Jurnal Matematika UNAND
Vol. **10** No. **1** Hal. 38 – 45
Edisi Januari 2021
ISSN : 2303–291X
e-ISSN : 2721–9410

PELABELAN TOTAL SISI AJAIB SUPER PADA GRAF TERHUBUNG 3-REGULER

ADE NGESTU SULISTIO, LYRA YULIANTI*, NARWEN
Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : adengestu50@gmail.com, lyra@sci.unand.ac.id, narwen@sci.unand.ac.id

Diterima 15 Desember 2020 Direvisi 29 Desember 2020 Dipublikasikan 12 Januari 2021

Abstrak. Suatu pelabelan total sisi ajaib pada graf G dengan p titik dan q sisi adalah suatu fungsi bijektif $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \cdots, p + q\}$ sedemikian sehingga $f(u) + f(v) + f(uv) = k$, untuk setiap $uv \in E(G)$ dengan k konstanta bilangan bulat positif. Suatu pelabelan total dikatakan sebagai pelabelan super jika $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \cdots, p\}$. Pada penulisan ini dikaji tentang pelabelan total sisi ajaib super pada graf terhubung 3-reguler.

Kata Kunci: Pelabelan graf, graf reguler, pelabelan sisi ajaib super

1. Pendahuluan

Teori graf merupakan salah satu cabang dalam ilmu matematika yang sering digunakan untuk membantu menyelesaikan suatu permasalahan dalam kehidupan nyata. Graf merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi. Salah satu kajian dalam teori graf adalah pelabelan. Pelabelan merupakan suatu pemetaan satu-satu yang memetakan setiap himpunan titik dan setiap himpunan sisi ke bilangan asli yang disebut label. Dalam [2], pelabelan yang banyak dibahas adalah pelabelan titik (*vertex labeling*), pelabelan sisi (*edge labeling*), dan pelabelan total (*total labeling*).

Pada pelabelan terdapat istilah bobot titik *(vertex weight)* yakni jumlah label titik dan label semua sisi yang terkait dengan titik tersebut. Untuk suatu sisi uv yang ada di graf tersebut, jumlah label sisi dan label dua titik yang menempel pada sisi disebut bobot sisi *(edge weight)* yang dinotasikan dengan $w(uv)$. Dalam [3] dinyatakan bahwa konsep pelabelan ajaib telah diperkenalkan oleh Kotzig dan Rosa yaitu dengan mendefinisikan suatu pelabelan total sisi ajaib dari graf G sebagai fungsi bijektif $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \cdots, p+q\}$ dimana p merupakan banyak titik dan q merupakan banyak sisi, sedemikian sehingga untuk setiap sisi $uv \in E(G)$, bobot sisi $w(uv) = f(u) + f(uv) + f(v) = k$, dimana k adalah suatu bilangan

*penulis korespondensi

bulat positif. Suatu pelabelan total sisi ajaib f dikatakan sebagai suatu pelabelan total sisi ajaib super dari graf G apabila jika $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \cdots, p\}$ dan $f : E(G) \rightarrow \{p+1, p+2, p+3, \cdots, p+q\}$.

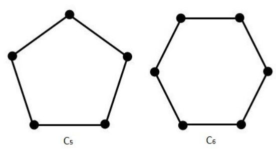
Misalkan terdapat suatu graf terhubung G. Misalkan terdapat suatu titik v di G. Derajat dari titik v di G didefinisikan sebagai banyaknya titik yang bertetangga dengan titik v di G. Misalkan r merupakan derajat yang sama pada setiap titik di G. Jika setiap titik di G mempunyai derajat yang sama, maka G dikatakan sebagai graf terhubung r- reguler.

Graf *fullerene* adalah suatu graf planar 3-reguler terhubung yang memuat bentuk pentagon dan heksagon. Graf planar 3-reguler terhubung adalah graf terhubung yang setiap titiknya berderajat 3 dan setiap sisinya tidak saling berpotongan [1]. Pada penulisan ini akan dikaji kembali jurnal [5] tentang pelabelan total sisi ajaib super pada graf terhubung 3-reguler. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa graf *Buckminsterfullerene* B_{60}, yang merupakan salah satu contoh graf terhubung 3-reguler, tidak memuat pelabelan total sisi ajaib super.

2. Beberapa Konsep Dasar

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan terurut $G = (V(G), E(G))$, dimana $V(G)$ adalah himpunan titik *(vertex)* yang tak boleh kosong di G dan $E(G)$ adalah suatu himpunan sisi *(edge)* yang terdiri dari pasangan terurut dari titik-titik yang berbeda dari $V(G)$. Kardinalitas himpunan $V(G)$ yang dinotasikan dengan $|V(G)|$ disebut orde dari G, dan kardinalitas himpunan $E(G)$ yang dinotasikan dengan $|E(G)|$ disebut ukuran *(size)* dari G.

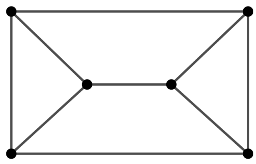
Graf lingkaran *(cycle)* dengan n titik, dinotasikan C_n untuk $n \geq 3$, adalah suatu graf terhubung yang setiap titiknya berderajat dua.



Gambar 1. Graf Lingkaran C_5 dan C_6.

Graf reguler *(regular graph)* adalah graf yang setiap titiknya mempunyai derajat yang sama. Apabila derajat setiap titik adalah r maka graf tersebut disebut sebagai graf r-reguler. Misalkan G adalah graf r-reguler dengan p titik, maka banyak derajat titik adalah 2 kali banyak sisi. Sehingga banyak sisi dari graf r-reguler adalah $\frac{pr}{2}$.

Graf kubik adalah graf reguler yang setiap titiknya berderajat 3. Diberikan graf lingkaran dengan n titik yang ditulis C_n, dengan $n \geqslant 3$. Kemudian dibentuk graf kubik $C_{n,n}$ yang berasal dari dua graf lingkaran yaitu C_n^1 dengan n titik, dan C_n^2 dengan n titik, dimana C_n^1 menyatakan graf lingkaran pertama dan C_n^2 menyatakan graf lingkaran kedua.



Gambar 2. Graf reguler dengan setiap titik berderajat 3

Dapat dilihat bahwa himpunan titik graf kubik $C_{n,n}$ adalah

$$V(C_{n,n}) = \{v_{1i}, v_{2i} | 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

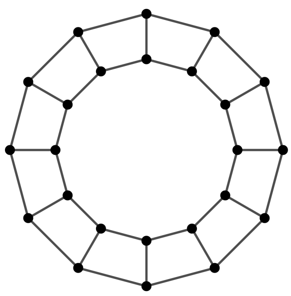
dengan banyak titik $C_{n,n}$ adalah $|V(C_{n,n})| = n+n = 2n$. Sedangkan himpunan sisi dari graf $C_{n,n}$ adalah

$$E(C_{n,n}) = E(C_n^1) \cup E(C_n^2) \cup \{v_{1i}v_{2i} | 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

dimana himpunan sisi dari graf C_n^1,C_n^2 adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E(C_n^1) &= \{v_{1(s-1)}v_{1s}, v_{1n}v_{11} | 2 \leqslant s \leqslant n\}, \text{ dan} \\ E(C_n^2) &= \{v_{2(t-1)}v_{2t}, v_{2n}v_{21} | 2 \leqslant t \leqslant n\}. \end{aligned}$$

Banyak sisi dari graf $C_{n,n}$ adalah n sisi pada graf C_n^1, n sisi pada graf C_n^2, dan n sisi yang menghubungkan graf C_n^1 dengan graf C_n^2, sehingga $|E(C_{n,n})| = n+n+n = 3n$. Definisi dan terminologi graf tersebut diambil dari [3].



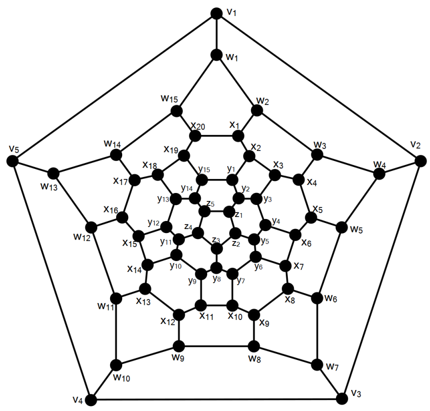
Gambar 3. Graf Kubik $C_{12,12}$.

Graf $fullerene$ memiliki beberapa bentuk, diantaranya adalah graf *fullerene icosahedral* dan graf *fullerene nanotube*. Graf $Buckminsterfullerene$ merupakan salah satu jenis dari graf $fullerene$ nanotube dengan banyak titik 60, dan dinotasikan sebagai B_{60} [1].

Himpunan titik dan himpunan sisi dari graf *Buckminsterfullerene* B_{60} adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
V(B_{60}) &= \{v_i \mid 1 \le i \le 5\} \cup \{w_j \mid 1 \le j \le 15\} \cup \{x_k \mid 1 \le k \le 20\} \\
&\cup \{y_l \mid 1 \le l \le 15\} \cup \{z_m \mid 1 \le m \le 5\},\ dan \\
E(B_{60}) &= \{v_i v_{i+1} \mid 1 \le i \le 4\} \cup \{v_1 v_5\} \cup \{w_j w_{j+1} \mid 1 \le j \le 14\} \cup \{w_1 w_{15}\} \\
&\cup \{x_k x_{k+1} \mid 1 \le k \le 19\} \cup \{x_1 x_{20}\} \cup \{y_l y_{l+1} \mid 1 \le l \le 14\} \cup \{y_1 y_{15}\} \\
&\cup \{z_m v_{m+1} \mid 1 \le m \le 4\} \cup \{z_1 z_5\} \cup \{v_i w_{3i-2}\} \cup \{z_m y_{3m-1}\} \\
&\cup \{x_1 w_2, x_4 w_3, x_5 w_5, x_8 w_6, x_9 w_8, x_{12} w_9, x_{13} w_{11}, x_{16} w_{12}, x_{17} w_{14}, \\
&\quad x_{20} w_{15}, y_1 x_2, y_3 x_3, y_4 x_6, y_6 x_7, y_7 x_{10}, y_9 x_{11}, y_{10} x_{14}, y_{12} x_{15}, y_{13} x_{18}, \\
&\quad y_{15} x_{19}\}.
\end{aligned}$$

Dapat dilihat pada himpunan titik dan himpunan sisi, bahwa banyak titik dari graf *Buckminsterfullerene* B_{60} adalah 60 titik dan banyak sisinya adalah 90.



Gambar 4. Graf *Buckminsterfullerene* B_{60}

3. Pelabelan Total Sisi Ajaib Super Pada Graf Terhubung 3-Reguler

Pelabelan merupakan pemetaan dari unsur-unsur pada suatu graf yang berupa titik, sisi, atau titik dan sisi ke bilangan bulat positif. Misalkan graf G adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Suatu pelabelan total sisi ajaib pada graf G dengan p titik dan q sisi adalah suatu fungsi bijektif $f : V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, 3, \cdots, p+q\}$ sedemikian sehingga $f(u) + f(v) + f(uv) = k$, untuk setiap $uv \in E(G)$ dengan k konstanta bilangan bulat positif. Suatu pelabelan total dikatakan sebagai pelabelan super jika $f : V(G) \to \{1, 2, 3, \cdots, p\}$ [4].

Teorema 3.1 menentukan nilai konstanta ajaib pada suatu pelabelan sisi ajaib super pada graf terhubung r-reguler sisi ajaib super.

Teorema 3.1. *[5] Jika G adalah graf terhubung r-reguler sisi ajaib super dengan banyak titik p dan banyak sisi q, maka q adalah ganjil dan nilai konstanta ajaib dari* *setiap pelabelan sisi ajaib super pada G adalah* $\frac{4p+q+3}{2}$.

Bukti. Misalkan G adalah graf r-reguler sisi ajaib super dengan banyak titik p dan banyak sisi q. Graf terhubung r-reguler sisi ajaib super merupakan graf terhubung r-reguler yang memiliki pelabelan total sisi ajaib super. Dapat didefinisikan suatu pelabelan total sisi ajaib super f pada G sebagai $f : V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, \cdots, p+q\}$ dengan $f(V(G)) = \{1, 2, \cdots, p\}$ merupakan himpunan label titik dari graf G dan $f(E(G)) = \{p+1, p+2, \cdots, p+q\}$ merupakan himpunan label sisi dari graf G.

Bobot sisi pada pelabelan tersebut adalah

$$w(uv) = f(u) + f(v) + f(uv) = k,$$

dimana pada pelabelan total sisi ajaib super pada graf terhubung r-reguler, setiap label titik digunakan sebanyak r, setiap label sisi digunakan sebanyak 1 kali, dan banyak bobot sisi yang digunakan adalah q. Sehingga diperoleh nilai konstanta ajaib k dari pelabelan sisi ajaib super pada graf G adalah

$$\begin{aligned} qk &= \left\{ r \sum_{i=1}^{p} i + \sum_{i=p+1}^{p+q} i \right\} \\ k &= \frac{1}{q} \left\{ r \sum_{i=1}^{p} i + \sum_{i=p+1}^{p+q} i \right\}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

dimana qk menyatakan jumlah semua konstanta ajaib untuk semua sisi. Karena G merupakan graf terhubung r-reguler, maka $q = \frac{pr}{2}$. Sehingga diperoleh bahwa $r = \frac{2q}{p}$.

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{p} i &= 1 + 2 + \cdots + (p-1) + p \\ &= \frac{p(p+1)}{2} && (3.2) \\ \sum_{i=p+1}^{p+q} i &= (p+1) + (p+2) + \cdots + (p+q-1) + (p+q) \\ &= pq + \frac{q(q+1)}{2} && (3.3) \end{aligned}$$

Selanjutnya akan disubstitusi nilai r, Persamaan (3.2), dan Persamaan (3.3) ke

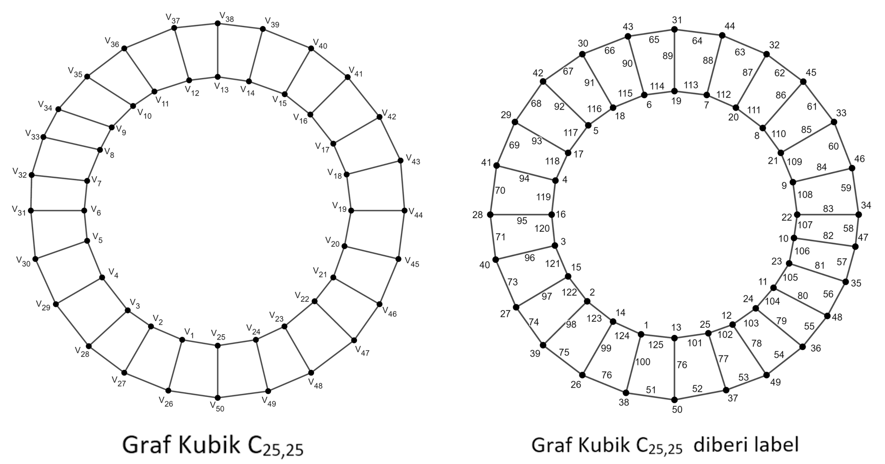
Persamaan (3.1), sehingga diperoleh:

$$
\begin{aligned}
k &= \frac{1}{q}\left\{\frac{2q}{p}\left(\frac{p(p+1)}{2}\right)+\left(pq+\frac{q(q+1)}{2}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{q}\left\{\left(\frac{2q(p+1)}{2}\right)+\left(pq+\frac{q(q+1)}{2}\right)\right\}\\
&= \left(\frac{2p+2}{2}\right)+\left(p+\frac{q+1}{2}\right)\\
&= \frac{2p+2+2p+q+1}{2}\\
&= \frac{4p+q+3}{2}
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

Berdasarkan dari Persamaan (3.4) agar diperoleh suatu bilangan bulat k, maka haruslah q bernilai ganjil. $\square$

Berikut diberikan contoh pelabelan total sisi ajaib super pada suatu graf terhubung 3-reguler yang memenuhi Teorema 3.1.

Misalkan terdapat graf G seperti pada Gambar 5. Graf G merupakan graf Kubik $C_{25,25}$. Berdasarkan banyak titik dan banyak sisi dari G tersebut dapat didefinisikan pelabelan total sisi ajaib super adalah $f: V(G)\cup E(G) \to \{1,2,3,\cdots,125\}$ dengan $f : V(G) \to \{1,2,3,\cdots,50\}$ merupakan himpunan label titik dan $f : E(G) \to \{51,52,53,\cdots,125\}$ merupakan himpunan label sisi. Sedemikian sehingga $f(v_1) + f(v_2) + f(v_1v_2) = k$, untuk setiap $v_1v_2 \in E(G)$ dan untuk suatu konstanta k.



Gambar 5. Pelabelan total sisi ajaib super pada graf kubik $C_{25,25}$.

Dengan menggunakan Teorema 3.1 nilai konstanta ajaib pada graf G diperoleh:

$$\begin{aligned} k &= \frac{4(p)+q+3}{2} \\ &= \frac{4(50)+75+3}{2} \\ &= \frac{200+75+3}{2} \\ &= \frac{278}{2} = 139. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} f(v_1)+f(v_2)+f(v_1v_2) &= 1+14+124 = 139, \\ f(v_1)+f(v_{25})+f(v_1v_{25}) &= 1+13+125 = 139, \\ &\vdots \\ f(v_{48})+f(v_{49})+f(v_{48}v_{49}) &= 49+37+53 = 139, \\ f(v_{49})+f(v_{50})+f(v_{49}v_{50}) &= 37+50+52 = 139. \end{aligned}$$

Karena untuk setiap sisi berlaku bahwa hasil penjumlahan dua label titik dan label sisi bernilai sama, yaitu $k = 139$, serta karena $f(V(G)) = \{1, 2, 3, \cdots, 50\}$ maka graf G memiliki pelabelan total sisi ajaib super dengan konstanta ajaib $k = 139$.

Akibat 3.2. *Misalkan terdapat graf $Buckminsterfullerene$ B_{60}. Maka graf $Buckminsterfullerene$ B_{60} tidak memuat suatu pelabelan total sisi ajaib super.*

Bukti. Misalkan G adalah graf $Buckminsterfullerene$ B_{60}. Graf G merupakan graf terhubung 3-reguler. Graf G mempunyai banyak sisi genap yaitu 90. Berdasarkan Persamaan (3.4) diperoleh bahwa k bukan bilangan bulat. Maka berdasarkan Teorema 3.0.1, graf $Buckminsterfullerene$ B_{60} tidak memuat pelabelan total sisi ajaib super. □

4. Kesimpulan

Pada tulisan ini telah dikaji kembali artikel [5] tentang syarat agar suatu graf terhubung 3-reguler mempunyai suatu pelabelan total sisi ajaib super. Selanjutnya, diberikan contoh graf terhubung 3-reguler yang memenuhi yaitu graf Kubik $C_{25,25}$ dan yang tidak memenuhi yaitu graf $Buckminsterfullerene$ B_{60}.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terimakasih kepada Dr. Susila Bahri, Dr. Des Welyyanti, dan Dr. Shelvi Ekariani yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Andova,V., Kardos, F., dan Skrekovski, R. 2014. Fullerene Graphs and Some Relevant Graph Invariants. *Topics in Chemical Graph Theory, University of*

Kragujevac and Faculty of Science. Kragujevac. pp:39 – 54, *Mathematical Chemistry Monographs.* 978-86-6009-027-2.

[2] Baca, M dan Miller, M. 2008. *Super Edge-Antimagic Graph : A wealth of Problems and Some Solutions.* Brown Walker Press, USA.

[3] Chartrand, G dan Zhang,P. 2005. *Introduction to Graph Theory.* Mc Graw-Hill Press, Boston.

[4] H. Enomoto, A. S. Llado, T.Takamigawa dan G. Ringel. 1998. Super Edge magic Graph. *SUT Journal of Mathematics*, **2**, 105 – 109.

[5] R. M. Figueroa-Centeno, R. Ichisima dan F. A. Muntaner-Batle. 2001. *The place a of super edge-magic labelings among other classes of labellings.* Discrete Math, **231**, 153 – 168.