

## ANALISIS KESTABILAN MODEL *PREY* – *PREDATOR* HOLLING TIPE III

HAZISYAH, ARRIVAL RINCE PUTRI\*, SUSILA BAHRI

*Program Studi S1 Matematika,  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,  
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.  
email : hazisyah19@gmail.com, arrivalputri@gmail.com, susilabahri@gmail.com*

Diterima 15 Desember 2020    Direvisi 29 Desember 2020    Dipublikasikan 12 Januari 2021

**Abstrak.** Model matematika yang merepresentasikan interaksi antara *prey* (mangsa) dan *prey* (pemangsa) dikenal dengan model *prey-predator*. Penelitian ini membahas dinamika model *prey-predator* yang memuat fungsi respon Holling tipe III, dimana tipe predator yang mencari mangsa lain ketika mangsa yang dimakannya mulai berkurang. Dinamika model diamati dengan menganalisis kestabilan sistem, yaitu kestabilan sistem di sekitar titik ekuilibriumnya. Secara analitik terdapat tiga titik ekuilibrium dari model. Terdapat satu titik yang tidak stabil dan dua titik yang kestabilannya tergantung pada nilai parameter yang diberikan. Hasil simulasi numerik menunjukkan sifat yang sama untuk tiga titik keseimbangan tersebut dengan parameter yang digunakan pada penelitian ini.

*Kata Kunci:* Model *Prey-predator*, Holling tipe III, Titik ekuilibrium.

### 1. Pendahuluan

Interaksi antara dua spesies yang berbeda dimana salah satu dari keduanya menyediakan makanan untuk yang lainnya disebut dengan interaksi *prey-predator*. Interaksi ini menggambarkan hubungan antara *prey* sebagai spesies yang dimangsa dan predator sebagai spesies yang memangsa. Model matematika yang merepresentasikan interaksi ini dikenal dengan model *prey-predator*. Model *prey-predator* pertama kali diperkenalkan oleh Lotka pada tahun 1925 dan Volterra pada tahun 1926, sehingga model ini disebut juga dengan model Lotka-Volterra. Model Lotka-Volterra dikembangkan berdasarkan beberapa asumsi, yaitu: populasi *prey* tumbuh secara eksponensial jika tidak ada predator, populasi predator akan berkurang tanpa adanya populasi *prey*, predator dapat mengkonsumsi jumlah tak terbatas dari *prey*, dan tidak adanya kompleksitas lingkungan [4].

Salah satu kelemahan model Lotka-Volterra adalah pada asumsi yang tidak realistis, yaitu mangsa dapat tumbuh tanpa batas, karena adanya keterbatasan

\*penulis korespondensi

makanan dan daya dukung lingkungan. Model logistik dapat digunakan untuk mengatasi hal tersebut, dimana model logistik berfungsi untuk menghambat dan mengendalikan pertumbuhan populasi mangsa [2, 5]. Selanjutnya, kelemahan lain dari model Lotka-Volterra adalah model belum memperhitungkan waktu yang diperlukan oleh predator untuk mencerna makanannya, serta kondisi bahwa makanan dari mangsa terbatas. Untuk itu, Holling memperkenalkan fungsi respon pada tahun 1950. Fungsi respon diartikan sebagai jumlah makanan yang dimakan oleh predator, sehingga dapat dinyatakan sebagai fungsi kepadatan makanan. Fungsi respon menjelaskan perubahan kecepatan mengkonsumsi mangsa oleh predator ketika kepadatan populasi mangsa berubah [4].

Fungsi respon bergantung pada beberapa faktor, diantaranya jumlah dari masing-masing prey dan predator, daya dukung lingkungan, tingkat kejenuhan predator, dan tingkat persaingan antar predator. Fungsi respon Holling memiliki beberapa tipe, yaitu Holling Tipe I, Tipe II dan Tipe III. Holling tipe I menggambarkan sebuah hubungan linier antara banyaknya prey yang dikonsumsi dengan kepadatan populasi prey. Holling tipe II ditandai dengan laju konsumsi yang melambat, dimana predator mengalami kejenuhan saat mengkonsumsi prey. Holling tipe III hampir sama dengan Holling tipe II, namun pada Holling tipe III saat populasi prey sedikit, prey belajar mempertahankan diri. Hal ini mengakibatkan predator sulit memburu prey [3].

Model prey-predator yang memuat fungsi respon Holling tipe III dengan menambahkan fungsi perlindungan pada prey telah dibahas oleh [6]. Model prey-predator Holling tipe III dengan penundaan waktu dibahas oleh [11]. Pada penelitian ini akan dikaji dinamika model prey-predator yang memuat fungsi respon Holling tipe III dengan adanya batasan pertumbuhan populasi prey, yaitu dengan menganalisis kestabilan sistem di sekitar titik ekuilibrium

## 2. Landasan Teori

Sistem dinamik adalah suatu sistem yang menggambarkan perubahan suatu titik terhadap waktu pada suatu ruang (disebut ruang fase). Pandang sistem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

dimana  $\mathbf{x}(t)$  menyatakan keadaan sistem pada waktu  $t$  dan  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  adalah fungsi kontinu dalam  $t$  dan terdiferensialkan secara kontinu pada  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{f}$  disebut sebagai fungsi dinamik.

### 2.1. Kestabilan Sistem Non Linier

Diberikan sistem nonlinier sebagai berikut:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (2.2)$$

Untuk menganalisis kestabilan dari sistem persamaan diferensial nonlinier, digunakan metode pelinieran dengan matriks Jacobian. Linearisasi dilakukan pada sistem nonlinear untuk mengetahui perilaku sistem di sekitar titik ekuilibrium sistem tersebut. Proses linierisasi dapat dilakukan dengan menggunakan deret Taylor untuk mencari suatu hampiran solusi di sekitar titik ekuilibrium.

**Definisi 2.1.** [11] Misalkan  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  adalah fungsi yang ditulis dengan bentuk komponen dari sistem persamaan ( $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ) dan andaikan terdapat turunan parsial pertama dari masing-masing komponen fungsi tersebut, yaitu misalkan  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  ada untuk  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , maka matriks Jacobian dari  $f$  adalah

$$J(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{\mathbf{x}})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\bar{\mathbf{x}})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\bar{\mathbf{x}})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\bar{\mathbf{x}})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\bar{\mathbf{x}})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\bar{\mathbf{x}})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\bar{\mathbf{x}})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\bar{\mathbf{x}})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\bar{\mathbf{x}})}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

**Definisi 2.2.** [9] Diberikan matriks Jacobian  $J(\bar{\mathbf{x}})$ . Sistem linier  $\dot{\mathbf{y}} = J(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{y}$  disebut linierisasi dari sistem  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  di sekitar titik  $\bar{\mathbf{x}}$ .

Misal diberikan  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , dengan  $(k \leq n)$  titik ekuilibrium di sekitar matriks Jacobian  $J(\bar{\mathbf{x}})$ , maka :[10].

- (1) Titik ekuilibrium  $\bar{\mathbf{x}}$  dikatakan stabil jika dan hanya jika  $Re(\lambda_j) \leq 0$  untuk setiap  $j = 1, 2, \dots, k$ , dan jika setiap nilai eigen imajiner dengan  $Re(\lambda_j) = 0$  maka multiplisitas aljabar dan geometri harus sama.
- (2) Titik ekuilibrium  $\bar{\mathbf{x}}$  dikatakan stabil asimtotik jika dan hanya jika  $Re(\lambda_j) < 0$  untuk setiap  $j = 1, 2, \dots, k$ .
- (3) Titik ekuilibrium  $\bar{\mathbf{x}}$  dikatakan tidak stabil jika dan hanya jika terdapat paling sedikit satu  $Re(\lambda_j) > 0$  untuk  $j = 1, 2, \dots, k$ .

**Definisi 2.3.** [9] Solusi dari sistem ( $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ) dimana  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ , ditulis sebagai  $\phi(t) = (x(t), y(t))$ , merupakan kurva solusi pada bidang  $xy$ . Kurva solusi ini disebut dengan trajektori atau orbit.

**Definisi 2.4.** [9] Potret fase adalah suatu gambar dua dimensi yang memperlihatkan perilaku dari sistem ( $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ) yang ditentukan dari  $x$  dan  $y$  yang berubah terhadap waktu  $t$ .

Tipe potret fase dapat diklasifikasikan berdasarkan nilai-nilai eigen dari matrik Jacobiannya. Klasifikasi potret fase di sekitar titik ekuilibrium dapat dinyatakan sebagai berikut [9]:

- (1) Nilai eigen riil yang berbeda ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ )

Perhatikan persamaan di bawah :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda_1 x, \\ \dot{y} &= \lambda_2 y. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Solusi umum untuk sistem persamaan (2.3) adalah  $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}$  dan  $y(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}$ , dimana  $C_1$  dan  $C_2$  adalah konstanta sebarang. Tipe-tipe titik ekuilibrium yang bergantung pada nilai eigen di atas adalah

- (a) Untuk nilai eigen berbeda, riil, dan negatif, titik ekuilibriumnya disebut *node* stabil.
- (b) Untuk nilai eigen berbeda, riil, dan positif, titik ekuilibriumnya disebut *node* tidak stabil.

- (c) Untuk nilai eigen berbeda, dimana satu nilai eigen positif sedangkan yang lain bernilai negatif, titik ekuilibriumnya disebut *saddle point* dan tidak stabil.
- (2) Nilai eigen sama ( $\lambda_1 = \lambda_2$ )
- (a) Jika nilai eigen berulang dan mempunyai dua vektor eigen yang bebas linier, maka titik ekuilibrium disebut *proper node*.
- (b) Jika nilai eigen berulang dan mempunyai satu vektor eigen yang bebas linier, maka titik ekuilibrium disebut *improper node*.
- (3) Nilai eigen kompleks ( $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ )  
Perhatikan Persamaan berikut :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha x + \beta y, \\ \dot{y} &= -\beta x + \alpha y.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Sistem persamaan (2.4) dapat ditransformasikan ke dalam bentuk koordinat polar, dimana  $x = r \cos \theta$  dan  $y = r \sin \theta$ . Jika diberikan  $r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}$  dan  $r^2\dot{\theta} = x\dot{y} - y\dot{x}$  maka sistem persamaan (2.4) dapat diubah menjadi

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \alpha r, \\ \dot{\theta} &= -\beta.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Kestabilan titik ekuilibrium bergantung pada nilai  $\alpha$  dan  $\beta$ , yaitu:

- (a) jika  $\alpha > 0$  maka titik ekuilibrium dikatakan fokus tidak stabil.
- (b) jika  $\alpha = 0$  maka titik ekuilibrium dikatakan center.
- (c) jika  $\alpha < 0$  maka titik ekuilibrium dikatakan fokus stabil.
- (d) jika  $\alpha = 0$  dan  $\beta < 0$  maka trajektori bergerak berlawanan arah jarum jam sekitar titik ekuilibrium.
- (e) jika  $\alpha = 0$  dan  $\beta > 0$  maka trajektori bergerak searah jarum jam sekitar titik ekuilibrium.

## 2.2. Model Prey-Predator

Model *prey-predator* Lotka-Volterra menyatakan hubungan fungsional antara perubahan ukuran populasi *prey* dan *predator* pada saat sekarang bergantung pada ukuran populasi *prey*  $x(t)$  dan ukuran populasi *predator*  $y(t)$  pada saat waktu  $t$ . Untuk membuat sebuah model matematika yang menggambarkan interaksi antara dua spesies, maka diasumsikan [2]:

- (1) Jika *prey* dan *predator* tidak saling berinteraksi, maka ketika *predator* tidak ada, pertumbuhan *prey* meningkat, dan ketika *prey* tidak ada, *predator* akan mati. Laju perubahan *prey* dan *predator* dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax, \\ \dot{y} &= -by,\end{aligned}\tag{2.6}$$

dimana  $a$  adalah laju pertumbuhan populasi *prey* dan  $b$  adalah laju kematian *predator*, dengan  $a, b > 0$ .

- (2) Jika *prey* dan *predator* saling berinteraksi, maka jumlah *prey* akan berkurang karena dimakan *predator* dan pengurangannya adalah sebesar  $\alpha xy$ , dimana  $\alpha > 0$ . Sebaliknya, jumlah *predator* akan bertambah karena memakan *prey* dengan penambahan sebesar  $\beta xy$ , dimana  $\beta > 0$ . Laju perubahan *prey* dan *predator* dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - \alpha xy, \\ \dot{y} &= -by + \beta xy. \end{aligned} \tag{2.7}$$

### 3. Pembahasan

#### 3.1. Model Prey-Predator Holling Tipe III

Berdasarkan model *prey-predator* yang telah diperoleh sebelumnya, yaitu pada persamaan (2.7), maka untuk mengendalikankan populasi *prey* yang tumbuh tanpa batas, ditambahkan fungsi logistik yang berfungsi untuk menghambat pertumbuhan populasi *prey* tersebut, sehingga persamaan (2.7) dapat diubah menjadi bentuk

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \alpha xy, \\ \dot{y} &= -by + \beta xy, \end{aligned} \tag{3.1}$$

dimana  $K$  adalah daya tampung atau kemampuan ekosistem untuk menahan populasi *prey* agar tetap maksimum. Persamaan (3.1) disebut sebagai model *prey-predator* Holling tipe I.

Selanjutnya, misal terjadi kejenuhan pada *predator* dalam memangsa *prey*, maka *predator* membutuhkan waktu dalam memburu *prey* sehingga persamaan (3.1) dapat diubah menjadi

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha xy}{1 + mx}, \\ \dot{y} &= -by + \frac{\beta xy}{1 + mx}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

dimana  $m$  adalah tingkat kejenuhan *predator*. Persamaan (3.2) ini disebut sebagai model *prey-predator* Holling tipe II.

Selanjutnya, karena kejenuhan *predator* dalam memangsa, maka *predator* membutuhkan waktu dalam memangsa. Misalnya, populasi *prey* mempertahankan diri dari serangan *predator* dan membuat *prey* susah untuk diburu sehingga *predator* mencari mangsa lain. Dikarenakan itu pertumbuhan *prey* meningkat dan persamaan (3.2) dapat diubah menjadi bentuk

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha x^2 y}{1 + mx^2}, \\ \dot{y} &= -by + \frac{\beta x^2 y}{1 + mx^2}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Persamaan (3.3) disebut dengan model *prey-predator* Holling tipe III.

### 3.2. Analisis Kestabilan Model

Dalam penelitian ini, akan dibahas analisis kestabilan model *prey-predator* Holling tipe III. Terdapat tiga titik ekuilibrium pada model (3.3), yaitu :  $E_1 = (0, 0)$ ,

$$E_2 = (K, 0), \text{ dan } E_3 = \left( \sqrt{\frac{b}{\beta - bm}}, \frac{a \left( 1 - \frac{\sqrt{\frac{b}{\beta - bm}}}{K} \right) \left( \frac{bm}{\beta - bm} + 1 \right)}{\alpha \sqrt{\frac{b}{\beta - bm}}} \right).$$

Selanjutnya dengan melinierisasi sistem (3.3) diperoleh Matriks Jacobian

$$J = \begin{bmatrix} a - \frac{2ax}{K} - \frac{2\alpha xy}{(1+mx^2)^2} & \frac{-\alpha x^2}{1+mx^2} \\ \frac{2\beta xy}{(1+mx^2)^2} & -b + \frac{\beta x^2}{1+mx^2} \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Matriks Jacobian untuk titik ekuilibrium  $E_1 = (0, 0)$  adalah

$$J_{E1} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

Matriks Jacobian untuk titik ekuilibrium  $E_2 = (K, 0)$  adalah

$$J_{E2} = \begin{bmatrix} -a & \frac{-\alpha x^2}{1+mx^2} \\ 0 & -b + \frac{\beta K^2}{1+mK^2} \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

Matriks Jacobian untuk titik ekuilibrium  $E_3$  adalah

$$J_{E3} = \begin{bmatrix} a - \frac{2a\sqrt{S}}{K} - \frac{2a \left( 1 - \frac{\sqrt{S}}{K} \right)}{1+mS} & \frac{-\alpha b}{(\beta - bm)(1+mS)} \\ \frac{2a\beta \left( 1 - \frac{\sqrt{S}}{K} \right)}{\alpha(1+mS)} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

dimana  $S = \frac{b}{\beta - bm}$ .

Persamaan karakteristik dari Matriks Jacobian  $J_{E1}$  adalah

$$\begin{aligned} |J_{E1} - \lambda I| &= 0 \\ \begin{vmatrix} a - \lambda & 0 \\ 0 & -b - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ (\lambda - a)(\lambda + b) &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

sehingga diperoleh nilai-nilai eigennya, yaitu :  $\lambda_1 = a$  dan  $\lambda_2 = -b$ .

Persamaan karakteristik dari Matriks Jacobian  $J_{E2}$  adalah

$$\begin{aligned} |J_{E2} - \lambda I| &= 0 \\ \begin{vmatrix} -a - \lambda & 0 \\ 0 & -b + \frac{\beta K^2}{1+mK^2} - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ (\lambda + a) \left( \lambda + b - \frac{\beta K^2}{1+mK^2} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

sehingga diperoleh nilai-nilai eigennya, yaitu :  $\lambda_1 = -a$  dan  $\lambda_2 = -b + \frac{\beta K^2}{1+mK^2}$ .

Persamaan karakteristik dari Matriks Jacobian  $J_{E_3}$  adalah

$$\begin{aligned}
 & |J_{E_3} - \lambda I| = 0 \\
 & \begin{vmatrix} a - \frac{2a\sqrt{S}}{K} - \frac{2a(1-\frac{\sqrt{S}}{K})}{1+mS} - \lambda & \frac{ab}{(\beta-bm)(1+mS)} \\ \frac{2a\beta(1-\frac{\sqrt{S}}{K})}{\alpha(1+mS)} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \\
 & \lambda^2 - \left( a - 2a\frac{(\sqrt{S}-K)mb + K\beta}{\beta K} \right) \lambda + \frac{2ab\beta(1-\frac{\sqrt{S}}{K})}{\beta - bm} = 0,
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

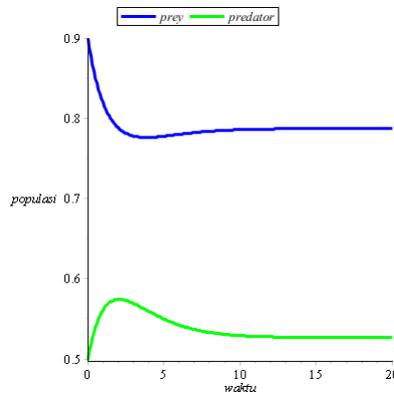
sehingga diperoleh nilai-nilai eigennya

$$\lambda_{1,2} = \frac{\left( a - 2a\frac{(\sqrt{S}-K)mb + K\beta}{\beta K} \right) \pm \sqrt{\left( a - 2a\frac{(\sqrt{S}-K)mb + K\beta}{\beta K} \right)^2 - 4\frac{2ab\beta(1-\frac{\sqrt{S}}{K})}{\beta - bm}}}{2}.$$

Kestabilan titik ekuilibrium  $E_1$ , dapat dilihat bahwa  $\lambda_1 > 0$  dan  $\lambda_2 < 0$ , maka titik ekuilibrium  $E_1$  bertipe *saddle* yang bersifat tidak stabil. Selanjutnya kestabilan titik ekuilibrium  $E_2$ , Dapat dilihat bahwa kestabilan titik ekuilibrium  $E_2$  bergantung pada nilai  $-b + \frac{\beta K^2}{1+mK^2}$ . Jika nilai  $-b + \frac{\beta K^2}{1+mK^2} < 0$ , maka titik ekuilibrium  $E_2$  bertipe *node* yang stabil asimtotik, sebaliknya jika  $-b + \frac{\beta K^2}{1+mK^2} > 0$ , maka titik ekuilibrium  $E_2$  bertipe *saddle* yang bersifat tidak stabil. Kemudian kestabilan titik ekuilibrium  $E_3$ , bergantung pada nilai  $a, b, \alpha, \beta, m$ , dan  $K$ .

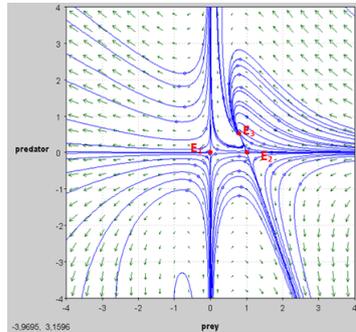
### 3.3. Simulasi Numerik

Untuk mengklarifikasi hasil analitik, maka dilakukan simulasi numerik. Misalkan parameter yang digunakan adalah sebagai berikut:  $a = 1.1, b = 0.7, \alpha = 0.6, \beta = 1.2, K = 1, m = 0.1$ , nilai awal  $x(0) = 1.8$  dan  $y(0) = 0.9$ .



Gambar 1. Kurva solusi sistem *prey-predator*(3.3)

Berdasarkan nilai eigen yang sudah diperoleh pada kajian analitik sebelumnya dan dengan memisalkan parameter di atas, maka untuk titik ekuilibrium  $E_1$  diperoleh  $\lambda_1 = 1, 1$  dan  $\lambda_2 = -0, 7$ . Dari kedua nilai eigen ini dapat disimpulkan bahwa kestabilan sistem disekitar  $E_1$  bertipe *saddle* dan bersifat tidak stabil. Untuk titik ekuilibrium  $E_2$  diperoleh  $\lambda_1 = -1, 1$  dan  $\lambda_2 = 0, 3909$ , sama seperti  $E_1$  kestabilan sistem disekitar  $E_2$  juga bertipe *saddle* dan bersifat tidak stabil. Selanjutnya untuk titik ekuilibrium  $E_3$  diperoleh nilai eigen kompleks,  $\lambda_1 = -0.5363 + 0.1454i$  dan  $\lambda_2 = -0.5363 - 0.1454i$ . Potret fasenya berbentuk spiral, dan kestabilan sistem bergantung pada bagian riil nilai eigennya, yaitu  $\frac{a-2a(\sqrt{S-K})mb+K\beta}{2}$ . Karena nilai tersebut negatif maka kestabilan sistem disekitar titik ekuilibrium  $E_3$  adalah stabil asimtotik.



Gambar 2. Potrait fasa sistem *prey-predator* (3.3)

Pada Gambar 2 dapat dilihat bahwa kestabilan sistem disekitar titik ekuilibrium  $E_1 = (0, 0)$  tidak stabil, hal ini terlihat dari pergerakan arah medan vektor disekitar titik ekuilibrium  $E_1$ . Arah medan vektor tersebut bergerak menjauhi titik ekuilibrium. Selanjutnya untuk titik ekuilibrium  $E_2 = (K, 0)$ , juga terlihat tidak stabil. Karena arah medan vektor menjauhi titik ekuilibrium. Untuk titik ekuilibrium  $E_3 = (x^*, y^*)$  dapat dilihat bahwa arah medan vektor disekitar titik ekuilibrium bergerak mendekati titik ekuilibrium  $E_3$ . Oleh karena itu, kestabilan sistem disekitar titik ekuilibrium  $E_3$  dikatakan stabil asimtotik.

#### 4. Kesimpulan

Pada penelitian ini dijelaskan model *prey-predator* dengan adanya batasan pertumbuhan *prey* yang memuat fungsi respon Holling tipe III. Model tersebut dinyatakan sebagai persamaan diferensial biasa nolinier orde satu

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha x^2 y}{1 + mx^2}, \\ \dot{y} &= -by + \frac{\beta x^2 y}{1 + mx^2}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

Terdapat tiga titik ekuilibrium dari model (4.1), yaitu:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad E_1 &= (0, 0), \\
 (2) \quad E_2 &= (K, 0), \\
 (3) \quad E_3 &= \left( \sqrt{\frac{b}{\beta - bm}}, \frac{a \left( 1 - \frac{\sqrt{\frac{b}{\beta - bm}}}{K} \right) \left( \frac{bm}{\beta - bm} + 1 \right)}{\alpha \sqrt{\frac{b}{\beta - bm}}} \right).
 \end{aligned}$$

Dari analisis kestabilan model (4.1), maka dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium  $E_1$  berbentuk *saddle* yang bersifat tidak stabil. Tipe dan kestabilan titik ekuilibrium  $E_2$  bergantung pada nilai  $-b + \frac{\beta K^2}{1+mK^2}$ , yaitu jika nilai  $-b + \frac{\beta K^2}{1+mK^2} < 0$ , maka titik ekuilibrium  $E_2$  bertipe *node* yang bersifat stabil asimtotik, sebaliknya jika  $-b + \frac{\beta K^2}{1+mK^2} > 0$ , maka titik ekuilibrium  $E_2$  bertipe *saddle* yang bersifat tidak stabil. Selanjutnya, tipe dan kestabilan titik ekuilibrium  $E_3$  bergantung pada nilai  $a, b, \alpha, \beta, m$ , dan  $K$ . Hasil analitik yang diperoleh dikonfirmasi dengan hasil simulasi numerik yang menampilkan grafik solusi dan potret fase dari model (4.1).

### Daftar Pustaka

- [1] Anton, H., and Rorres, C. 2010. *Elementary Linear Algebra Applications Version*. Tenth Edition. Florida : John Willey and Sonc, Inc.
- [2] Beals, M., Gross, L. 1999. *Predator-prey dynamics : Lotka-Volterra*. <http://www.tiem.utk.edu/~gross/bioed/bealsmodules/predator-prey.html>. [19 Februari 2020].
- [3] Dawes, J.H.P and Souza, M.O. 2013. A derivative of Holling's type I, II, and III functional responses in predator-prey systems. *Journal of Theoretical Biology* 327 :11 – 22
- [4] Finizio, N, G. Ladas. 1998. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Edisi Kedua. Terjemahan Bahasa Indonesia. Erlangga: Jakarta.
- [5] Gasull, A., Kooij, R.E., and Torregrosa, J. 1997. Limit cycle in the Holling-Tanner model. *Public Math* 41: 149 – 167.
- [6] Huang, J., Chen, F., and Zhong, L. 2006. Stability analysis of prey-predator model with holling type III response function incorporating a prey refuge. *Applied Mathematics and Computer*, 182 :672 – 682.
- [7] Keeling, M.J. and Rohani, P. 2008. *Modeling Infectious Disease: In Humans and Animals*. Princenton University Press.
- [8] Kelley, W.G and Peterson, A.C. 2010. *The Theory of Differential Equations*. Springer-Verlag, New York.
- [9] Lynch, Stephen. 2007. *Dynamical System with Application Using Mathematics*. Birkhuser Boston. Cambridge.
- [10] Perko, Lawrence. 2000. *Differential Equations and Dynamical System Third Edition*. New York: Springer.
- [11] Tu PNV. 1994. *Dynamical System: An Introduction With Applications in Economic and Biology*. New York: Springer-Verlag.
- [12] Wang, x., Peng, M., and Liu, x. 2015. Stability and Hopf bifurcation analysis of a ratio-dependent predatorprey model with two time delays and Holling type III functional response. *Applied Mathematics and Computer*, 268: 496 – 508.