

PEMBANGKITAN POLA SIMETRI ROTASI 90° DARI SIMULASI SISTEM DINAMIK

KINTAN FEBRI CANIA, MAHDHIVAN SYAFWAN*, SUSILA BAHRI

Program Studi S1 Matematika,

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,

Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.

email : kintanfebrikania@gmail.com, mahdhivan@sci.unand.ac.id, susilabahri@sci.unand.ac.id

Diterima 15 Desember 2020 Direvisi 29 Desember 2020 Dipublikasikan 12 Januari 2021

Abstrak. Dalam makalah ini dibahas pola simetri jenis $p4$ berwarna yang memiliki simetri rotasi 90° dan simetri translasi dengan periode T masing-masing sepanjang sumbu- x dan sumbu- y . Pola simetri $p4$ ini dibangkitkan dengan menggunakan aplikasi Matlab melalui simulasi sistem dinamik diskrit dengan terlebih dahulu melakukan analisis terhadap syarat dan pemilihan fungsi-fungsi dinamikanya. Dalam hal ini, setiap titik pada bidang dijadikan sebagai titik awal pada iterasi sistem dinamik, dan jumlah iterasi yang dihasilkan dari kriteria konvergensi dalam bentuk norm Euclidian menentukan warna yang diberikan pada titik tersebut. Dengan menggunakan beberapa kombinasi nilai-nilai parameter pada fungsi-fungsi dinamik, diperoleh pola-pola simetri $p4$ yang lebih menarik dan variatif.

Kata Kunci: Isometri, Pola Simetri $p4$, Sistem Dinamik

1. Pendahuluan

Perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi semakin mendorong upaya pembaharuan dan pemanfaatan hasil-hasil teknologi dalam kehidupan sehari-hari. Sebagai contoh, teknologi seperti komputer dapat digunakan untuk menghasilkan gambar-gambar dengan pola simetri yang dijadikan sebagai motif pada dinding, tekstil, keramik, karpet, jendela kaca patri dan sebagainya. Pola-pola ini lebih lanjut memiliki dampak ekonomi dan estetika [5].

Persamaan matematika dapat menghasilkan pola-pola berwarna melalui simulasi sistem dinamik dengan menggunakan aplikasi pada komputer. Pola-pola yang dihasilkan ini dapat bersifat simetris maupun asimetris. Himpunan semua isometri di dua dimensi disebut grup simetri. Grup simetri pada pola wallpaper dinamakan *wallpaper group* [4].

Pada makalah ini akan dibahas *wallpaper group* jenis $p4$ yang memiliki simetri rotasi 90° dan simetri translasi dengan periode T sepanjang sumbu- x dan periode

*penulis korespondensi

T^* sepanjang sumbu- y [2]. Pola simetri $p4$ ini dibangkitkan dengan menggunakan komputer melalui simulasi sistem dinamik diskrit

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + f(x_n, y_n), \\ y_{n+1} &= y_n + g(x_n, y_n), \end{aligned} \tag{1.1}$$

untuk $n = 0, 1, 2, \dots$

untuk suatu fungsi $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ dengan syarat-syarat yang akan ditentukan kemudian.

Dalam makalah ini dijelaskan proses penentuan syarat dan pemilihan fungsi $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ sedemikian sehingga potret fase Sistem (1.1) memiliki pola simetri $p4$ berwarna. Pembangkitan pola simetri ini dilakukan dengan menggunakan aplikasi Matlab. Ide dan langkah-langkah dalam penelitian ini mengikuti referensi [2], namun dengan menggunakan sistem dinamik diskrit (1.1) yang secara numerik lebih relevan dengan versi kontinu

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y).$$

2. Sekilas tentang Wallpaper Group

Karakteristik *wallpaper group* dibedakan berdasarkan tipe *lattice* dan isometri. *Lattice* didefinisikan sebagai himpunan titik-titik yang membentuk suatu geometri tertentu pada \mathbb{R}^2 [4].

Definisi 2.1. [4] *Suatu subset W dari \mathbb{R}^2 disebut wallpaper pattern jika subgrup translasi pada grup simetri $Sym(W)$ adalah lattice dua dimensi. Grup simetri yang terdapat dalam wallpaper pattern disebut wallpaper group.*

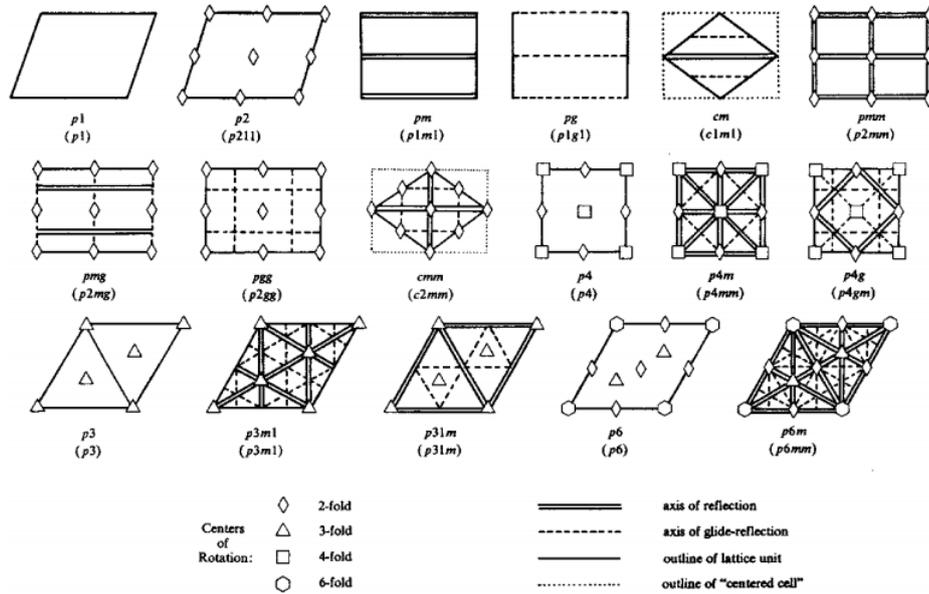
Masing-masing *wallpaper group* disimbolkan dengan p, c, m, g dan bilangan bulat 1, 2, 3, 4, 6. Huruf p menunjukkan *lattice* dan merupakan singkatan dari kata *primitif*. Huruf c menunjukkan *lattice* terpusat, m menunjukkan refleksi (*mirror*) dan g menunjukkan *glide*-refleksi. Angka 2, 3, 4, 6 menunjukkan orde dari rotasi yang masing-masing berkaitan dengan sudut $\pi, 2\pi/3, \pi/2, \pi/3$ [1]. Berdasarkan [3], terdapat 17 jenis *wallpaper group* sebagaimana yang dapat dilihat pada Gambar 2.

3. Syarat pada Isometri

Wallpaper group p4 memenuhi dua jenis isometri, yaitu simetri translasi dan simetri rotasi. Berikut akan dijelaskan syarat-syarat dari fungsi f dan g agar potret fase dari Sistem (1.1) memiliki kedua simetri ini.

3.1. Simetri Translasi

Misalkan potret fase Sistem (1.1) mempunyai simetri translasi dengan periode T di sepanjang sumbu- x , artinya potret fase tersebut tidak mengalami perubahan setelah dilakukan transformasi $x' = x - T$ dan $y' = y$. Substitusi x' dan y' tersebut



Gambar 1. 17 Jenis Wallpaper Group [3]

ke Persamaan (1.1), diperoleh

$$\begin{aligned} x'_{n+1} &= x'_n + f(x'_n + T, y'_n), \\ y'_{n+1} &= y'_n + g(x'_n + T, y'_n). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Supaya Persamaan (1.1) dan (3.1) menjadi identik, maka haruslah

$$\begin{aligned} f(x + T, y) &= f(x, y), \\ g(x + T, y) &= g(x, y). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Demikian juga, jika potret fase Sistem (1.1) mempunyai simetri translasi dengan periode T^* sepanjang sumbu- y , maka haruslah

$$\begin{aligned} f(x, y + T^*) &= f(x, y), \\ g(x, y + T^*) &= g(x, y). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Berikutnya jika potret fase Sistem (1.1) mempunyai simetri translasi dengan periode T sepanjang sumbu- x dan periode T^* sepanjang sumbu- y , maka Persamaan (3.2) dan (3.3) berlaku sekaligus, yaitu

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x + T, y) = f(x, y + T^*), \\ g(x, y) &= g(x + T, y) = g(x, y + T^*). \end{aligned} \tag{3.4}$$

3.2. Simetri Rotasi

Misalkan potret fase Sistem (1.1) tidak mengalami perubahan setelah dikenakan rotasi sebesar θ yang berlawanan arah jarum jam. Pada kondisi ini berlaku trans-

formasi

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

Substitusi Persamaan (3.5) ke (1.1) menghasilkan

$$\begin{pmatrix} x'_{n+1} \\ y'_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_n \\ y'_n \end{pmatrix} + T_\theta \begin{pmatrix} f(x_n, y_n) \\ g(x_n, y_n) \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Supaya Persamaan (1.1) dan (3.6) menjadi identik, maka haruslah

$$f(x', y') = \cos \theta f(x, y) - \sin \theta g(x, y), \quad (3.7)$$

$$g(x', y') = \sin \theta f(x, y) + \cos \theta g(x, y). \quad (3.8)$$

Eliminasi $g(x, y)$ dari Persamaan (3.7) dan (3.8) menghasilkan

$$f(x'', y'') - 2 \cos \theta f(x', y') + f(x, y) = 0. \quad (3.9)$$

4. Pemilihan Fungsi Dinamik

Agar potret fase Sistem (1.1) memiliki pola *wallpaper group* jenis $p4$, maka pemilihan fungsi dinamik $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ dilakukan berdasarkan sifat simetri translasi dan simetri rotasi.

Substitusi $\theta = \pi/2$ ke Persamaan (3.9), diperoleh

$$f(x'', y'') + f(x, y) = 0. \quad (4.1)$$

Selanjutnya dengan menggunakan nilai $x'' = -x$ dan $y'' = -y$ (hasil rotasi $\theta = \pi/2$), Persamaan (4.1) menjadi

$$f(x, y) = -f(-x, -y). \quad (4.2)$$

Misalkan solusi umum dari Persamaan (4.2) dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari fungsi $h(x^{(n)}, y^{(n)})$ untuk $n = 0, 1, 2, 3$, dimana $h(x, y)$ adalah fungsi sebarang dan titik $(x^{(n)}, y^{(n)})$ adalah rotasi dari titik (x, y) dengan sudut $\theta = n\pi/2$ (berlawanan arah jarum jam) [2]. Dalam hal ini dapat ditulis

$$f(x, y) = rh(x, y) + sh(-y, x) + th(-x, -y) + uh(y, -x), \quad (4.3)$$

dimana r, s, t dan u adalah bilangan riil. Dengan mensubstitusikan nilai $f(x, y)$ pada Persamaan (4.3) ke (4.2), diperoleh

$$f(x, y) = r[h(x, y) - h(-x, -y)] + s[h(-y, x) - h(y, -x)], \quad (4.4)$$

dimana $t = -r$ dan $u = -s$. Dengan menggunakan $\theta = \pi/2$, maka Persamaan (3.7) menjadi

$$g(x, y) = -r[h(-y, x) - h(y, -x)] - s[h(-x, -y) - h(x, y)]. \quad (4.5)$$

Karena *lattice* yang membentuk *wallpaper group* jenis $p4$ adalah persegi, maka berlaku $T^* = T$, sehingga Persamaan (3.4) menjadi

$$\begin{cases} f(x, y) = f(x + T, y) = f(x, y + T), \\ g(x, y) = g(x + T, y) = g(x, y + T). \end{cases}$$

Misalkan $h(x, y)$ adalah fungsi periodik dengan periode 2π sepanjang sumbu- x dan periode 2π sepanjang sumbu- y . Dengan demikian $h(x, y)$ dapat dinyatakan dalam deret Fourier dua variabel sebagai berikut:

$$h(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \cos mx \cos ny + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_{mn} \cos mx \sin ny + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} \sin mx \cos ny + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} D_{mn} \sin mx \sin ny. \quad (4.6)$$

Berdasarkan analisis lebih lanjut terhadap Persamaan (4.2), $h(x, y)$ dapat dibuat lebih sederhana menjadi

$$h(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_{mn} \cos mx \sin ny + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} \sin mx \cos ny. \quad (4.7)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.7) ke masing-masing Persamaan (4.4) dan (4.5), diperoleh

$$f(x, y) = 2r \left[\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_{mn} \cos mx \sin ny + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} \sin mx \cos ny \right] \quad (4.8)$$

$$+ 2s \left[\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_{mn} \cos my \sin nx - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} \sin my \cos nx \right],$$

$$g(x, y) = -2r \left[\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_{mn} \cos my \sin nx - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} \sin my \cos nx \right] \quad (4.9)$$

$$+ 2s \left[\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_{mn} \cos mx \sin ny + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} \sin mx \cos ny \right].$$

Dengan demikian telah diperoleh fungsi $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ seperti pada Persamaan (4.8) dan (4.9) sedemikian sehingga potret fase dari Sistem (1.1) mempunyai pola *wallpaper group* jenis $p4$.

5. Pembangkitan Pola Simetri

Pembangkitan pola simetri *wallpaper group* jenis $p4$ dalam makalah ini diperoleh melalui simulasi numerik terhadap potret fase Sistem (1.1) dengan menggunakan aplikasi Matlab. Pewarnaan titik (pixel) pada potret fase ditentukan dengan cara berikut [2]: setiap titik (x, y) pada bidang $A \subset \mathbb{R}^2$ menjadi titik awal (x_0, y_0) pada iterasi (1.1), sehingga diperoleh barisan titik $\{(x_n, y_n)\}$. Proses iterasi dijalankan jika memenuhi kriteria konvergensi dalam bentuk norm Euclidian berikut:

$$\sqrt{(x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2} \leq \epsilon, \quad n \geq 0,$$

untuk suatu toleransi galat ϵ , atau telah mencapai jumlah maksimum iterasi (K). Setelah proses iterasi berakhir, warna pada titik (x, y) kemudian ditetapkan berdasarkan jumlah iterasi yang dihasilkan. Algoritma *pseudocode* untuk pembangkitan pola $p4$ ini diberikan pada Lampiran.

Pada simulasi pembangkitan pola simetri ini, ditetapkan bidang $A = [-10, 10]^2$, tingkat resolusi $nx = 700$ dan $ny = 700$, $\epsilon = 0.1$ dan $K = 50$ serta dipilih *colourmap* tipe jet pada Matlab. Pemilihan nilai K dan ϵ tersebut mengikuti referensi [2]. Kemudian dipilih empat kombinasi nilai-nilai parameter pada fungsi $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ sebagai berikut:

- (1) $r=0.4, s=0.2, B_{11}=1, B_{mn}=0$ untuk $m \neq 1$ dan $n \neq 1, C_{11}=1, C_{mn}=0$ untuk $m \neq 1$ dan $n \neq 1$. Dalam hal ini dipilih fungsi dinamik berikut:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0.8(\cos x \sin y + \sin x \cos y) + 0.4(\cos y \sin x - \sin y \cos x), \quad (5.1) \\ g(x, y) &= -0.8(\cos y \sin x - \sin y \cos x) + 0.4(\cos x \sin y + \sin x \cos y). \end{aligned}$$

- (2) $r=0.2, s=0.1, B_{11}=1, B_{22}=1, B_{mn}=0$ untuk $m \neq 1, 2$ dan $n \neq 1, 2, C_{11}=1, C_{22}=1, C_{mn}=0$ untuk $m \neq 1, 2$ dan $n \neq 1, 2$. Dalam hal ini dipilih fungsi dinamik berikut:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0.4(\cos x \sin y + \sin x \cos y) + 0.2(\cos y \sin x - \sin y \cos x) \quad (5.2) \\ &\quad + 0.4(\cos 2x \sin 2y + \sin 2x \cos 2y) + 0.2(\cos 2y \sin 2x \\ &\quad - \sin 2y \cos 2x), \\ g(x, y) &= -0.4(\cos y \sin x - \sin y \cos x) + 0.2(\cos x \sin y + \sin x \cos y) \\ &\quad - 0.4(\cos 2y \sin 2x - \sin 2y \cos 2x) + 0.2(\cos 2x \sin 2y \\ &\quad + \sin 2x \cos 2y). \end{aligned}$$

- (3) $r=0.4, s=0.3, B_{21}=1, B_{mn}=0$ untuk $m \neq 2$ dan $n \neq 1, C_{12}=1, C_{mn}=0$ untuk $m \neq 1$ dan $n \neq 2$. Dalam hal ini dipilih fungsi dinamik berikut:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0.8(\cos 2x \sin y + \sin x \cos 2y) + 0.6(\cos 2y \sin x - \sin y \cos 2x), \quad (5.3) \\ g(x, y) &= -0.8(\cos 2y \sin x - \sin y \cos 2x) + 0.6(\cos 2x \sin y + \sin x \cos 2y). \end{aligned}$$

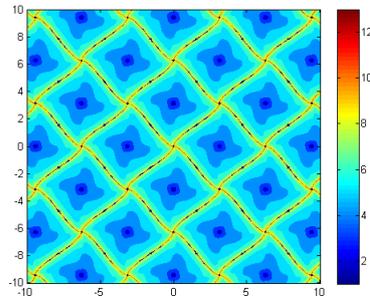
- (4) $r=0.2, s=0.1, B_{21}=1, B_{mn}=0$ untuk $m \neq 2$ dan $n \neq 1, C_{12}=1, C_{mn}=0$ untuk $m \neq 1$ dan $n \neq 2$. Dalam hal ini dipilih fungsi dinamik berikut:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0.4(\cos 2x \sin y + \sin x \cos 2y) + 0.2(\cos 2y \sin x - \sin y \cos 2x), \quad (5.4) \\ g(x, y) &= -0.4(\cos 2y \sin x - \sin y \cos 2x) + 0.2(\cos 2x \sin y + \sin x \cos 2y). \end{aligned}$$

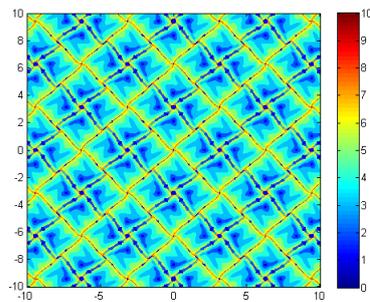
Hasil pembangkitan pola simetri untuk setiap fungsi $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ pada Persamaan (5.1), (5.2), (5.3) dan (5.4) diberikan masing-masing pada Gambar 2, 3, 4, dan 5. Perhatikan bahwa gambar-gambar tersebut menampilkan pola simetri yang menarik dan variatif, serta memenuhi kriteria *wallpaper group* jenis $p4$, yaitu memiliki simetri rotasi 90°, tidak memiliki simetri refleksi dan tipe *lattice* berbentuk persegi.

6. Kesimpulan

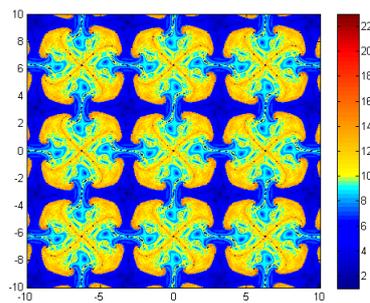
Dalam makalah ini telah dibahas pembangkitan pola simetri $p4$ melalui simulasi sistem dinamik diskrit. Syarat dan pemilihan fungsi dinamik ditentukan berdasarkan sifat isometri yang berlaku pada *wallpaper group* jenis $p4$, yaitu memiliki simetri



Gambar 2. Hasil pembangkitan pola simetri $p4$ dengan $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ pada Persamaan (5.2)

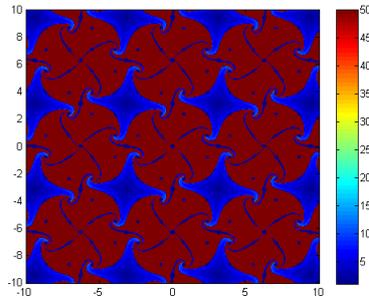


Gambar 3. Hasil pembangkitan pola simetri $p4$ dengan $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ pada Persamaan (5.1)



Gambar 4. Hasil pembangkitan pola simetri $p4$ dengan $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ pada Persamaan (5.3)

rotasi 90° dan simetri translasi sepanjang sumbu- x dan sumbu- y . Dengan menggunakan beberapa kombinasi nilai-nilai parameter pada fungsi dinamik, berikutnya dilakukan pembangkitan pola simetri $p4$ melalui aplikasi Matlab dengan menggunakan *colourmap* tipe jet. Dari proses pembangkitan ini diperoleh pola-pola simetri $p4$ yang lebih variatif dan menarik.



Gambar 5. Hasil pembangkitan pola simetri $p4$ dengan $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ pada Persamaan (5.4)

7. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada bapak Muhafzan, ibu Hazmira Yoza dan ibu Des Welyyanti, yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Armstrong, M. A. 1988. *Groups and Symmetry*. Springer, New York
- [2] Chung, K. W dan H. S. Y. Chan. 1993. *Symmetrical Patterns from Dynamics*. Computer Graphics Forum. **12**(1): 33 – 40
- [3] Liu, Yanxi dan Robert T. Collins. 1998. *Frieze and Wallpaper Symmetry Groups Classification under Affine and Perspective Distortion*. Technical Report, Pittsburgh
- [4] Morandi, Patrick J. 2007. *Symmetry Groups: The Classification of Wallpaper Pattern Mathematics 482/526*. Springer, Las Cruces
- [5] Ouyang, P., W. Zhao dan X. Huang. 2015. *Beautiful Math. Part 5: Colorful Archimedean Tilings from Dynamical Systems*. IEEE Computer Graphics and Applications. **35**(6): 90 – 96

Lampiran

Algoritma *Pseudocode* untuk Pembangkitan Pola Simetri p4

Masukan:

nx, ny (tingkat resolusi dalam arah- x dan arah- y)
 $xmin, xmax$ (nilai- x minimum dan maksimum dari bidang A)
 $ymin, ymax$ (nilai- y minimum dan maksimum dari bidang A)
 K (jumlah maksimum iterasi)
 ε (galat)
 r, s (nilai parameter pada fungsi f dan g)

Keluaran: Pola simetri pada bidang A .

Langkah-langkah:

1. **for** $iy := 0$ to $(ny - 1)$ (loop dalam arah y)
 $cy := ymin + iy * (ymax - ymin) / (ny - 1)$ (menampilkan titik pada koordinat y)
2. **for** $ix := 0$ to $(nx - 1)$ (loop dalam arah x)
 $cx := xmin + ix * (xmax - xmin) / (nx - 1)$ (menampilkan titik pada koordinat x)
3. $mx := cx, my := cy$
4. **for** $iw := 1$ to K (melakukan iterasi untuk titik (cx, cy))
5. $x1 := -my, y1 := mx, x2 := -mx, y2 := -my, x3 := my, y3 := -mx$ (titik x^n, y^n)
6. $hxy := \cos mx * \sin my + \sin mx * \cos my$ (fungsi $h(x, y)$ untuk x dan y)
 $h1xy := \cos x1 * \sin y1 + \sin x1 * \cos y1$ (fungsi $h(x, y)$ untuk $-y$ dan x)
 $h2xy := \cos x2 * \sin y2 + \sin x2 * \cos y2$ (fungsi $h(x, y)$ untuk $-x$ dan $-y$)
 $h3xy := \cos x3 * \sin y3 + \sin x3 * \cos y3$ (fungsi $h(x, y)$ untuk y dan $-x$)
7. $fxy := (r(hxy - h2xy)) + (s(h1xy - h3xy))$ (fungsi $f(x, y)$)
 $f1xy := (r(h1xy - h3xy)) + (s(h2xy - hxy))$ (fungsi $f(-y, x)$)
 $gxy := -f1xy$ (fungsi $g(x, y)$)
8. $t := fxy * fxy + gxy * gxy$ (jarak antara koordinat sebelumnya dan koordinat baru setelah satu iterasi)
9. **if** $\sqrt{t} < \varepsilon$
10. **break**
11. **end if**
12. $mx := mx + fxy, my := my + gxy$ (koordinat baru setelah satu iterasi)
13. **end for**
14. plot titik (cx, cy) dengan warna yang ditentukan pada iw
15. **end for**
16. **end for**