SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE DUA DENGAN SYARAT BATAS FRACTIONAL (KASUS AKAR RIIL BERBEDA)

REFI REVINA, BUDI RUDianto*

*Program Studi S1 Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
 email : refirevina1998@gmail.com, budirudianto@sci.unand.ac.id*

Diterima 15 Desember 2020 Direvisi 29 Desember 2020 Dipublikasikan 12 Januari 2021

Abstrak. Dalam artikel ini dikaji solusi persamaan diferensial linier orde dua dengan syarat batas *fractional*, dimana turunan *fractional* pada syarat batas berbentuk turunan *fractional* Riemann-Liouville kiri. Beberapa contoh yang mengilustrasikan hasil disajikan untuk setiap kasus.

Kata Kunci: Persamaan diferensial linier orde dua, syarat batas, turunan *fractional* Riemann-Liouville kiri.

1. Pendahuluan

Persamaan diferensial adalah persamaan yang melibatkan hubungan antara variabel tak bebas dan turunan-turunannya terhadap satu atau lebih variabel bebas. Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang memuat turunan biasa dari variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas [5].

Suatu persamaan diferensial biasa linier orde- n adalah suatu persamaan yang berbentuk sebagai berikut [2]:

$$p_0(x)D^n y(x) + p_1(x)D^{n-1}y(x) + \dots + p_{n-1}(x)D^1 y(x) + p_n(x)y(x) = g(x), \quad (1.1)$$

dimana $x \in [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $D^i = \frac{d^i}{dx^i}$; $i = 1, 2, \dots, n$, dan $p_i(x)$ adalah koefisien dari persamaan diferensial, serta $p_0(x) \neq 0$ [2]. Jika $g(x) = 0$, maka (1.1) disebut persamaan diferensial biasa homogen. Secara khusus, persamaan berikut disebut persamaan diferensial linier orde dua homogen.

$$p_0(x)D^2 y(x) + p_1(x)Dy(x) + p_2(x)y(x) = 0, \quad x \in [a, b] \quad (1.2)$$

Kajian tentang solusi dari persamaan diferensial (1.1) dengan syarat batas yang melibatkan turunan dari $y(x)$ di $x = a$ atau $x = b$ merupakan kajian klasik yang

*penulis korespondensi

banyak dijumpai dalam buku-buku teks [5] [6]. Dalam [7] diselesaikan persamaan diferensial linier orde dua dengan syarat batas *fractional*, dimana akar karakteristik dari persamaan karakteristik untuk (1.2) adalah imajiner murni. Dalam artikel ini, dikaji solusi persamaan diferensial linier orde dua dengan syarat batas memuat turunan *fractional* Riemann-Liouville kiri dimana akar karakteristik dari persamaan (1.2) adalah riil berbeda, dimana syarat batas yang dipergunakan adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\mu_1 D_{a+}^{\alpha_1} y(x)|_{x=b} + \mu_2 D_{a+}^{\alpha_2} y(x)|_{x=b} &= L_1 \\ \mu_3 D_{a+}^{\alpha_3} y(x)|_{x=b} + \mu_4 D_{a+}^{\alpha_4} y(x)|_{x=b} &= L_2\end{aligned}\quad (1.3)$$

dimana $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in [0, 2]$, $\alpha_1 \neq \alpha_3$ dan $\alpha_2 \neq \alpha_4$, $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, L_1, L_2 \in \mathbb{R}$, dengan $D_{a+}^{\alpha_1}, D_{a+}^{\alpha_2}, D_{a+}^{\alpha_3}$, dan $D_{a+}^{\alpha_4}$ adalah turunan *fractional* Riemann-Liouville kiri.

2. Landasan Teori

Diperkenalkan beberapa fungsi khusus yang berguna untuk menyelesaikan persamaan diferensial linier orde dua dengan syarat batas *fractional*.

Definisi 2.1. [3] *Fungsi Gamma dinyatakan sebagai $\Gamma(n)$, didefinisikan sebagai berikut:*

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx, \quad n > 0.$$

Definisi 2.2. [3] *Fungsi Beta dinyatakan sebagai $B(p, q)$ yang didefinisikan sebagai berikut:*

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad x \in \mathbb{R} \text{ dan } p, q \in \mathbb{C}$$

dimana $Re(p) > 0$ dan $Re(q) > 0$.

Definisi 2.3. [1] *Fungsi Mittag-Leffler dua parameter dinotasikan $E_{\alpha, \beta}$ didefinisikan sebagai berikut:*

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0, z \in \mathbb{C} \quad (2.1)$$

Deret Taylor pun turut serta memiliki peran penting untuk menghampiri nilai suatu fungsi berupa e^{rx} .

Teorema 2.4. [4] *Misalkan f fungsi yang turunan ke- $(n+1)$ -nya ada untuk setiap x pada selang terbuka I yang mengandung a , maka untuk setiap x di dalam I , berlaku*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x), \quad (2.2)$$

dengan sisa $R_n(x)$ dinyatakan oleh

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

dengan ξ adalah titik antara x dan a .

Bukti. Misalkan t terletak di antara x dan a , selanjutnya didefinisikan:

$$F(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \dots - \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n. \quad (2.3)$$

Akibatnya,

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Didefinisikan:

$$G(t) = F(t) - \left(\frac{x-t}{x-a}\right)^{n+1} F(a),$$

sehingga diperoleh $G(x) = G(a) = 0$. Berdasarkan Teorema Rolle diperoleh:

$$\begin{aligned} 0 &= G'(\xi) = F'(\xi) + (n+1)\left(\frac{x-\xi}{x-a}\right)^n F(a) \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + (n+1)\left(\frac{x-\xi}{x-a}\right)^n F(a), \end{aligned}$$

dimana:

$$F(a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (2.4)$$

Substitusikan (2.4) ke (2.3), sehingga diperoleh (2.2). $\square$

Jika $R_n(x) \rightarrow 0$ untuk $n \rightarrow \infty$, maka

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \quad (2.5)$$

yang disebut sebagai deret Taylor.

Jika $a = 0$ pada deret (2.5), maka deret tersebut disebut Deret Maclaurin yang dinyatakan oleh persamaan dibawah ini:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad (2.6)$$

Persamaan diferensial orde dua adalah persamaan diferensial biasa yang turunan tertingginya berorde dua. Perhatikan kembali persamaan diferensial orde dua pada (1.2). Kemungkinan bentuk akar persamaan karakteristik beserta solusi yang digunakan pada arikel ini adalah jika $a_1^2 - 4a_2a_0 > 0$ diperoleh akar-akar riil berbeda ($r_1 \neq r_2$). Dalam hal ini solusi dari (1.2) adalah

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x},$$

dengan C_1, C_2 adalah konstanta sebarang [2].

Definisi turunan *fractional* yang digunakan adalah salah definisi yang dikembangkan oleh Riemann dan Liouville yaitu definisi turunan *fractional* Riemann-Liouville kiri yang diberikan sebagai berikut:

Definisi 2.5. [1] *Turunan fractional Riemann-Liouville kiri orde α didefinisikan sebagai berikut:*

$$D_{a+}^{\alpha} y(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{y(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, & \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0, n = [\alpha] + 1 \\ D^n y(x), & \alpha = n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

dimana $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ dan $[\alpha]$ adalah bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan α .

3. Pembahasan

Jika $a_1^2 - 4a_2a_0 > 0$ diperoleh akar-akar riil berbeda ($r_1 \neq r_2$). Solusi dari (1.2) adalah

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, \quad (3.1)$$

dengan C_1, C_2 adalah konstanta sebarang.

Substitusikan (3.1) ke dalam syarat batas *fractional* (1.3), diperoleh:

$$\mu_1 D_{a+}^{\alpha_1} (C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x})|_{x=b} + \mu_2 D_{a+}^{\alpha_2} (C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x})|_{x=b} = L_1 \quad (3.2)$$

$$\mu_3 D_{a+}^{\alpha_3} (C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x})|_{x=b} + \mu_4 D_{a+}^{\alpha_4} (C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x})|_{x=b} = L_2 \quad (3.3)$$

Persamaan (3.2) dan (3.3) merupakan sistem persamaan linier yang dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

dengan C_1 dan C_2 adalah konstanta yang akan ditentukan dan

$$\begin{aligned} A_{11} &= \mu_1 D_{a+}^{\alpha_1} e^{r_1 x}|_{x=b} + \mu_2 D_{a+}^{\alpha_2} e^{r_1 x}|_{x=b} \\ A_{12} &= \mu_1 D_{a+}^{\alpha_1} e^{r_2 x}|_{x=b} + \mu_2 D_{a+}^{\alpha_2} e^{r_2 x}|_{x=b} \\ A_{21} &= \mu_3 D_{a+}^{\alpha_3} e^{r_1 x}|_{x=b} + \mu_4 D_{a+}^{\alpha_4} e^{r_1 x}|_{x=b} \\ A_{22} &= \mu_3 D_{a+}^{\alpha_3} e^{r_2 x}|_{x=b} + \mu_4 D_{a+}^{\alpha_4} e^{r_2 x}|_{x=b} \end{aligned}$$

Dari (3.4) harus ditentukan turunan *fractional* dari $e^{r_k x}$, yaitu

$$D_{a+}^{\alpha_j} e^{r_k x},$$

dengan $j = 1, 2, 3, 4$ dan $k = 1, 2$.

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha_j} e^{r_k x}|_{x=b} &= D_{a+}^{\alpha_j} e^{r_k(x-a)} e^{r_k a}|_{x=b}, \\ &= e^{r_k a} D_{a+}^{\alpha_j} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(r_k(x-a))^i}{i!} \Big|_{x=b}, \\ &= e^{r_k a} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{r_k^i}{i!} D_{a+}^{\alpha_j} (x-a)^i \Big|_{x=b} \end{aligned} \quad (3.5)$$

dimana :

$$D_{a+}^{\alpha_j}(x-a)^i|_{x=b} = \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+1-\alpha_j)}(x-a)^{i-\alpha_j}|_{x=b} \quad (3.6)$$

Substitusikan (3.6) ke (3.5), diperoleh

$$D_{a+}^{\alpha_j}e^{r_k x}|_{x=b} = e^{r_k a} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{r_k^i}{\Gamma(i+1-\alpha_j)}(b-a)^{i-\alpha_j}. \quad (3.7)$$

Dari (3.7) dapat ditentukan turunan *fractional* dari $y(x)$, yaitu

$$D_{a+}^{\alpha_j}y(x)$$

dengan $j = 1, 2, 3, 4$.

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha_j}y(x)|_{x=b} &= C_1 D_{a+}^{\alpha_j}e^{r_1 x}|_{x=b} + C_2 D_{a+}^{\alpha_j}e^{r_2 x}|_{x=b} \\ &= C_1 e^{r_1 a}(b-a)^{-\alpha_j} E_{1,1-\alpha_j}(r_1(b-a)) + C_2 e^{r_2 a}(b-a)^{-\alpha_j}, \\ &\quad \times E_{1,1-\alpha_j}(r_2(b-a)) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Contoh berikut mengilustrasikan operasional formula (3.4).

Contoh 3.1. Tentukan solusi dari masalah berikut:

$$D^2y(x) + 9Dy(x) + 18y(x) = 0, \quad x \in [-2, 4] \quad (3.9)$$

dengan syarat:

$$\begin{aligned} D_{-2+}^{\frac{1}{7}}y(x)\Big|_{x=4} + 6^{\frac{1}{2}}D_{-2+}^{\frac{1}{2}}y(x)\Big|_{x=4} &= 18 \\ 6^{\frac{4}{3}}D_{-2+}^{\frac{1}{3}}y(x)\Big|_{x=4} &= 21 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Penyelesaian.

Akar-akarnya berupa riil berbeda, yaitu $r_1 = -6$ dan $r_2 = -3$ sehingga bentuk solusi dari (3.9) adalah

$$y(x) = C_1 e^{-6x} + C_2 e^{-3x} \quad (3.11)$$

dengan C_1, C_2 adalah konstanta sebarang.

Syarat batas pada (3.10) dapat diselesaikan dengan mensubstitusikan (3.11) ke (3.10). Berikut ini penyelesaian syarat batas (3.10),

$$(i) \quad D_{-2+}^{\frac{1}{7}}y(x)\Big|_{x=4} + 6^{\frac{1}{2}}D_{-2+}^{\frac{1}{2}}y(x)\Big|_{x=4} = 18$$

Akan ditentukan turunan *fractional*, yaitu $D_{-2+}^{\frac{1}{7}}y(x)\Big|_{x=4}$ dan $6^{\frac{1}{2}}D_{-2+}^{\frac{1}{2}}y(x)\Big|_{x=4}$ dengan menggunakan (3.8):

$$\begin{aligned} D_{-2+}^{\frac{1}{7}}y(x)\Big|_{x=4} &= C_1 D_{-2+}^{\frac{1}{7}}e^{-6x}\Big|_{x=4} + C_2 D_{-2+}^{\frac{1}{7}}e^{-3x}\Big|_{x=4} \\ &= C_1 e^{12} 6^{-1/7} E_{1,6/7}(-36) + C_2 e^6 6^{-1/7} E_{1,6/7}(-18) \\ &= -467,3827C_1 - 2,4039C_2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} 6^{1/2}D_{-2+}^{\frac{1}{2}}y(x)\Big|_{x=4} &= 6^{1/2} \left[C_1 D_{-2+}^{\frac{1}{2}}e^{-6x}\Big|_{x=4} + C_2 D_{-2+}^{\frac{1}{2}}e^{-3x}\Big|_{x=4} \right] \\ &= C_1 e^{12} E_{1,1/2}(-36) + C_2 e^6 E_{1,1/2}(-18) \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$= -1332, 2C_1 - 6, 93668C_2$$

Dari (3.12) dan (3.13), diperoleh

$$\begin{aligned} 18 &= D_{-2+}^{\frac{1}{2}} y(x) \Big|_{x=4} + 6^{1/2} D_{-2+}^{\frac{1}{2}} y(x) \Big|_{x=4}, \\ &= C_1 e^{12} (6^{-1/7} E_{1,6/7}(-36)) + E_{1,1/2}(-36) + C_2 e^6 \left(6^{-1/7} E_{1,6/7}(18) + E_{1,1/2}(-18) \right) \\ &= -1799, 6C_1 - 9, 3C_2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$(ii) \quad 6^{4/3} D_{-2+}^{\frac{1}{3}} y(x) \Big|_{x=4} = 21$$

Akan ditentukan turunan *fractional* dari $6^{4/3} D_{-2+}^{\frac{1}{3}} y(x) \Big|_{x=4}$. Dengan menggunakan (3.8), diperoleh

$$\begin{aligned} 6^{4/3} D_{-2+}^{\frac{1}{3}} y(x) \Big|_{x=4} &= 6^{4/3} D_{-2+}^{\frac{1}{3}} C_1 e^{-6x} \Big|_{x=4} + 6^{4/3} D_{-2+}^{\frac{1}{3}} C_2 e^{-3x} \Big|_{x=4}, \\ 21 &= C_1 e^{12} 6^1 E_{1,2/3}(-36) + C_2 e^6 6^1 E_{1,2/3}(-18), \\ &= -6940, 7C_1 - 35, 9318C_2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Persamaan (3.14) dan (3.15) secara bersama-sama dapat ditulis:

$$\begin{bmatrix} -1799, 6 & -9, 3 \\ -6940, 7 & -35, 9318 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 21 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Solusi dari (3.16) adalah $C_1 = 2, 6580$ dan $C_2 = -514, 0206$.

Akibatnya, solusi dari (3.9) adalah

$$y(x) = 2, 6580e^{-6x} - 514, 0206e^{-3x}, \quad x \in [-2, 4] \quad (3.17)$$

Contoh 3.2. Tentukan solusi dari masalah berikut:

$$D^2 y(x) + 3Dy(x) + 2y(x) = 0, \quad x \in [0, 10] \quad (3.18)$$

dengan syarat:

$$\begin{aligned} 10^{\frac{4}{5}} D_{0+}^{\frac{4}{5}} y(x) \Big|_{x=10} + 10^{\frac{1}{2}} D_{0+}^{\frac{1}{2}} y(x) \Big|_{x=10} &= 0.005 \\ 10^{\frac{3}{2}} D_{0+}^{\frac{3}{2}} y(x) \Big|_{x=10} + 10^{\frac{1}{3}} D_{0+}^{\frac{1}{3}} y(x) \Big|_{x=10} &= 0.001 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Penyelesaian.

Akar-akar karakteristiknya berupa riil berbeda, yaitu $r_1 = -2$ dan $r_2 = -1$ sehingga bentuk solusi dari persamaan diferensial biasa pada (3.18) adalah

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} \quad (3.20)$$

dimana C_1, C_2 adalah konstanta sebarang.

Syarat batas (3.19) dapat diselesaikan dengan mensubstitusikan (3.20) ke (3.19).

Berikut ini merupakan penyelesaian dari syarat batas (3.19),

$$(i) \quad 10^{\frac{4}{5}} D_{0+}^{\frac{4}{5}} y(x) \Big|_{x=10} + 10^{\frac{1}{2}} D_{0+}^{\frac{1}{2}} y(x) \Big|_{x=10} = 0.005$$

Akan ditentukan turunan *fractional*, yaitu $10^{\frac{4}{5}} D_{0+}^{\frac{4}{5}} y(x) \Big|_{x=10}$ dan $10^{\frac{1}{2}} D_{0+}^{\frac{1}{2}} y(x) \Big|_{x=10}$.

Dari (3.8) diperoleh

$$\begin{aligned} 10^{\frac{4}{5}} D_{0+}^{\frac{4}{5}} y(x) \Big|_{x=10} &= 10^{\frac{4}{5}} C_1 D_{0+}^{\frac{4}{5}} e^{-2x} \Big|_{x=10} + 10^{\frac{4}{5}} C_2 D_{0+}^{\frac{4}{5}} e^{-x} \Big|_{x=10} \\ &= C_1 E_{1, \frac{1}{5}}(-20) + C_2 E_{1, \frac{1}{5}}(-10) \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$= -0,0096C_1 - 0,0224C_2$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} 10^{\frac{1}{2}} D_{0+}^{\frac{1}{2}} y(x) \Big|_{x=10} &= 10^{\frac{1}{2}} C_1 D_{0+}^{\frac{1}{2}} e^{-2x} \Big|_{x=10} + 10^{\frac{1}{2}} C_2 D_{0+}^{\frac{1}{2}} e^{-x} \Big|_{x=10} \\ &= C_1 E_{1, \frac{1}{2}}(-20) + C_2 E_{1, \frac{1}{2}}(-10) \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$= -0,0153C_1 - 0,0343C_2$$

Dari (3.21) dan (3.22), diperoleh:

$$\begin{aligned} 0.005 &= C_1(E_{1, \frac{1}{5}}(-20) + E_{1, \frac{1}{2}}(-20)) + C_2(E_{1, \frac{1}{5}}(-10) - e^{15} E_{1, \frac{1}{2}}(-10)) \\ &= -0.0249C_1 - 0.0567C_2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$(ii) \quad 10^{\frac{3}{2}} D_{0+}^{\frac{3}{2}} y(x) \Big|_{x=10} + 10^{\frac{1}{3}} D_{0+}^{\frac{1}{3}} y(x) \Big|_{x=10} = 0.001$$

Akan ditentukan turunan *fractional*, yaitu $10^{\frac{3}{2}} D_{0+}^{\frac{3}{2}} y(x) \Big|_{x=10}$ dan $10^{\frac{1}{3}} D_{0+}^{\frac{1}{3}} y(x) \Big|_{x=10}$.

Dengan menggunakan (3.8), diperoleh

$$\begin{aligned} 10^{\frac{3}{2}} D_{0+}^{\frac{3}{2}} y(x) \Big|_{x=10} &= 10^{\frac{3}{2}} C_1 D_{0+}^{\frac{3}{2}} e^{-2x} \Big|_{x=10} + 10^{\frac{3}{2}} C_2 D_{0+}^{\frac{3}{2}} e^{-x} \Big|_{x=10} \\ &= C_1 E_{1, \frac{-1}{2}}(-20) + C_2 E_{1, \frac{-1}{2}}(-10) \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$= 0.0244C_1 + 0.3428C_2$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} 10^{\frac{1}{3}} D_{0+}^{\frac{1}{3}} y(x) \Big|_{x=10} &= 10^{\frac{1}{3}} C_1 D_{0+}^{\frac{1}{3}} e^{-2x} \Big|_{x=10} + 10^{\frac{1}{3}} C_2 D_{0+}^{\frac{1}{3}} e^{-x} \Big|_{x=10} \\ &= C_1 E_{1, \frac{2}{3}}(-20) + C_2 E_{1, \frac{2}{3}}(-10) \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$= -0.0132C_1 - 0.0291C_2$$

Dari (3.24) dan (3.25) dapat diperoleh:

$$\begin{aligned} 0.001 &= C_1(E_{1, \frac{-1}{2}}(-20) + E_{1, \frac{2}{3}}(-20)) + C_2(E_{1, \frac{-1}{2}}(-10) + E_{1, \frac{2}{3}}(-10)) \\ &= 0.0111C_1 + 0.3136C_2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Persamaan (3.23) dan (3.26) secara bersama-sama dapat ditulis:

$$\begin{bmatrix} -0.0249 & -0.0567 \\ 0.0111 & 0.3136 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,005 \\ 0,001 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Solusi dari (3.27) adalah $C_1 = -0.2259$ dan $C_2 = 0.0112$.

Akibatnya, solusi dari (3.18) adalah

$$y(x) = -0.2259e^{-2x} + 0.0112e^{-x}, \quad x \in [0, 10] \quad (3.28)$$

4. Kesimpulan

Berdasarkan uraian sebelumnya, solusi dari persamaan diferensial linier orde dua

$$a_2 D^2 y(x) + a_1 D y(x) + a_0 y(x) = 0 \quad (4.1)$$

dengan syarat batas *fractional*:

$$\begin{aligned} \mu_1 D_{a+}^{\alpha_1} y(x)|_{x=b} + \mu_2 D_{a+}^{\alpha_2} y(x)|_{x=b} &= L_1 \\ \mu_3 D_{a+}^{\alpha_3} y(x)|_{x=b} + \mu_4 D_{a+}^{\alpha_4} y(x)|_{x=b} &= L_2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

dimana $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in [0, 2]$, $\alpha_1 \neq \alpha_3$ dan $\alpha_2 \neq \alpha_4$, serta $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, L_1, L_2 \in \mathbb{R}$, $D_{a+}^{\alpha_1}, D_{a+}^{\alpha_2}, D_{a+}^{\alpha_3}$, dan $D_{a+}^{\alpha_4}$ adalah turunan *fractional* Riemann-Liouville kiri orde α dinyatakan sebagai berikut:

Jika $a_1^2 - 4a_2a_0 > 0$ maka diperoleh akar-akar riil berbeda ($r_1 \neq r_2$). Solusi (4.1) adalah

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x},$$

dengan C_1 dan C_2 adalah konstanta yang akan ditentukan dari sistem persamaan linier berikut:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix},$$

dan

$$\begin{aligned} A_{11} &= \mu_1 D_{a+}^{\alpha_1} e^{r_1 x}|_{x=b} + \mu_2 D_{a+}^{\alpha_2} e^{r_1 x}|_{x=b} \\ A_{12} &= \mu_1 D_{a+}^{\alpha_1} e^{r_2 x}|_{x=b} + \mu_2 D_{a+}^{\alpha_2} e^{r_2 x}|_{x=b} \\ A_{21} &= \mu_3 D_{a+}^{\alpha_3} e^{r_1 x}|_{x=b} + \mu_4 D_{a+}^{\alpha_4} e^{r_1 x}|_{x=b} \\ A_{22} &= \mu_3 D_{a+}^{\alpha_3} e^{r_2 x}|_{x=b} + \mu_4 D_{a+}^{\alpha_4} e^{r_2 x}|_{x=b} \end{aligned}$$

dimana:

$$D_{a+}^{\alpha_j} e^{r_k x} = e^{r_k a} (b-a)^{-\alpha} E_{1,1-\alpha}(r_k(b-a)), \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad k = 1, 2. \quad (4.3)$$

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Prof. Dr. Muhafzan, Bapak Dr. Admi Nazra, Bapak Efendi, M.Si, dan Ibu Dr. Susila Bahri yang telah memberikan masukan dan saran dalam penyempurnaan penulisan artikel ini.

Daftar Pustaka

- [1] A.A. Kilbas, H. M. Srivastava, dan J. J. Trujillo. 2006. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Amsterdam: Elsevier.
- [2] Boyce, W. E., DiPrima, R. C. 1965. *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problems*. Canada: John Wiley & Sons, Inc.
- [3] Podlubny, I. 1999. *Fractional Differential Equations*. London: ACADEMIC PRESS.
- [4] Purcell, Edwin J., Varberg, D. dan Steven E. Rigdon. 2004. *Kalkulus Edisi Kedelapan. Jilid 2*. Jakarta: Erlangga.

- [5] Ross, L. Shepley. 1996. *Introduction To Ordinary Differential Equation, Third Edition*. USA: John Willey & Sons, Inc.
- [6] Trench, William F. 2001. *Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems*. San Francisco: Brooks/Cole Thomson Learning.
- [7] Ciesielski, M., Blaszczyk, T. 2018. *An Exact of the Second-Order Differential Equation with the Fractional/Generalized Boundary Condition*. Advances in Mathematical Physics, Vol. 2018, 1-9. doi: 10.115/2018/7283518.