_0^\alpha) & t_0^\alpha E_\alpha^{(1)}(\lambda_1 t_0^\alpha) \\ E_\alpha(\lambda_1 t_1^\alpha) & t_1^\alpha E_\alpha^{(1)}(\lambda_1 t_1^\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

yang dalam hal ini $E_\alpha(\lambda_1 t_0^\alpha)$ dan $E_\alpha(\lambda_1 t_1^\alpha)$ dapat dihitung dengan menggunakan aplikasi *software* Matlab. $\square$

Sebagai suatu ilustrasi, perhatikan persamaan diferensial fraksional orde $\left(\frac{2}{3}\right)$ berikut ini:

$$D^{\frac{2}{3}}x(t) - \frac{4}{3}D^{\frac{1}{3}}x(t) + \frac{4}{9}x(t) = 0 \quad t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \quad (3.21)$$

dengan syarat batas

$$x\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{5}, \quad x\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{2}{3}. \quad (3.22)$$

Solusi bagi persamaan (3.21) adalah

$$x(t) = C_1 E_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}t^{\frac{1}{3}}\right) + C_2 t^{\frac{1}{3}} E_{\frac{1}{3}}^{(1)}\left(\frac{2}{3}t^{\frac{1}{3}}\right). \quad (3.23)$$

Dengan menggunakan aplikasi Matlab, diperoleh

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,6667 \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Jadi, solusi bagi persamaan (3.21) adalah

$$x(t) = 0,2 E_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}t^{\frac{1}{3}}\right) + 0,6667 t^{\frac{1}{3}} E_{\frac{1}{3}}^{(1)}\left(\frac{2}{3}t^{\frac{1}{3}}\right). \quad (3.25)$$

Untuk Kasus 3, solusi persamaan (1.2) dengan syarat batas (1.3) diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 3.3. *Untuk persamaan diferensial fraksional (1.2), jika $p, q \in \mathbb{R}$ dan $i = \sqrt{-1}$ dengan $\lambda_1 = p + iq$ dan $\lambda_2 = p - iq$ adalah akar-akar persamaan karakteristik (3.3), maka solusi umum dari persamaan (1.2) adalah*

$$x(t) = C_1 E_\alpha((p + iq)t^\alpha) + C_2 E_\alpha((p - iq)t^\alpha), \quad (3.26)$$

dengan C_1 dan C_2 memenuhi sistem persamaan linier berikut.

$$\begin{pmatrix} E_\alpha((p + iq)t_0^\alpha) & E_\alpha((p - iq)t_0^\alpha) \\ E_\alpha((p + iq)t_1^\alpha) & E_\alpha((p - iq)t_1^\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Bukti. Berdasarkan persamaan (2.5) dan (2.6), turunan dari (3.26) adalah

$$D^\alpha x(t) = C_1(p + iq)E_\alpha((p + iq)t^\alpha) + C_2(p - iq)E_\alpha((p - iq)t^\alpha) \quad (3.28)$$

$$D^{2\alpha}x(t) = C_1(p + iq)^2 E_\alpha((p + iq)t^\alpha) + C_2(p - iq)^2 E_\alpha((p - iq)t^\alpha). \quad (3.29)$$

Substitusikan, persamaan (3.26), (3.28), dan (3.7) ke dalam ruas kiri persamaan (1.2), diperoleh

$$\begin{aligned} & C_1[(p+iq)^2 + a_0(p+iq) + b_0(p+iq)]E_\alpha((p+iq)t^\alpha) \\ & + C_2[(p-iq)^2 + a_0(p-iq) + b_0(p-iq)]E_\alpha((p-iq)t^\alpha). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Karena $\lambda_1 = (p+iq)$, $\lambda_2 = (p-iq)$ adalah akar dari persamaan (3.3), maka $(p+iq)^2 + a_0(p+iq) + b_0(p+iq) = 0$ dan $(p-iq)^2 + a_0(p-iq) + b_0(p-iq) = 0$, sehingga (3.30) adalah nol. Ini menunjukkan bahwa (3.26) adalah solusi bagi persamaan (1.2).

Untuk memperlihatkan C_1 dan C_2 memenuhi sistem persamaan linier (3.27), evaluasi persamaan (3.26) di $t = t_0$ dan $t = t_1$.

$$\begin{pmatrix} E_\alpha((p+iq)t_0^\alpha) & E_\alpha((p-iq)t_0^\alpha) \\ E_\alpha((p+iq)t_1^\alpha) & E_\alpha((p-iq)t_1^\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

yang dalam hal ini $E_\alpha((p \pm iq)t_0^\alpha)$ dan $E_\alpha((p \pm iq)t_1^\alpha)$ dapat dihitung dengan menggunakan aplikasi *software* Matlab. $\square$

Sebagai suatu ilustrasi, perhatikan persamaan diferensial fraksional orde $\left(\frac{2}{2}\right)$.

$$Dx(t) - \frac{4}{13}D^{\frac{1}{2}}x(t) + \frac{1}{13}x(t) = 0 \quad t \in \left[1, \frac{3}{2}\right] \quad (3.32)$$

dengan syarat batas

$$x(1) = 2, \quad x\left(\frac{3}{2}\right) = 0. \quad (3.33)$$

Solusi bagi persamaan diferensial (3.32) adalah

$$x(t) = C_1 E_{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{2+3i}\right)t^{\frac{1}{2}}\right) + C_2 E_{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{2-3i}\right)t^{\frac{1}{2}}\right). \quad (3.34)$$

Dengan menggunakan aplikasi Matlab, diperoleh

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2639 - 1.2763i \\ 1.2639 + 1.2763i \end{pmatrix}.$$

Jadi, solusi bagi persamaan (3.32) adalah

$$x(t) = (1.2639 - 1.2763i)E_{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{2+3i}\right)t^{\frac{1}{2}}\right) + (1.2639 + 1.2763i)E_{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{2-3i}\right)t^{\frac{1}{2}}\right).$$

4. Kesimpulan

Ada tiga kategori penyelesaian masalah nilai batas untuk persamaan diferensial fraksional linier 2α berikut:

$$D^{2\alpha}x(t) + a_0D^\alpha x(t) + b_0x(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad m-1 < \alpha < m$$

dengan syarat batas

$$x(t_0) = x_0 \quad x(t_1) = x_1,$$

yang dalam hal ini D^α adalah turunan Caputo.

1. Jika $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dengan $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, maka solusinya adalah

$$x(t) = C_1 E_\alpha(\lambda_1 t^\alpha) + C_2 E_\alpha(\lambda_2 t^\alpha),$$

dimana C_1 dan C_2 memenuhi sistem persamaan linier

$$\begin{pmatrix} E_\alpha(\lambda_1 t_0^\alpha) & E_\alpha(\lambda_2 t_0^\alpha) \\ E_\alpha(\lambda_1 t_1^\alpha) & E_\alpha(\lambda_2 t_1^\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

2. Jika $\lambda_1 = \lambda_2$ dengan $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, maka solusinya adalah

$$x(t) = C_1 E_\alpha(\lambda_1 t^\alpha) + C_2 t^\alpha E_\alpha^{(1)}(\lambda_2 t^\alpha),$$

dimana C_1 dan C_2 memenuhi sistem persamaan linier

$$\begin{pmatrix} E_\alpha(\lambda_1 t_0^\alpha) & t_0^\alpha E_\alpha^{(1)}(\lambda_1 t_0^\alpha) \\ E_\alpha(\lambda_2 t_1^\alpha) & t_1^\alpha E_\alpha^{(1)}(\lambda_2 t_1^\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

3. Jika $\lambda_1 = p + iq$ dan $\lambda_2 = p - iq$ dengan $p, q \in \mathbb{R}$ dan $i = \sqrt{-1}$, maka solusinya adalah

$$x(t) = C_1 E_\alpha((p + iq)t^\alpha) + C_2 E_\alpha((p - iq)t^\alpha),$$

dimana C_1 dan C_2 memenuhi sistem persamaan linier

$$\begin{pmatrix} E_\alpha((p + iq)t_0^\alpha) & E_\alpha((p - iq)t_0^\alpha) \\ E_\alpha((p + iq)t_1^\alpha) & E_\alpha((p - iq)t_1^\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Prof. Dr. Muhafzan, Ibu Dr. Ar-rival Rince Putri, Bapak Dr. Dodi Devianto, dan Ibu Dr. Lyra Yulianti yang telah memberikan masukan dan saran dalam penyempurnaan penulisan artikel ini.

Daftar Pustaka

- [1] 'Aisy, N.R., Husna, R., 2019, Solusi Sistem Persamaan Diferensial *Fractional* Linear Orde *Fractional* Dengan Turunan Tipe Caputo, *Jurnal Matematika UNAND*, Vol. **8** (2): 101 – 107
- [2] Afisha, H.O., 2016, Solusi Persamaan Fraksional Linear Homogen Dengan Metode Mittag-Leffler, *Jurnal Matematika Murni dan Terapan "epsilon"*, **Vol** 10 (1) : 21 – 30
- [3] Bartle, R.G and Donald, R.S., 2010, *Introduction to Real Analysis, Fourth Edition*. John Wiley and Sons, USA
- [4] Ishteva, M.K., 2005, *Properties and Application of The Caputo Fractional Operator*. Departement of Mathematics Universitat Karlsruhe, Sofia (Bulgaria)
- [5] Sari, G.N., Baqi, A.I., 2020, Penggunaan Metode Mittag-Leffler untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial *fractional* linier dengan Koefisien Konstan, *Jurnal Matematika UNAND*, Vol. **9** (2): 107 – 114
- [6] Martono, K. 1999. *Kalkulus*. Erlangga, Jakarta
- [7] Miller, K.S and Ross, B., 1993, *An Introduction to Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. John Wiley and Sons, New York, NY, USA

- [8] Milici, C., Gheorghe, D., and Machado, J.T., 2019, *Introduction to Fractional Differential Equations*. Springer Nature, Switzerland
- [9] Odibat, M.Z., 2009, Analytic Study on Linear Systems of Fractional Differential Equations. *Computers and Mathematics with Applications*. Elsevier Ltd
- [10] Podlubny, I., 1999, *Fractional Differential equations*. Academic Press, San Diego
- [11] Schiff, J.L., 1999, *The Laplace Transform* . Springer-Verlag, New York.