SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE DUA DENGAN SYARAT BATAS FRACTIONAL (KASUS AKAR KOMPLEKS)

DEBBY YOLANDA, BUDI RUDIANTO*

*Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : debyyolanda01@gmail.com, budirudianto@sci.unand.ac.id*

Diterima 15 Desember 2020 Direvisi 29 Desember 2020 Dipublikasikan 12 Januari 2021

Abstrak. Dalam artikel ini dikaji solusi persamaan diferensial biasa linier orde dua homogen dengan syarat batas berupa turunan *fractional*. Kajian ini khusus untuk persamaan karakteristik dari persamaan diferensial orde dua dengan akar bilangan kompleks murni. Turunan *fractional* yang digunakan dalam skripsi ini adalah turunan *fractional* Riemann-Liouville

Kata Kunci: Persamaan diferensial biasa linier orde dua homogen, Akar kompleks, Turunan *Fractional* Riemann-Liouville.

1. Pendahuluan

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan dari satu (atau beberapa) variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas. Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang memuat turunan biasa dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas [9].

Suatu persamaan diferensial biasa linier orde dua adalah suatu persamaan yang berbentuk sebagai berikut [3]:

$$p(x)D^2y(x) + q(x)Dy(x) + r(x)y(x) = g(x) \quad (1.1)$$

dimana $D = \frac{d}{dx}$ dan $p(x), q(x), r(x)$ adalah fungsi-fungsi dari x dengan $p(x) \neq 0$. Jika $g(x) = 0$, maka (1.1) disebut persamaan diferensial biasa linier homogen. Kajian tentang solusi persamaan diferensial (1.1) merupakan topik klasik dalam matematika. Eksistensi solusi dari persamaan (1.1) telah dijamin dalam [3]. Dalam makalah ini dikaji bagaimana bentuk solusi dari (1.1) pada suatu interval (a, b) , $a, b \in \mathbb{R}$ dengan syarat batas memuat turunan *fractional* Riemann-Liouville, dimana $p(x), q(x), r(x)$ adalah konstanta dengan $p(x) \neq 0$. Kajian ini merupakan elaborasi dari informasi dalam artikel [4].

*penulis korespondensi

2. Beberapa Konsep Dasar

Definisi 2.1. [8] Fungsi Gamma yang dinotasikan dengan $\Gamma(n)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx, \quad n > 0.$$

Definisi 2.2. [6] Fungsi Beta didefinisikan sebagai berikut :

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad x \in \mathbb{R} \text{ dan } p, q \in \mathbb{R}, p > 0, q > 0.$$

Definisi 2.3. [1] Fungsi Mittag-Leffler dua parameter didefinisikan sebagai berikut:

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0, z \in \mathbb{C} \quad (2.1)$$

Deret Taylor merupakan bentuk dari fungsi matematika sebagai jumlah tak hingga dari suku yang nilainya dihitung dari turunan fungsi tersebut pada suatu titik.

Teorema 2.4. [7] Misalkan f adalah fungsi yang turunan ke- $(n+1)$ -nya ada untuk setiap x pada selang terbuka I yang mengandung a , maka untuk setiap x di dalam I berlaku

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) \quad (2.2)$$

dengan sisa $R_n(x)$ dinyatakan oleh

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

dengan ξ adalah titik antara x dan a .

Persamaan diferensial orde dua adalah persamaan diferensial yang turunan tertingginya berorde dua. Secara umum persamaan diferensial biasa linier orde dua dapat ditulis dalam bentuk [3]:

$$p(x)D^2y(x) + q(x)Dy(x) + r(x)y(x) = g(x), \quad (2.3)$$

dimana $p(x), q(x), r(x)$ adalah koefisien dari persamaan diferensial tersebut.

Jika $g(x) = 0$, maka persamaan (2.3) disebut persamaan diferensial biasa orde dua homogen. Selanjutnya dengan mengganti $p(x) = a_2, q(x) = a_1$, dan $r(x) = a_0$ maka persamaan (2.3) dapat ditulis kembali dalam bentuk [3]

$$a_2 D^2y(x) + a_1 Dy(x) + a_0 y(x) = 0. \quad (2.4)$$

Persamaan (2.4) dapat diselesaikan dengan menentukan terlebih dahulus akar-akar karakteristiknya, yaitu:

$$r_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} \text{ dan } r_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}.$$

Adapun bentuk-bentuk penyelesaian persamaan karakteristik adalah sebagai berikut [3].

- (1) Jika $a_1^2 - 4a_2a_0 > 0$, maka akan diperoleh akar-akar riil berbeda ($r_1 \neq r_2$) dan solusi berupa:

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

- (2) Jika $a_1^2 - 4a_2a_0 = 0$, maka akan diperoleh akar-akar riil sama ($r_1 = r_2$) dan solusi berupa:

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + x C_2 e^{r_2 x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

- (3) Jika $a_1^2 - 4a_2a_0 < 0$, maka akan diperoleh akar-akar kompleks ($r_{1,2} = p \pm iq$) dan solusi berupa:

$$y(x) = e^{px} (C_1 \cos qx + C_2 \sin qx), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

Definisi 2.5. [1] Turunan *fractional* Riemann-Liouville kiri orde α dan kanan orde β berturut-turut didefinisikan sebagai berikut:

$$D_{a+}^{\alpha} y(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{y(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, & \text{untuk } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0, n = [\alpha] + 1 \\ D^n y(x), & \text{untuk } \alpha = n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

$$D_{b-}^{\beta} y(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\beta)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b \frac{y(t)}{(t-x)^{\beta-n+1}} dt, & \text{untuk } \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0, n = [\beta] + 1 \\ (-1)^n D^n y(x), & \text{untuk } \beta = n \in \mathbb{N}_0 \end{cases},$$

dimana $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ dan $[\alpha]$ adalah bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan α , $[\beta]$ adalah bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan β .

Berikut sifat-sifat untuk turunan *fractional* Riemann-Liouville kiri dan kanan:

- (1) $D^{\alpha}(\lambda f(x)) = \lambda D^{\alpha} f(x)$
- (2) $D^{\alpha}(\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)) = D^{\alpha}(\lambda_1 f(x)) + D^{\alpha}(\lambda_2 g(x))$.

Dengan menggunakan Definisi 2.5 diperoleh turunan *fractional* dari fungsi pangkat sebagai berikut:

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha} (x-a)^m &= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\alpha)} (x-a)^{m-\alpha}, \quad \alpha \geq 0, \quad m > -1, \\ D_{b-}^{\beta} (b-x)^m &= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\beta)} (b-x)^{m-\beta}, \quad \beta \geq 0, \quad m > -1. \end{aligned} \quad (2.8)$$

3. Pembahasan

Perhatikan persamaan diferensial berikut:

$$D^2 y(x) + k^2 y(x) = 0, \quad (3.1)$$

dengan syarat batas berupa kombinasi dua dari persamaan berikut:

$$\mu_1 D_{a+}^{\alpha_1} y(x) \Big|_{x=b} + \mu_2 D_{b-}^{\beta_1} y(x) \Big|_{x=a} = L_1 \quad (3.2)$$

$$\mu_3 D_{a+}^{\alpha_1} y(x) \Big|_{x=b} + \mu_4 D_{a+}^{\alpha_2} y(x) \Big|_{x=b} = L_2 \quad (3.3)$$

$$\mu_5 D_{b-}^{\beta_1} y(x) \Big|_{x=a} + \mu_6 D_{b-}^{\beta_2} y(x) \Big|_{x=a} = L_3 \quad (3.4)$$

dimana $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in [0, 2], \alpha_1 \neq \alpha_2, \beta_1 \neq \beta_2, \mu_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, 6$, dan $L_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, 3$, dengan $D_{a+}^{\alpha_m}, D_{b-}^{\beta_n}$, adalah turunan *fractional* Riemann-Liouville.

Solusi dari persamaan (3.1) adalah

$$y(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx).$$

dimana C_1 dan C_2 adalah konstanta sebarang.

Untuk mendapatkan solusi yang memenuhi syarat batas (3.2), (3.3), dan (3.4), perhatikan kasus-kasus berikut ini:

- (1) Syarat batas berupa (3.2) dan (3.3)

Substitusi solusi $y(x)$ kedalam syarat batas (3.2) dan (3.3), diperoleh:

$$C_1 A_{11} + C_2 B_{11} = L_1$$

$$C_1 A_{21} + C_2 B_{21} = L_2$$

dimana

$$\begin{aligned} A_{11} &= \mu_1 D_{a+}^{\alpha_1} \cos(kx) \Big|_{x=b} + \mu_2 D_{b-}^{\beta_1} \cos(kx) \Big|_{x=a} \\ B_{11} &= \mu_1 D_{a+}^{\alpha_1} \sin(kx) \Big|_{x=b} + \mu_2 D_{b-}^{\beta_1} \sin(kx) \Big|_{x=a} \\ A_{21} &= \mu_3 D_{a+}^{\alpha_1} \cos(kx) \Big|_{x=b} + \mu_4 D_{a+}^{\alpha_2} \cos(kx) \Big|_{x=b} \\ B_{21} &= \mu_3 D_{a+}^{\alpha_1} \sin(kx) \Big|_{x=b} + \mu_4 D_{a+}^{\alpha_2} \sin(kx) \Big|_{x=b} \end{aligned} \quad (3.5)$$

- (2) Syarat batas berupa (3.3) dan (3.4)

Substitusi solusi $y(x)$ kedalam syarat batas (3.3) dan (3.4), diperoleh

$$C_3 A_{12} + C_4 B_{12} = L_2$$

$$C_3 A_{22} + C_4 B_{22} = L_3$$

dimana

$$\begin{aligned} A_{12} &= \mu_3 D_{a+}^{\alpha_1} \cos(kx) \Big|_{x=b} + \mu_4 D_{a+}^{\alpha_2} \cos(kx) \Big|_{x=b} \\ B_{12} &= \mu_3 D_{a+}^{\alpha_1} \sin(kx) \Big|_{x=b} + \mu_4 D_{a+}^{\alpha_2} \sin(kx) \Big|_{x=b} \\ A_{22} &= \mu_5 D_{b-}^{\beta_1} \cos(kx) \Big|_{x=a} + \mu_6 D_{b-}^{\beta_2} \cos(kx) \Big|_{x=a} \\ B_{22} &= \mu_5 D_{b-}^{\beta_1} \sin(kx) \Big|_{x=a} + \mu_6 D_{b-}^{\beta_2} \sin(kx) \Big|_{x=a} \end{aligned} \quad (3.6)$$

- (3) Syarat batas berupa (3.2) dan (3.4)

Substitusi solusi $y(x)$ kedalam syarat batas (3.2) dan (3.4), diperoleh

$$C_5 A_{13} + C_6 B_{13} = L_1$$

$$C_5 A_{23} + C_6 B_{23} = L_3$$

dimana

$$\begin{aligned}
A_{13} &= \mu_1 D_{a+}^{\alpha_1} \cos(kx) \Big|_{x=b} + \mu_2 D_{b-}^{\beta_1} \cos(kx) \Big|_{x=a} \\
B_{13} &= \mu_1 D_{a+}^{\alpha_1} \sin(kx) \Big|_{x=b} + \mu_2 D_{b-}^{\beta_1} \sin(kx) \Big|_{x=a} \\
A_{23} &= \mu_5 D_{b-}^{\beta_1} \cos(kx) \Big|_{x=a} + \mu_6 D_{b-}^{\beta_2} \cos(kx) \Big|_{x=a} \\
B_{23} &= \mu_5 D_{b-}^{\beta_1} \sin(kx) \Big|_{x=a} + \mu_6 D_{b-}^{\beta_2} \sin(kx) \Big|_{x=a}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Untuk menyelesaikan kasus-kasus diatas, perlu ditentukan terlebih dahulu turunan *fractional* Riemann-Liouville kiri dan kanan dari fungsi sinus dan cosinus dengan mengubah bentuk fungsi sinus dan cosinus menggunakan identitas trigonometri.

$$\begin{aligned}
D_{a+}^{\alpha} \sin(kx) \Big|_{x=b} &= D_{a+}^{\alpha} \sin(k(x-a) + ka) \Big|_{x=b}, \\
&= \cos(ka) D_{a+}^{\alpha} \sin(k(x-a)) \Big|_{x=b} + \sin(ka) D_{a+}^{\alpha} \cos(k(x-a)) \Big|_{x=b}, \\
D_{a+}^{\alpha} \cos(kx) \Big|_{x=b} &= D_{a+}^{\alpha} \cos(k(x-a) + ka) \Big|_{x=b}, \\
&= \cos(ka) D_{a+}^{\alpha} \cos(k(x-a)) \Big|_{x=b} - \sin(ka) D_{a+}^{\alpha} \sin(k(x-a)) \Big|_{x=b}, \\
D_{b-}^{\beta} \sin(kx) \Big|_{x=a} &= D_{b-}^{\beta} (-\sin(k(b-x) - kb)) \Big|_{x=b}, \\
&= -\cos(kb) D_{b-}^{\beta} \sin(k(b-x)) \Big|_{x=a} + \sin(kb) D_{b-}^{\beta} \cos(k(b-x)) \Big|_{x=a}, \\
D_{b-}^{\beta} \cos(kx) \Big|_{x=a} &= D_{b-}^{\beta} \cos(k(b-x) - kb) \Big|_{x=a}, \\
&= \cos(kb) D_{b-}^{\beta} \cos(k(b-x)) \Big|_{x=a} + \sin(kb) D_{b-}^{\beta} \sin(k(b-x)) \Big|_{x=a}.
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan deret Taylor diperoleh

$$\begin{aligned}
D_{a+}^{\alpha} \sin(k(x-a)) \Big|_{x=b} &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (k)^{2s+1}}{\Gamma(2s+2)} D_{a+}^{\alpha} (x-a)^{2s+1} \Big|_{x=b}, \\
D_{a+}^{\alpha} \cos(k(x-a)) \Big|_{x=b} &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (k)^{2s}}{\Gamma(2s+1)} D_{a+}^{\alpha} (x-a)^{2s} \Big|_{x=b}, \\
D_{b-}^{\beta} \sin(k(b-x)) \Big|_{x=a} &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (k)^{2s+1}}{\Gamma(2s+2)} D_{b-}^{\beta} (b-x)^{2s+1} \Big|_{x=a}, \\
D_{b-}^{\beta} \cos(k(b-x)) \Big|_{x=a} &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (k)^{2s}}{\Gamma(2s+1)} D_{b-}^{\beta} (b-x)^{2s} \Big|_{x=a}.
\end{aligned}$$

Turunan *fractional* diatas dapat diselesaikan dengan menggunakan definisi turunan *fractional* Riemann-Liouville untuk fungsi pangkat pada persamaan (2.8)

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
D_{a+}^{\alpha} \sin(k(x-a)) \Big|_{x=b} &= k(x-a)^{1-\alpha} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (k(x-a))^{2s}}{\Gamma(2s+2-\alpha)} \Big|_{x=b}, \\
D_{a+}^{\alpha} \cos(k(x-a)) \Big|_{x=b} &= (x-a)^{-\alpha} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (k)^{2s}}{\Gamma(2s+1-\alpha)} (x-a)^{2s} \Big|_{x=b}, \\
D_{b-}^{\beta} \sin(k(b-x)) \Big|_{x=a} &= k(b-x)^{1-\beta} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (k(b-x))^{2s}}{\Gamma(2s+2-\beta)} \Big|_{x=a}, \\
D_{b-}^{\beta} \cos(k(b-x)) \Big|_{x=a} &= (b-x)^{-\beta} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (k(b-x))^{2s}}{\Gamma(2s+1-\beta)} \Big|_{x=a}.
\end{aligned}$$

Deret-deret yang membentuk persamaan di atas merupakan bentuk dari fungsi Mittag-Leffler, sehingga dapat ditulis

$$\begin{aligned}
D_{a+}^{\alpha} \sin(k(x-a)) \Big|_{x=b} &= k(b-a)^{1-\alpha} E_{2,2-\alpha}(-k^2(b-a)^2) \\
D_{a+}^{\alpha} \cos(k(x-a)) \Big|_{x=b} &= (b-a)^{-\alpha} E_{2,1-\alpha}(-k^2(b-a)^2) \\
D_{b-}^{\beta} \sin(k(b-x)) \Big|_{x=a} &= k(b-a)^{1-\beta} E_{2,2-\beta}(-k^2(b-a)^2) \\
D_{b-}^{\beta} \cos(k(b-x)) \Big|_{x=a} &= (b-a)^{-\alpha} E_{2,1-\beta}(-k^2(b-a)^2) \quad (3.8)
\end{aligned}$$

Substitusi persamaan (3.8) ke turunan *fractional* Riemann-Liouville fungsi sinus dan cosinus yang diperoleh sebelumnya, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
D_{a+}^{\alpha} \sin(kx) \Big|_{x=b} &= k(b-a)^{1-\alpha} \cos(ka) E_{2,2-\alpha}(-k^2(b-a)^2) + \\
&\quad (b-a)^{-\alpha} \sin(ka) E_{2,1-\alpha}(-k^2(b-a)^2) \quad (3.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{a+}^{\alpha} \cos(kx) \Big|_{x=b} &= (b-a)^{-\alpha} \cos(ka) E_{2,1-\alpha}(-k^2(b-a)^2) - \\
&\quad k(b-a)^{1-\alpha} \sin(ka) E_{2,2-\alpha}(-k^2(b-a)^2) \quad (3.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{b-}^{\beta} \sin(kx) \Big|_{x=a} &= -k(b-a)^{1-\beta} \cos(kb) E_{2,2-\beta}(-k^2(b-a)^2) + \\
&\quad (b-a)^{-\beta} \sin(kb) E_{2,1-\beta}(-k^2(b-a)^2) \quad (3.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{b-}^{\beta} \cos(kx) \Big|_{x=a} &= (b-a)^{-\beta} \cos(kb) E_{2,1-\beta}(-k^2(b-a)^2) + \\
&\quad k(b-a)^{1-\beta} \sin(kb) E_{2,2-\beta}(-k^2(b-a)^2) \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Contoh 3.1. Akan ditentukan solusi persamaan diferensial

$$D^2 y(x) + 9y(x) = 0, \quad x \in [2, 4] \quad (3.13)$$

dengan syarat batas

$$\begin{aligned}
D_{2+}^{1/3} y(x) \Big|_{x=4} + D_{2+}^{1/4} y(x) \Big|_{x=4} &= 1 \\
D_{2+}^{1/3} y(x) \Big|_{x=4} + D_{4-}^{1/4} y(x) \Big|_{x=2} &= 2.
\end{aligned} \quad (3.14)$$

Solusi dari (3.13) adalah

$$y(x) = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x).$$

Selanjutnya substitusi $y(x)$ ke dalam syarat batas.

$$\begin{aligned} D_{2+}^{1/3} y(x) \Big|_{x=4} + D_{2+}^{1/4} y(x) \Big|_{x=4} &= C_1 \left[D_{2+}^{1/3} \cos(3x) + D_{2+}^{1/4} \cos(3x) \right] \Big|_{x=4} + \\ &C_2 \left[D_{2+}^{1/3} \sin(3x) + D_{2+}^{1/4} \sin(3x) \right] \Big|_{x=4}. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan (3.9) dan (3.10) diperoleh

$$\begin{aligned} \left[D_{2+}^{1/3} \cos(3x) + D_{2+}^{1/4} \cos(3x) \right] \Big|_{x=4} &= 2,7321, \\ \left[D_{2+}^{1/3} \sin(3x) + D_{2+}^{1/4} \sin(3x) \right] \Big|_{x=4} &= -0.3472. \end{aligned}$$

Sehingga,

$$2,7321C_1 - 0,3472C_2 = 1. \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} D_{2+}^{1/3} y(x) \Big|_{x=4} + D_{4-}^{1/4} y(x) \Big|_{x=2} &= C_1 \left[D_{2+}^{1/3} \cos(3x) \Big|_{x=4} + D_{4-}^{1/4} \cos(3x) \Big|_{x=2} \right] + \\ &C_2 \left[D_{2+}^{1/3} \sin(3x) \Big|_{x=4} + D_{4-}^{1/4} \sin(3x) \Big|_{x=2} \right]. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan (3.9),(3.10),(3.11), dan (3.12) diperoleh

$$\begin{aligned} \left[D_{2+}^{1/3} \cos(3x) \Big|_{x=4} + D_{4-}^{1/4} \cos(3x) \Big|_{x=2} \right] &= 2.6094, \\ \left[D_{2+}^{1/3} \sin(3x) \Big|_{x=4} + D_{4-}^{1/4} \sin(3x) \Big|_{x=2} \right] &= -0.8960. \end{aligned}$$

Sehingga,

$$2,6094C_1 - 0,8960C_2 = 2. \quad (3.16)$$

Selanjutnya akan ditentukan C_1 dan C_2 dari persamaan (3.15) dan (3.16).

$$\begin{bmatrix} 2,6094 & -0,8960 \\ 2,7321 & -0,3472 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Karena matriks $\begin{bmatrix} 2,6094 & -0,8960 \\ 2,7321 & -0,3472 \end{bmatrix}$ nonsingular, maka

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,6094 & -0,8960 \\ 2,7321 & -0,3472 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1307 \\ -1,8515 \end{bmatrix}.$$

Sehingga solusi dari (3.13) dengan syarat batas (3.14) adalah

$$y(x) = 0,1307 \cos(3x) - 1,8515 \sin(3x).$$

4. Kesimpulan

Solusi persamaan diferensial

$$D^2 y(x) + k^2 y(x) = 0, \quad (4.1)$$

dengan syarat batas berupa kombinasi dua dari persamaan berikut:

$$\mu_1 D_{a+}^{\alpha_1} y(x) \Big|_{x=b} + \mu_2 D_{b-}^{\beta_1} y(x) \Big|_{x=a} = L_1 \quad (4.2)$$

$$\mu_3 D_{a+}^{\alpha_1} y(x) \Big|_{x=b} + \mu_4 D_{a+}^{\alpha_2} y(x) \Big|_{x=b} = L_2 \quad (4.3)$$

$$\mu_5 D_{b-}^{\beta_1} y(x) \Big|_{x=a} + \mu_6 D_{b-}^{\beta_2} y(x) \Big|_{x=a} = L_3 \quad (4.4)$$

dimana $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in [0, 2]$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $\beta_1 \neq \beta_2$, $\mu_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, 6$, dan $L_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, 3$, dengan $D_{a+}^{\alpha_m}, D_{b-}^{\beta_n}$ adalah turunan *fractional* Riemann-Liouville dinyatakan sebagai berikut:

- (1) Jika syarat batas berupa persamaan (3.2) dan (3.3), maka solusinya adalah

$$y(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx),$$

dimana C_1 dan C_2 adalah solusi dari sistem persamaan linier berikut

$$C_1 A_{11} + C_2 B_{11} = L_1,$$

$$C_1 A_{21} + C_2 B_{21} = L_2.$$

- (2) Jika syarat batas berupa persamaan (3.3) dan (3.4), maka solusinya adalah

$$y(x) = C_3 \cos(kx) + C_4 \sin(kx),$$

dimana C_3 dan C_4 adalah solusi dari sistem persamaan linier berikut

$$C_3 A_{12} + C_4 B_{12} = L_2,$$

$$C_3 A_{22} + C_4 B_{22} = L_3.$$

- (3) Jika syarat batas berupa persamaan 3.2 dan 3.4, maka solusinya adalah

$$y(x) = C_5 \cos(kx) + C_6 \sin(kx),$$

dimana C_5 dan C_6 adalah solusi dari persamaan linier berikut

$$C_5 A_{13} + C_6 B_{13} = L_1,$$

$$C_5 A_{23} + C_6 B_{23} = L_3,$$

dimana $A_{11}, A_{21}, B_{11}, B_{21}, A_{12}, A_{22}, B_{12}, B_{22}, A_{13}, A_{23}, B_{13}, B_{23}$ dapat dilihat pada persamaan (3.5), (3.6), (3.7), dengan

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha} \sin(kx) \Big|_{x=b} &= k(b-a)^{1-\alpha} \cos(ka) E_{2,2-\alpha}(-k^2(b-a)^2) + \\ &\quad (b-a)^{-\alpha} \sin(ka) E_{2,1-\alpha}(-k^2(b-a)^2), \\ D_{a+}^{\alpha} \cos(kx) \Big|_{x=b} &= (b-a)^{-\alpha} \cos(ka) E_{2,1-\alpha}(-k^2(b-a)^2) - \\ &\quad k(b-a)^{1-\alpha} \sin(ka) E_{2,2-\alpha}(-k^2(b-a)^2), \\ D_{b-}^{\beta} \sin(kx) \Big|_{x=a} &= -k(b-a)^{1-\beta} \cos(kb) E_{2,2-\beta}(-k^2(b-a)^2) + \\ &\quad (b-a)^{-\beta} \sin(kb) E_{2,1-\beta}(-k^2(b-a)^2), \\ D_{b-}^{\beta} \cos(kx) \Big|_{x=a} &= (b-a)^{-\beta} \cos(kb) E_{2,1-\beta}(-k^2(b-a)^2) + \\ &\quad k(b-a)^{1-\beta} \sin(kb) E_{2,2-\beta}(-k^2(b-a)^2). \end{aligned}$$

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Prof. Dr. Muhafzan, Ibu Riri Lestari, M.Si, Ibu Dr. Yanita, dan Ibu Dr. Arrival Rince Putri yang telah memberikan masukan dan saran dalam penyempurnaan penulisan artikel ini.

Daftar Pustaka

- [1] A. A. Kilbas., H. M. Srivastava., J. J. Trujillo., 2006. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier: Amsterdam.
- [2] Bartle. R.G dan Donald. R. Sherbert., 2010. *Introduction to Real Analysis*, Fourth Edition. USA: John Wiley and Sons.
- [3] Boyce.W.E., Diprima.R.C., *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problems*. Canada: John Wiley and Sons, Inc.
- [4] Ciesielski. M., Blaszczyk.T., 2018. *An Exact Solution of the Second-Order Differential Equation with the Fractional/Generalised Boundary Conditions*. Vol. 2018, Article-ID 7283518: 1 – 9.
- [5] Diethelm.K. 2004. *The Analysis of Fractional Differential Equation*. Springer: New York
- [6] Milici. C., Gheorghe. D., J. Tanreiro. 2019. *Introduction to Fractional Dierential Equations*. Springer: Switzerland.
- [7] Purcell., Edwin. J., Dale Varberg., Steven. E. Rigdon., 2004. *Kalkulus*. Edisi Kedelapan. Jilid 2. Jakarta: Erlangga.
- [8] Podlubny. I., 1999. *Fractional Differential Equations*. London: ACADEMIC PRES.
- [9] Ross. S. R., 1996. *Introduction To Ordinary Differential Equation*, Third Edition. New York.