KONGRUENSI DAN DIAGONALISASI BENTUK BILINIER SIMETRIS

DINDA HIDAYATUL ULYA*, ADMI NAZRA, MONIKA RIAN TI HELMI

Program Studi S1 Matematika,

*Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.*

email : dindaulya3@gmail.com, nazra@sci.unand.ac.id, monikariantihelmi@sci.unand.ac.id

Diterima 15 Desember 2020 Direvisi 29 Desember 2020 Dipublikasikan 12 Januari 2021

Abstrak. Misalkan $(,) : V \times V \rightarrow F$ merupakan suatu bentuk bilinear, dengan V adalah suatu ruang vektor atas lapangan F yang memenuhi untuk setiap $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ anggota V dan k anggota F memenuhi $(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w}) + (\vec{v}, \vec{w})$, $(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{u}, \vec{w})$ dan $(k\vec{u}, \vec{w}) = k(\vec{u}, \vec{w}) = (\vec{u}, k\vec{w})$. Setiap Bentuk bilinear berkaitan dengan sebuah matriks tunggal. Matriks yang berkaitan adalah simetris apabila bentuk biliniernya juga simetris. penelitian ini akan membuktikan bahwa ada suatu basis terurut $\mathcal{B}$ untuk ruang vektor V atas lapangan F , dimana F mempunyai karakteristik tidak sama dengan dua, sehingga matriks simetris yang bersesuaian dengan $\mathcal{B}$ dan berkaitan dengan bilinear $(,)$ adalah diagonal.

Kata Kunci: Bentuk bilinear, matriks simetris, matriks diagonal

1. Pendahuluan

Bentuk bilinear merupakan suatu fungsi $(,) : V \times V \rightarrow F$, dengan V adalah suatu ruang vektor atas lapangan F , yang mana untuk setiap $\vec{u}, \vec{v}$ dan $\vec{w}$ anggota V dan k anggota F memenuhi $(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w}) + (\vec{v}, \vec{w})$, $(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{u}, \vec{w})$ dan $(k\vec{u}, \vec{w}) = k(\vec{u}, \vec{w}) = (\vec{u}, k\vec{w})$. Bentuk bilinear terdiri dari bentuk bilinear simetris, skew-simetris dan alternating. Suatu bentuk bilinear dikatakan simetris apabila untuk setiap $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ anggota V memenuhi $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{u})$.

Suatu bentuk bilinear berkaitan dengan sebuah matriks tunggal. Matriks tunggal yang berkaitan adalah simetris apabila bentuk biliniernya juga simetris. Penelitian ini mengulas kembali apa yang telah dibahas oleh [4] terkait dengan kongruensi dan diagonalisasi bentuk bilinear simetris.

2. Landasan Teori

2.1. Matriks

Definisi 2.1. [1] Matriks A berukuran $n \times n$ dikatakan simetris jika $A^t = A$.

*penulis korespondensi

Definisi 2.2. [1] Suatu matriks berukuran $n \times n$ yang semua entrinya terletak bukan di diagonal utama adalah nol, disebut matriks diagonal.

2.2. Karakteristik Lapangan

Definisi 2.3. [2] Suatu lapangan F dikatakan mempunyai karakteristik $p \neq 0$ jika untuk suatu bilangan positif p , $px = 0$ untuk setiap $x \in F$, dan p adalah bilangan bulat positif terkecil.

Jika suatu lapangan F tidak mempunyai karakteristik $p \neq 0$ untuk setiap bilangan positif p , maka F dikatakan suatu lapangan yang mempunyai karakteristik nol. Salah satu lapangan yang mempunyai karakteristik nol adalah himpunan bilangan riil.

3. Pembahasan

3.1. Bentuk Bilinier

Definisi 3.1. [4] Misalkan V adalah ruang vektor atas lapangan skalar F . Suatu bentuk bilinier adalah suatu fungsi $(,) : V \times V \rightarrow F$ yang mana untuk setiap $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ dan $k \in F$ memenuhi:

- (1) $(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w}) + (\vec{v}, \vec{w})$ dan $(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{u}, \vec{w})$,
- (2) $(k\vec{u}, \vec{w}) = k(\vec{u}, \vec{w}) = (\vec{u}, k\vec{w})$.

Bentuk bilinier $(,)$ dikatakan simetris jika $(\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{w}, \vec{v})$.

Lema 3.2. [4] Misalkan A adalah matriks berukuran $n \times n$. Jika untuk sebarang $\vec{u}, \vec{v} \in F^n$, didefinisikan fungsi $(,)_A : V \times V \rightarrow F$ sebagai $(\vec{u}, \vec{v})_A = \vec{u}^t A \vec{v}$, maka $(,)_A$ adalah suatu bentuk bilinier. Jika A simetris, maka $(,)_A$ simetris.

Lema 3.3. Misalkan $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ adalah suatu basis terurut untuk ruang vektor V dan $A_{\mathcal{B}}$ adalah matriks berukuran $n \times n$ yang bersesuaian dengan $\mathcal{B}$. Jika untuk sebarang $\vec{u}, \vec{v} \in V$, didefinisikan fungsi $(,) : V \times V \rightarrow F$ sebagai $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u})_{\mathcal{B}}^t A_{\mathcal{B}} (\vec{v})_{\mathcal{B}}$, maka $(,)$ adalah suatu bentuk bilinier.

Lema 3.4. [4] Misalkan $(,) : V \times V \rightarrow F$ adalah suatu bentuk bilinier. Untuk setiap $\vec{v} \in V$, fungsi $R_{\vec{v}} : V \rightarrow F$ dan $L_{\vec{v}} : V \rightarrow F$ yang didefinisikan sebagai $R_{\vec{v}}(\vec{u}) = (\vec{v}, \vec{u})$ dan $L_{\vec{v}}(\vec{u}) = (\vec{u}, \vec{v})$ adalah transformasi linier.

Teorema 3.5. [4] Misalkan $(,) : V \times V \rightarrow F$ adalah suatu bentuk bilinier.

- (1) Misalkan $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ adalah suatu basis terurut untuk ruang vektor V , maka terdapat tepat satu matriks $A_{\mathcal{B}} = (a_{ij})$ yang berukuran $n \times n$ sedemikian sehingga untuk setiap $\vec{v}, \vec{w} \in V$, berlaku $(\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v})_{\mathcal{B}}^t A_{\mathcal{B}} (\vec{w})_{\mathcal{B}}$, dengan $a_{ij} = (\vec{u}_i, \vec{u}_j)$.
- (2) Bentuk bilinier $(,) : V \times V \rightarrow F$ simetris jika dan hanya jika matriks $A_{\mathcal{B}}$ simetris.

- (3) Jika $V = F^n$, terdapat tepat satu matriks A berukuran $n \times n$ sedemikian sehingga $(,) = (,)_A$.
Selanjutnya, $(,)$ simetris jika dan hanya jika A simetris.

Teorema 3.6. [4] Jika $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ suatu basis terurut untuk F^n dan P adalah matriks transisi dari basis $\mathcal{B}$ ke basis standar $\mathcal{S}$, maka bentuk bilinier $(,)_A : F^n \times F^n \rightarrow F$ mempunyai matriks $A_{\mathcal{B}} = P^t A P$.

3.2. Kongruensi dan Diagonalisasi Bentuk Bilinier Simetris

Definisi 3.7. [4]

- (1) Dua buah matriks bujursangkar, A dan A' , dikatakan kongruen jika terdapat sebuah matriks P yang dapat dibalik sehingga $A' = P^t A P$.
(2) Dua bentuk bilinier $(,) : V \times V \rightarrow F$ dan $(,)' : V' \times V' \rightarrow F$ dikatakan isometris apabila terdapat suatu isomorfisma $T : V \rightarrow V'$ sedemikian sehingga $(\vec{v}, \vec{w}) = (T(\vec{v}), T(\vec{w}))'$ untuk setiap $\vec{v}, \vec{w} \in V$.

Lema 3.8. [4] Misalkan A dan A' adalah matriks yang berkaitan dengan bentuk bilinier $(,)_A$ dan $(,)_{A'}$. Matriks-matriks A dan A' adalah kongruen jika dan hanya jika $(,)_A$ dan $(,)_{A'}$ isometris.

Teorema 3.9. [4] Misalkan V adalah suatu ruang vektor berdimensi hingga atas lapangan F , dengan F mempunyai karakteristik tidak sama dengan dua. Jika $(,) : V \times V \rightarrow F$ adalah suatu bentuk bilinier simetris pada V , maka terdapat suatu basis terurut $\mathcal{B}$ untuk V sehingga matriks simetris $S_{\mathcal{B}}$ yang berkaitan dengan $(,)$ adalah diagonal.

Bukti. Misalkan $(,) : V \times V \rightarrow F$ adalah suatu bentuk bilinier simetris pada V . Lapangan F mempunyai karakteristik tidak sama dengan dua dan $\dim(V) = n$. Akan digunakan proses induksi untuk menunjukkan terdapat suatu basis terurut $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\} \forall n \in \mathbb{N}$ untuk V , dengan $(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = 0, i \neq j$ sedemikian sehingga $S_{\mathcal{B}} = ((\vec{u}_i, \vec{u}_j))$ adalah diagonal.

Untuk $n = 1$, maka matriks $S_{\mathcal{B}}$ berukuran 1×1 . Jelas bahwa $S_{\mathcal{B}}$ adalah matriks diagonal. Asumsikan teorema benar untuk $(n - 1)$, maka terdapat basis terurut $\mathcal{B}' = \{\vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_n\}$ dengan $(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = 0, i = 2, 3, \dots, n$ sedemikian sehingga $S_{\mathcal{B}'}$ diagonal.

Jika bentuk bilinier $(,) = 0$, maka $S_{\mathcal{B}}$ adalah matriks nol. Dengan perhitungan langsung, perhatikan bahwa untuk setiap $u, w \in V$,

$$(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{1}{2}[(\vec{u} + \vec{w}, \vec{u} + \vec{w}) - (\vec{u}, \vec{u}) - (\vec{w}, \vec{w})] = 0.$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= (\vec{u} + \vec{w}, \vec{u} + \vec{w}) - (\vec{u}, \vec{u}) - (\vec{w}, \vec{w}) \\ &= (\vec{u}, \vec{u}) + 2(\vec{u}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{w}) - (\vec{u}, \vec{u}) - (\vec{w}, \vec{w}) \\ &= 2(\vec{u}, \vec{w}). \end{aligned}$$

Misalkan F mempunyai karakteristik tidak sama dengan dua, maka terdapat $\vec{u}, \vec{w} \in V$ dengan $(\vec{u}, \vec{w}) \in F$ sedemikian sehingga $2(\vec{u}, \vec{w}) \neq 0$. Hal ini kontradiksi dengan $2(\vec{u}, \vec{w}) = 0$ untuk setiap $(\vec{u}, \vec{w}) \in V$. Akibatnya, $(,)$ tidak selalu bernilai nol sehingga terdapat $\vec{v} \in V$ dengan $(\vec{v}, \vec{v}) \neq 0$. Definisikan $\vec{v}^\perp = \ker(R_{\vec{v}} : V \rightarrow F) = \{\vec{w} \in V \mid (\vec{v}, \vec{w}) = 0\}$. Karena $R_{\vec{v}}(\vec{v}) = (\vec{v}, \vec{v}) \neq 0$, maka $\text{im}(R_{\vec{v}}) = \{(\vec{v}, \vec{v}), 0\}$ sehingga $\text{rank}(R_{\vec{v}}) = 1$. Berdasarkan Teorema ??, $\dim(\vec{v}^\perp) = \dim(V) - \text{rank}(R_{\vec{v}}) = n - 1$. Akibatnya, $\vec{v}^\perp$ adalah subruang dari V yang berdimensi $(n - 1)$.

Diberikan bentuk bilinear simetris $\vec{v}^\perp \times \vec{v}^\perp \rightarrow F$, maka ada suatu basis terurut $\mathcal{B}' = \{\vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_n\}$ untuk $\vec{v}^\perp$ dengan $(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = 0$, $i \neq j$ sedemikian sehingga $S_{\mathcal{B}'}$ diagonal. Misalkan $\vec{v} = \vec{u}_1$ dan vektor $\vec{u}_1 \notin \vec{v}^\perp$, maka berdasarkan Teorema ?? basis $\mathcal{B}'$ dapat diperluas menjadi $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ untuk V . Karena untuk setiap $\vec{u}_i \in \vec{v}^\perp$ diperoleh $(\vec{u}_1, \vec{u}_i) = 0$ dengan $i = 2, 3, \dots, n$, maka diperoleh basis terurut $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ untuk V sehingga matriks $S_{\mathcal{B}}$ adalah diagonal. $\square$

Contoh 3.10. Misalkan $S = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ adalah matriks simetris. Akan dicari suatu basis terurut $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ untuk $(,)_S : F^2 \times F^2 \rightarrow F$ sedemikian sehingga diperoleh matriks diagonal. Pertama, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} (\vec{e}_1, \vec{e}_1)_S &= (\vec{e}_1)^t S(\vec{e}_1) \\ &= (1 \ 0) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 2 \neq 0. \end{aligned}$$

Akibatnya, pilih $\vec{u}_1 = \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Selanjutnya, tentukan $\vec{u}_2$ yang memenuhi

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 0. \text{ Misalkan } \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} (\vec{u}_1, \vec{u}_2)_S &= (\vec{u}_1)^t S(\vec{u}_2) \\ &= (1 \ 0) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= 2a + 3b = 0. \end{aligned}$$

Kemudian, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^\perp &= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : 2a + 3b = 0 \right\} \\ &= \text{rentang} \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Pilih $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} (\vec{u}_2, \vec{u}_2)_S &= (\vec{u}_2)^t S(\vec{u}_2) \\ &= (3 \ -2) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= -14. \end{aligned}$$

Sehingga, diperoleh basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$. Akibatnya, matriks diagonal $S_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -14 \end{pmatrix}$.

Akibat 3.11. [4] Misalkan S suatu matriks simetris yang berukuran $n \times n$ dengan entri-entrinya anggota dari suatu lapangan F , dimana F mempunyai karakteristik tidak sama dengan dua. Terdapat suatu matriks P yang dapat dibalik sedemikian sehingga $P^t S P$ adalah diagonal. Dalam hal ini, artinya S kongruen dengan matriks diagonal.

Bukti. Diketahui S adalah suatu matriks simetris yang entri-entrinya dari suatu lapangan F . Misalkan $(,)_s : F^n \times F^n \rightarrow F$ adalah suatu bentuk bilinier yang terkait dengan S . Dengan menggunakan Teorema 3.9, terdapat suatu basis terurut $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ yang mana matriks $S_{\mathcal{B}}$ yang terkait dengan bentuk bilinier $(,)_s : V \times V \rightarrow F$ adalah diagonal. Berdasarkan Teorema 3.5 (3), jika $V = F^n$ maka $(,)_s = (,)_S$. Pilih P adalah matriks transisi yang dapat dibalik dari basis $\mathcal{B}$ ke basis standar. Berdasarkan Teorema 3.6, matriks $S_{\mathcal{B}} = P^t S P$. Dari definisi 3.7(1) diperoleh bahwa matriks S kongruen dengan matriks $S_{\mathcal{B}}$. $\square$

Contoh 3.12. Melanjutkan Contoh 3.10 di atas, diperoleh basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$. Sehingga matriks transisi dari basis $\mathcal{B}$ ke basis standar yaitu $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} P^t S P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -14 \end{pmatrix} \\ &= S_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Akibatnya, $S = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ kongruen dengan matriks diagonal $S_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -14 \end{pmatrix}$.

4. Kesimpulan

Jika $(,)_s : V \times V \rightarrow F$ suatu bentuk bilinier simetris pada suatu ruang vektor V berdimensi hingga, maka terdapat suatu basis terurut $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ untuk V , sehingga matriks simetris $A_{\mathcal{B}}$ yang bersesuaian dengan $\mathcal{B}$ dan berkaitan dengan $(,)_s$ adalah diagonal.

Misalkan $\mathcal{S} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ adalah basis standar untuk V . Berikut ini adalah urutan langkah-langkah dalam menentukan basis $\mathcal{B}$.

1. Misalkan $\vec{u}_1 = \vec{e}_1$.
2. Pilih $\vec{u}_2$ yang memenuhi $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)_A = 0$ dengan $(\vec{u}_2, \vec{u}_2)_A \neq 0$.

3. Selanjutnya, untuk menentukan $\vec{u}_3$, pilih $\vec{u}_3$ yang memenuhi $(\vec{u}_1, \vec{u}_3)_A = 0 = (\vec{u}_2, \vec{u}_3)_A$ dengan $(\vec{u}_3, \vec{u}_3)_A \neq 0$.
- $\vdots$
- n. Terakhir, pilih $\vec{u}_n$ yang memenuhi $(\vec{u}_i, \vec{u}_n) = 0, i = 1, 2, \dots, n-1$.

Akibatnya diperoleh basis $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ untuk V . Selanjutnya, matriks simetris A kongruen dengan matriks diagonal $A_{\mathcal{B}}$

Daftar Pustaka

- [1] Anton, H dan C. Rorres. 2014. *Elementery Linear Algebra, Aplications Version, 11th Edition*. New York: Wiley.
- [2] Curtis, Charles W. 2000. *Linear Algebra An Introductory Approach*. New York: McGraw-Hill.
- [3] Herstein, I.N. 1995. *Abstract Algebra*. Third Edition. Cambridge University Press.
- [4] Jacob, B. 1989. *Linear Algebra*. New York: W. H. Freeman and Co
- [5] Morris, D. dan Joy M. 2009. *Proof and Concepts the Fundamentals of Abstract Mathematics*. New York: University of Lethbridge.
- [6] Riehm, Carl. 1974. The Equivalence of Bilinear Forms. *Journal of Algebra* 31 : 45 – 66.