PELABELAN TOTAL TITIK AJAIB SUPER PADA GRAF $C(7, N)$

ASEP TRI SAPUTRA, NARWEN*, EFFENDI

*Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : saaputraa55@gmail.com, narwen@sci.unand.ac.id, effendi@sci.unand.ac.id*

Diterima 15 Desember 2020 Direvisi 29 Desember 2020 Dipublikasikan 12 Januari 2021

Abstrak. Pelabelan merupakan pemetaan bijektif yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan bulat positif. Pelabelan ajaib adalah pelabelan yang mengakibatkan bobot semua titik sama. Bobot titik merupakan jumlah label titik tersebut dengan semua sisi yang terkait dengan titik tersebut. Salah satu jenis graf yang paling umum yaitu graf reguler, yaitu graf dengan derajat semua titiknya sama. Graf reguler berderajat tiga juga biasa disebut dengan graf kubik. Graf $C(7, n)$ dikonstruksi dengan cara menghubungkan tujuh buah graf siklus sedemikian sehingga membentuk graf kubik. Dalam tulisan ini akan dibahas pelabelan total titik ajaib super untuk graf kubik $C(7, n)$.

Kata Kunci: Pelabelan Total Ajaib, Graf Reguler

1. Pendahuluan

Graf dapat diartikan sebagai kumpulan titik (*vertex*) yang dihubungkan satu sama lain melalui sisi atau busur (*edge*). Salah satu topik yang sangat diminati pada graf adalah pelabelan. Pelabelan merupakan pemetaan bijektif yang memasangkan unsur pada graf (titik atau sisi) dengan bilangan bulat positif yang disebut label.

Dalam [4] telah diperoleh bahwa graf $C(3, n)$ memiliki pelabelan total titik ajaib super dengan konstanta ajaib $23n + 2$. Pada tulisan ini akan dicari pelabelan total titik ajaib super untuk graf serupa dengan m lainnya yaitu $C(7, n)$

2. Pelabelan Pada Graf

Suatu pelabelan dari graf $G = (V, E)$ adalah pemetaan bijeksi dari himpunan titik $V(G)$ atau himpunan sisi $E(G)$ atau keduanya titik dan sisi $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan bilangan bulat positif. Jika domain dari pemetaan tersebut adalah himpunan sisi, maka pelabelan dinamakan **pelabelan sisi** (*edge labeling*). Sementara

*penulis korespondensi

jika domain pemetaan adalah himpunan titik, maka pelabelan dinamakan **pelabelan titik** (*vertex labelling*). Jika domain adalah himpunan titik dan himpunan sisi, maka pemetaan tersebut adalah **pelabelan total** (*total labeling*).

Misalkan W merupakan himpunan bobot titik pada G , sebuah fungsi bijeksi $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\}$ dikatakan pelabelan total titik ajaib pada graf G jika semua anggota himpunan W adalah sama. Dimana,

$$W = \{w(x) | w(x) = f(x) + \sum_{y \in N_x} f(xy), \forall x \in V(G)\},$$

dengan N_x merupakan himpunan sisi-sisi yang terkait dengan x .

Suatu pelabelan total f dikatakan sebagai pelabelan super jika himpunan label titik didefinisikan sebagai $f(V(G)) = \{1, 2, \dots, p\}$ dan himpunan label sisi didefinisikan sebagai $f(E(G)) = \{p + 1, p + 2, \dots, p + q\}$. Jika suatu pelabelan memenuhi pelabelan total titik ajaib dan pelabelan super, maka pelabelan tersebut merupakan Pelabelan total titik ajaib super.

3. Graf $C(m, n)$

Dengan $m \geq 3$, diberikan 2 buah graf siklus dengan n titik yang ditulis sebagai C_n^1 dan C_n^m serta $m - 2$ buah graf siklus dengan $2n$ titik yang ditulis sebagai C_{2n}^j , dengan $2 \geq j \geq m - 1$. Kemudian dibentuk graf kubik yang terdiri dari m buah graf siklus tersebut yaitu graf $C_n^1, C_{2n}^2, \dots, C_{2n}^{m-1}, C_n^m$, dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, dengan menghubungkan titik-titik berikut :

- (1) Titik pada C_n^1 dengan C_{2n}^2 , yaitu dengan menambahkan sisi $\{v_i^1 v_{2i-1}^2\}$, dimana $v_i^1 \in V(C_n^1)$ dan $v_{2i-1}^2 \in V(C_{2n}^2)$ untuk $1 \leq i \leq n$.
- (2) Titik pada C_{2n}^j dengan C_{2n}^{j+1} , yaitu dengan menambahkan sisi $\{v_i^j v_i^{j+1}\}$, dimana $v_i^j \in V(C_{2n}^j)$ dan $v_i^{j+1} \in V(C_{2n}^{j+1})$ untuk $i = 2, 4, \dots, 2n, j = 2, 4, \dots, m - 3$.
- (3) Titik pada C_{2n}^j dengan C_{2n}^{j+1} , yaitu dengan menambahkan sisi $\{v_i^j v_i^{j+1}\}$, dimana $v_i^j \in V(C_{2n}^j)$ dan $v_i^{j+1} \in V(C_{2n}^{j+1})$ untuk $i = 1, 3, \dots, 2n - 1, j = 3, 5, \dots, m - 2$.
- (4) Titik pada C_{2n}^{m-1} dengan C_n^m , yaitu dengan menambahkan sisi $\{v_i^{m-1} v_{i/2}^m\}$, dimana $v_i^{m-1} \in V(C_{2n}^{m-1})$ dan $v_{i/2}^m \in V(C_n^m)$ untuk $i = 2, 4, \dots, 2n$.

Sesuai langkah-langkah diatas dapat dikonstruksi bentuk umum graf kubik $C(m, n)$ dengan $m \geq 3, n \geq 3$ seperti pada Gambar 1.

Seperti yang terlihat pada Gambar 1, sebuah graf $C(m, n)$ memiliki masing-masing n buah titik pada siklus terdalam dan terluarnya, sedangkan pada siklus lainnya terdapat masing-masing $2n$ buah titik. Sehingga

$$\begin{aligned} V(C(m, n)) &= V(C_n^1) \cup V(C_n^m) \cup \left(\bigcup_{j=2}^{m-1} V(C_{2n}^j) \right) \\ |V(C(m, n))| &= n + n + 2n(m - 2) \\ &= 2n + 2n(m - 2) \\ &= 2n(m - 1). \end{aligned}$$

Gambar 1. Graf Kubik $C(7, n)$ dan $C(m, n)$.

diperoleh bahwa sebuah graf $C(m, n)$ memiliki $2n(m - 1)$ buah titik. Selanjutnya terdapat sebanyak masing-masing n buah sisi pada siklus terdalam dan terluar dan masing-masing $2n$ sisi pada siklus lainnya. Pada penghubung antar siklus terdapat masing-masing n sisi pada $m - 1$ penghubung. Misalkan bahwa $E(C_p)$ merupakan himpunan sisi-sisi baru yang ditambahkan pada empat langkah konstruksi $C(m, n)$. Maka

$$\begin{aligned}
 E(C(m, n)) &= E(C_n^1) \cup E(C_n^m) \cup \left(\bigcup_{j=2}^{m-1} E(C_{2n}^j) \right) \cup E(C_p), \\
 |E(C(m, n))| &= n + n + 2n(m - 2) + n(m - 1) \\
 &= 2n + 2n(m - 2) + n(m - 1) \\
 &= 2n(m - 1) + n(m - 1) \\
 &= 3n(m - 1)
 \end{aligned}$$

diperoleh bahwa sebuah graf $C(m, n)$ memiliki $3(m - 1)n$ buah sisi.

Dari sifat dan bentuk umum graf $C(m, n)$ sebelumnya, dapat diperoleh bahwa graf $C(7, n)$ memiliki $12n$ buah titik dan $18n$ buah sisi.

4. Pelabelan Total Titik Ajaib Super Pada Graf $C(7, n)$

Pelabelan tiap graf memiliki batasan kemungkinan nilai bobot dalam rentangan tertentu berdasarkan jenis pelabelan. Untuk pelabelan total titik ajaib pada graf $C(7, n)$, batasan konstanta ajaib yang memungkinkan dapat ditentukan oleh Teorema 4.1 berikut.

Teorema 4.1. *Misalkan graf $G = C(m, n)$ dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 3$. Jika m merupakan bilangan ganjil dan terdapat suatu pelabelan total titik ajaib f pada G dengan konstanta ajaib K , maka batasan untuk konstanta ajaib yang memenuhi adalah $\frac{17(m-1)n+4}{2} \leq K \leq \frac{23(m-1)n+4}{2}$.*

Bukti. (Batas Atas)

Misalkan graf $G = C(m, n)$ dengan $m \geq 3$ ganjil dan $n \geq 3$. Asumsikan terdapat

pelabelan total titik ajaib super f dengan suatu bilangan bulat positif K pada graf tersebut. Perhatikan bahwa tiap bobot titik memuat tiga label sisi dan satu label titik, sehingga konstanta ajaib maksimum yang dapat diperoleh adalah pada pelabelan dengan himpunan label minimum pada titik (himpunan label maksimum pada sisi). Pada graf G terdapat $2(m-1)n$ titik dan $3(m-1)n$ sisi, sehingga diperoleh:

$$f(V(G)) = \{1, 2, \dots, 2(m-1)n\}, \text{ dan} \\ f(E(G)) = \{2(m-1)n+1, 2(m-1)n+2, \dots, 2(m-1)n+3(m-1)n\}.$$

Selanjutnya f merupakan pelabelan total titik-ajaib, oleh karena itu bobot tiap titiknya sama dan dapat diperoleh dari penjumlahan masing-masing label titik dengan label tiga sisi terkait. Pada graf G tiap sisi terkait dengan dua titik, sehingga setiap label sisi dihitung dalam dua bobot titik. Oleh karena itu jika bobot tiap titik dijumlahkan, maka nilainya adalah jumlah semua label titik ditambah dengan dua kali jumlah label sisi. Misalkan jumlah semua bobot titik adalah tK , maka tK dapat ditulis sebagai berikut,

$$\begin{aligned} tK &= \sum_{i=1}^{2(m-1)n} f(v_i) + 2 \sum_{i=1}^{3(m-1)n} f(e_i), \text{ dengan } v_i \in V(G) \text{ dan } e_i \in E(G) \\ &= (1 + 2 + \dots + 2(m-1)n) + 2[(2(m-1)n+1) + (2(m-1)n+2) + \dots + \\ &\quad (2(m-1)n+3(m-1)n)] \\ &= (1 + 2 + \dots + 2(m-1)n) + 2[(2(m-1)n+1) + (2(m-1)n+2) + \dots + \\ &\quad (5(m-1)n)]. \end{aligned}$$

Menggunakan rumus deret aritmatika diperoleh:

$$\begin{aligned} tK &= \frac{2(m-1)n}{2} \times (1 + 2(m-1)n) + 2 \times \left(\frac{3(m-1)n}{2} \times [2(m-1)n+1 + 5(m-1)n] \right) \\ &= (m-1)n \times (1 + 2(m-1)n) + 3(m-1)n \times [2(m-1)n+1 + 5(m-1)n] \\ &= (m-1)n \times (1 + 2(m-1)n) + 3(m-1)n \times [7(m-1)n+1] \\ &= (m-1)n \times [1 + 2(m-1)n + 3 \times (7(m-1)n+1)] \\ &= (m-1)n \times [1 + 2(m-1)n + 21(m-1)n+3] \\ &= (m-1)n \times [23(m-1)n+4]. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Pada graf $C(m, n)$ terdapat sebanyak $2(m-1)n$ buah titik. Oleh karena itu jika bobot semua titik sama yaitu K , maka dapat diperoleh persamaan berikut,

$$tK = 2(m-1)nK. \tag{4.2}$$

Dengan membandingkan Persamaan (4.1) dengan Persamaan (4.2) dapat diperoleh,

$$\begin{aligned} 2(m-1)nK &= (m-1)n \times [23(m-1)n+4] \\ K &= \frac{(m-1)n \times [23(m-1)n+4]}{2(m-1)n} \\ &= \frac{23(m-1)n+4}{2}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Karena m merupakan bilangan ganjil, maka untuk sebarang bilangan bulat n pada Persamaan (4.3) berlaku,

$$\begin{aligned} K &= \frac{23(m-1)n+4}{2} \\ &= \underbrace{\frac{23(m-1)n}{2}}_{\text{bulat}} + 2. \end{aligned}$$

Terdapat suatu bilangan bulat positif $K = \frac{23(m-1)n+4}{2}$ untuk konstanta ajaib maksimum pada pelabelan total titik ajaib pada graf $C(m, n)$ dengan m ganjil.

(Batas Bawah)

Untuk konstanta ajaib minimum didapatkan dari pelabelan dengan himpunan label maksimum pada titik (himpunan label minimum pada sisi) dengan cara yang sama dengan mencari bobot maksimum, jumlah bobot minimum tK dapat ditulis,

$$\begin{aligned} tK &= \sum_{i=1}^{2(m-1)n} f(v_i) + 2 \sum_{i=1}^{3(m-1)n} f(e_i), \text{ dengan } v_i \in V(G) \text{ dan } e_i \in E(G) \\ &= (3(m-1)n+1 + 3(m-1)n+2 + \cdots + 3(m-1)n+2(m-1)n) \\ &\quad + 2[1+2+\cdots+3(m-1)n]) \\ &= (3(m-1)n+1 + 3(m-1)n+2 + \cdots + 5(m-1)n) + 2[1+2+\cdots+ \\ &\quad 3(m-1)n]. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan rumus deret aritmatika diperoleh

$$\begin{aligned} tK &= \frac{2(m-1)n}{2} \times (3(m-1)n+1 + 5(m-1)n) + 2 \times \left(\frac{3(m-1)n}{2} \times [1+3(m-1)n] \right) \\ &= (m-1)n \times [8(m-1)n+1] + 3(m-1)n \times [1+3(m-1)n] \\ &= (m-1)n \times (8(m-1)n+1) + 3 \times [1+3(m-1)n] \\ &= (m-1)n \times [8(m-1)n+1+3+9(m-1)n] \\ &= (m-1)n \times [17(m-1)n+4]. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Dengan membandingkan Persamaan (4.2) dengan Persamaan (4.4) diperoleh,

$$\begin{aligned} 2(m-1)nK &= (m-1)n \times [17(m-1)n+4] \\ K &= \frac{(m-1)n \times [17(m-1)n+4]}{2(m-1)n} \\ &= \frac{17(m-1)n+4}{2}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Karena m merupakan bilangan ganjil, maka untuk sebarang bilangan bulat n pada

Persamaan (4.5) berlaku,

$$K = \frac{17(m-1)n+4}{2}$$

$$= \underbrace{\frac{17 \overbrace{(m-1)n}^{\text{genap}}}{2}}_{\text{bulat}} + 2.$$

Terbukti bahwa konstanta ajaib minimum pada pelabelan total titik ajaib pada graf $C(m, n)$ dengan m ganjil adalah $K = \frac{17(m-1)n+4}{2}$. $\square$

Selanjutnya Teorema 4.2 berikut menjamin bahwa sebuah graf kubik $C(7, n)$ memiliki pelabelan total titik ajaib super dengan konstanta ajaib $K^* = 69n + 2$.

Teorema 4.2. Misalkan G merupakan graf $C(7, n)$ dengan $n \geq 3$. Terdapat pelabelan total titik ajaib super f pada G , dimana $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, 12n\}$, $f : E(G) \rightarrow \{12n+1, 12n+2, \dots, 12n+18n\}$ dengan konstanta ajaib $K^* = 69n + 2$.

Bukti. Misalkan graf $G = C(7, n)$ dengan $|V(G)| = 12n$ dan $|E(G)| = 18n$, dan didefinisikan pelabelan $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, 30n\}$ sebagai berikut.

(i) Pelabelan titik v_i^j

$$f(v_i^j) = \begin{cases} i, & \text{untuk } j = 1, i = 1, 2, \dots, n \\ (2j-3)n + \frac{i+1}{2}, & \text{untuk } j = 2, 4, 6, i \equiv 1 \pmod{2} \\ (2j-2)n + \frac{i}{2}, & \text{untuk } j = 2, 4, 6, i \equiv 0 \pmod{2} \\ (2j-2)n + \frac{i+1}{2}, & \text{untuk } j = 3, 5, i \equiv 1 \pmod{2} \\ (2j-3)n + \frac{i}{2}, & \text{untuk } j = 3, 5, i \equiv 0 \pmod{2} \\ 12n, & \text{untuk } j = 7, i = 1 \\ 11n + i - 1, & \text{untuk } j = 7, i \neq 1. \end{cases}$$

(ii) Pelabelan sisi $(v_i^j v_{i+1}^j)$

$$f(v_i^j v_{i+1}^j) = \begin{cases} \frac{53-j}{2}n - i + 1, & \text{untuk } j = 1, 7, i = 1, 2, \dots, n \\ (23+2j)n - \frac{i+1}{2} + 1, & \text{untuk } j = 2, 3, i \equiv 1 \pmod{2} \\ (30-3j)n - \frac{i}{2} + 1, & \text{untuk } j = 2, 3, i \equiv 0 \pmod{2} \\ (38-2j)n - \frac{i+1}{2} + 1, & \text{untuk } j = 4, 5, i \equiv 1 \pmod{2} \\ (15+j)n - \frac{i}{2} + 1, & \text{untuk } j = 4, 5, i \equiv 0 \pmod{2} \\ 25n - \frac{i+1}{2} + 1, & \text{untuk } j = 6, i \equiv 1 \pmod{2} \\ 22n - \frac{i}{2} + 1, & \text{untuk } j = 6, i \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

(iii) Pelabelan sisi ($v_i^j v_h^{j+1}$)

$$f(v_h^j v_i^{j+1}) = \begin{cases} 18n, & \text{untuk } j = 1, i = 1 \\ 17n + i - 1, & \text{untuk } j = 1, i \neq 1 \\ 16n + \frac{i}{2}, & \text{untuk } j = 2, i \equiv 0 \pmod{2} \\ 16n, & \text{untuk } j = 3, i = 1 \\ 15n + \frac{i+1}{2} - 1, & \text{untuk } j = 3, i \equiv 1 \pmod{2}, i \neq 1 \\ 14n + \frac{i}{2}, & \text{untuk } j = 4, i \equiv 0 \pmod{2} \\ 14n, & \text{untuk } j = 5, i = 1 \\ 13n + \frac{i+1}{2} - 1, & \text{untuk } j = 5, i \equiv 1 \pmod{2}, i \neq 1 \\ 12n + \frac{i}{2}, & \text{untuk } j = 6, i \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases} \quad \square$$

Misalkan w_f menyatakan bobot titik dari graf $C(7, n)$. Berdasarkan pelabelan f , bobot titik v_i^j pada graf $C(7, n)$ untuk semua $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j \in \{1, 2, \dots, 7\}$ adalah sebagai berikut,

1. Bobot titik terhadap pelabelan f dari titik v_i^1 , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$w_f(v_i^1) = 0 + 26n + 1 + 26n + 1 + 17n = 69n + 2.$$

2. Bobot titik terhadap pelabelan f dari titik v_i^2 , v_i^3 , v_i^4 , v_i^5 , v_i^6 , $i \in \{1, 3, \dots, 2n-1\}$

$$w_f(v_i^2) = n + 27n + 1 + 24n + 1 + 17n = 69n + 2$$

$$w_f(v_i^3) = 4n + 29n + 1 + 21n + 1 + 15n = 69n + 2$$

$$w_f(v_i^4) = 5n + 30n + 1 + 19n + 1 + 15n = 69n + 2$$

$$w_f(v_i^5) = 8n + 28n + 1 + 20n + 1 + 13n = 69n + 2$$

$$w_f(v_i^6) = 9n + 25n + 1 + 22n + 1 + 13n = 69n + 2.$$

3. Bobot titik terhadap pelabelan f dari titik v_i^2 , v_i^3 , v_i^4 , v_i^5 , v_i^6 , $i \in \{2, 4, \dots, 2n\}$

$$w_f(v_i^2) = 2n + 24n + 1 + 27n + 1 + 16n = 69n + 2$$

$$w_f(v_i^3) = 3n + 21n + 1 + 29n + 1 + 16n = 69n + 2$$

$$w_f(v_i^4) = 6n + 19n + 1 + 30n + 1 + 14n = 69n + 2$$

$$w_f(v_i^5) = 7n + 20n + 1 + 28n + 1 + 14n = 69n + 2$$

$$w_f(v_i^6) = 10n + 22n + 1 + 25n + 1 + 12n = 69n + 2.$$

4. Bobot titik terhadap pelabelan f dari titik v_i^7 , $i \in \{1, 2, \dots, 2n\}$

$$w_f(v_i^7) = 11n + 23n + 1 + 23n + 1 + 12n = 69n + 2.$$

Karena bobot semua titik sama, dapat disimpulkan bahwa graf $(7, n)$ mempunyai pelabelan total titik ajaib dengan $K^* = 69n + 2$. Selanjutnya karena himpunan bilangan bulat terurut terbesar dilabelkan kepada himpunan sisi dan himpunan bilangan bulat terurut terkecil dilabelkan kepada himpunan titik pada graf, maka pelabelan tersebut adalah pelabelan super.

Pada Gambar 2 diberikan contoh pelabelan total titik ajaib super pada graf $C(7, 4)$.

Gambar 2. Pelabelan total titik ajaib super pada graf $C(7, 4)$

5. Kesimpulan

Graf kubik $C(m, n)$ dikontruksi dari dua buah graf siklus C_n dan $m - 2$ buah graf siklus C_{2n} dengan $n \geq 3$. Pelabelan total titik ajaib pada $C(m, n)$ memiliki batasan kemungkinan konstanta ajaib yaitu $\frac{17(m-1)n+4}{2} \leq K \leq \frac{23(m-1)n+4}{2}$. Pada $m = 7$, graf $C(7, n)$ memiliki pelabelan total titik ajaib super dengan konstanta ajaib $K^* = 69n + 2$.

Daftar Pustaka

- [1] Baca, M., dkk, 2019, *Magic and Antimagic Graphs : Attributes, Observations, and Challenges*, Springer Nature Switzerland AG, Switzerland
- [2] Bondy, J.A., dkk, 1976, *Graph Theory with Application*, Elsevier Science Publishing, New York
- [3] Cunningham, D., 2004, Vertex Magic, *Electronic Journal of Undergraduate Mathematics*, **9** : 1 - 20
- [4] Hutagalung, I.R., 2019, Pelabelan Total Titik Ajaib Super pada Graf Kubik $C_{n, 2n, n}$, Skripsi, tidak diterbitkan, Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas