TEOREMA TITIK TETAP DI RUANG NORM-2 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot, \cdot\|_2)$

MARWAN, SHELVI EKARIANI*, HARIPAMYU

*Program Studi S1 Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
 email : marwan260598@gmail.com, shelviekariani@sci.unand.ac.id, haripamyu@sci.unand.ac.id*

Diterima 15 Desember 2020 Direvisi 29 Desember 2020 Dipublikasikan 12 Januari 2021

Abstrak. Pada penelitian ini akan dibahas teorema titik tetap di ruang norm-2 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot, \cdot\|_2)$. Teorema titik tetap merupakan teorema yang menyatakan eksistensi dan ketunggalan titik tetap. Norm-2 $\|\cdot, \cdot\|_2$ didefinisikan sebagai $\|x, y\|_2 := \det \begin{pmatrix} x \cdot x & x \cdot y \\ y \cdot x & y \cdot y \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}}$ dengan $x, y \in \mathbb{R}^n$. Pasangan terurut ruang vektor $\mathbb{R}^n$ dengan norm-2 $\|\cdot, \cdot\|_2$ disebut ruang norm-2 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot, \cdot\|_2)$. Ruang norm-2 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot, \cdot\|_2)$ merupakan ruang banach artinya ruang norm-2 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot, \cdot\|_2)$ bersifat lengkap. Ruang norm-2 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot, \cdot\|_2)$ bersifat lengkap dibuktikan dengan cara menunjukkan ekivalensi antara norm dengan norm baru. Norm baru ini dibangun dari norm-2 $\|\cdot, \cdot\|_2$ dengan menggunakan dua vektor yang bebas linier. Teorema titik tetap menyatakan jika pemetaan $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dari ruang norm-2 lengkap $(\mathbb{R}^n, \|\cdot, \cdot\|_2)$ merupakan pemetaan kontraktif maka T memiliki titik tetap yang tunggal.

Kata Kunci: Norm, Ruang norm-2, Teorema Titik Tetap.

1. Pendahuluan

Gagasan dari ruang norm-2 diperkenalkan pertama kalinya oleh Gähler pada tahun 1964. Pada tahun 1970 dilanjutkan dengan diperkenalkannya konsep ruang hasil kali dalam-2 oleh Gähler, Diminnie dan White [5]. Pada tahun 1989, ruang hasil kali dalam diperumum lagi oleh Misiak menjadi ruang hasil kali dalam-n (untuk $n \geq 2$). Lalu penelitian tentang norm-2 ini dilanjutkan oleh Gunawan, Mashadi pada tahun 2001 [7], H. Gunawan pada tahun 2002 [8] dan M.Acikgoz pada tahun 2009 [1].

Pada Tahun 2011, Nur pada [11] memformulasikan suatu teorema titik tetap pada ruang Norm-2 $(X, \|\cdot, \cdot\|_s)$ dimana Norm-2 yang digunakan yaitu norm-2 standar menggunakan hasil kali dalam sebarang. Pada Tahun 2013, Idris, Ekariani dan Gunawan memformulasikan suatu titik tetap di ruang l^p sebagai ruang norm-2.

*penulis korespondensi

Sedangkan pada tulisan ini akan diformulasikan suatu teorema titik tetap di ruang norm-2 ($\mathbb{R}^n, \|\cdot, \cdot\|_2$) dengan norm standar yang didefinisikan sebagai $\|x, y\|_s := \left| \frac{\langle x, x \rangle \langle x, y \rangle}{\langle y, x \rangle \langle y, y \rangle} \right|^{1/2}$ dimana hasil kali dalamnya didefinisikan sebagai hasil kali titik.

2. Landasan Teori

2.1. Ruang Norm

Definisi 2.1. [10] Suatu norm pada ruang vektor (riil atau kompleks) X adalah suatu fungsi bernilai riil dinotasikan oleh $\|\cdot\|$, yang memenuhi :

- $\|x\| \geq 0$,
- $\|x\| = 0 \iff x = \mathbf{0}$,
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (sifat ketaksamaan segitiga),

dengan x, y adalah sebarang vektor di X dan α adalah sebarang skalar. Ruang norm didefinisikan sebagai ruang vektor dengan norm yang didefinisikan di dalamnya, ditulis $(X, \|\cdot\|)$ atau dalam bentuk yang lebih sederhana X .

Jika $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ merupakan suatu ruang hasil kali dalam maka norm sebuah vektor x dinyatakan dengan $\|x\|$, yang didefinisikan sebagai $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \geq 0$.

Definisi 2.2. [10] Norm $\|\cdot\|$ dan norm $\|\cdot\|_0$ pada ruang vektor X disebut ekuivalen jika ada $a, b > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in X$ berlaku, $a\|x\|_0 \leq \|x\| \leq b\|x\|_0$.

2.2. Teorema Titik Tetap Banach

Definisi 2.3. [10] Suatu barisan (x_n) pada ruang norm $(X, \|\cdot\|)$ dikatakan konvergen ke $x \in X$ jika $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$ atau dengan kata lain untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat suatu bilangan asli $N = N_\epsilon$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku $\|x_n - x\| < \epsilon$.

Definisi 2.4. [10] Suatu barisan (x_n) pada ruang norm $(X, \|\cdot\|)$ disebut Cauchy jika $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$ atau untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat suatu bilangan asli $N = N_\epsilon$ sedemikian sehingga untuk setiap $m, n \geq N$ berlaku $\|x_m - x_n\| < \epsilon$.

Definisi 2.5. [10] Ruang Banach adalah ruang norm yang lengkap yaitu ruang norm yang apabila setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen ke $x \in X$.

Definisi 2.6. [10] Suatu titik tetap dari pemetaan $T : X \rightarrow X$ dari suatu himpunan X ke dirinya sendiri adalah suatu nilai $x \in X$ yang dipetakan ke dirinya sendiri, atau

$$Tx = x.$$

Definisi 2.7. Misalkan $X = (X, \|\cdot\|)$ suatu ruang norm. Suatu pemetaan $T : X \rightarrow X$. Pemetaan T dikatakan Pemetaan Lipschitz jika terdapat kons-tanta $k > 0$,

sedemikian sehingga untuk setiap $x, y \in X$ berlaku

$$\|Tx - Ty\| \leq k\|x - y\|.$$

Infimum dari semua kemungkinan konstanta k disebut dengan konstanta Lipschitz dari T . Jika konstanta Lipschitz kecil dari 1, T disebut suatu pemetaan kontraktif.

Teorema 2.8. [10] Misalkan $X = (X, \|\cdot\|)$ adalah suatu ruang norm. Jika X lengkap dan $T : X \rightarrow X$ suatu pemetaan kontraktif pada X , maka T mempunyai titik tetap yang tunggal.

Bukti. Akan dikonstruksi suatu barisan (x_n) dan akan ditunjukkan barisan tersebut adalah barisan Cauchy. karena X bersifat lengkap maka barisan tersebut konvergen ke $x \in X$, lalu akan dibuktikan limit x nya adalah suatu titik tetap dari T dan T tidak mempunyai titik tetap yang lain. Ambil sembarang $x_0 \in X$ dan definisikan "barisan iterasi" (x_n) sebagai

$$\begin{aligned} x_0, \\ x_1 &= Tx_0, \\ x_2 &= Tx_1 = T^2x_0, \\ &\vdots \\ x_n &= T^n x_0. \end{aligned}$$

Akan ditunjukkan (x_n) Cauchy.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \|x_{m+1} - x_m\| &= \|Tx_m - Tx_{m-1}\| \\ &\leq k\|x_m - x_{m-1}\| \\ &\leq k^2\|x_{m-1} - x_{m-2}\| \\ &\vdots \\ &\leq k^m\|x_1 - x_0\|, \end{aligned}$$

dengan sifat ketaksamaan segitiga dan rumus jumlah deret geometri diperoleh untuk $n > m$,

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\| &\leq \|x_m - x_{m+1}\| + \|x_{m+1} - x_{m+2}\| + \cdots + \|x_{n-1} - x_n\| \\ &\leq k^m\|x_1 - x_0\| + k^{m+1}\|x_1 - x_0\| + \cdots + k^{n-1}\|x_1 - x_0\| \\ &= (k^m + k^{m+1} + \cdots + k^{n-1})\|x_1 - x_0\| \\ &= k^m \frac{1 - k^{n-m}}{1 - k} \|x_1 - x_0\| \end{aligned}$$

karena $0 < k < 1$, diperoleh $1 - k^{n-m} < 1$. Akibatnya,

$$\|x_m - x_n\| \leq \frac{k^m}{1 - k} \|x_1 - x_0\|.$$

Pada ruas kanan, untuk $0 < k < 1$ dan $\|x_0 - x_1\|$ dapat ditetapkan, jadi ruas kanan dapat dijadikan sekecil mungkin dengan mengambil m sebesar mungkin dan

($n > m$). Ini membuktikan bahwa (x_m) adalah Cauchy. Karena $\mathbb{R}^n$ bersifat lengkap maka (x_m) konvergen, katakanlah $x_m \rightarrow x$. Akan ditunjukkan limit x adalah suatu titik tetap dari pemetaan T .

Dari ketaksamaan segitiga diperoleh

$$\begin{aligned}\|x - Tx\| &\leq \|x - x_m\| + \|x_m - Tx\| \\ &\leq \|x - x_m\| + k\|x_{m-1} - x\|.\end{aligned}$$

Penjumlahan pada ruas kanan dapat dijadikan lebih kecil dari $\epsilon > 0$, karena $x_m \rightarrow x$. Disimpulkan bahwa $\|x - Tx\| = 0$, jadi $x = Tx$. Ini menunjukkan x adalah titik tetap dari T . Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa x adalah satu-satunya titik tetap dari T . Misalkan terdapat titik tetap lain $\bar{x}$ sehingga diperoleh $T\bar{x} = \bar{x}$. Dari Definisi (2.7) $\|x - \bar{x}\| = \|Tx - T\bar{x}\| \leq k\|x - \bar{x}\|$ saat $k < 1$,

$$\begin{aligned}\|x - \bar{x}\| &\leq k\|x - \bar{x}\| \\ (\Leftrightarrow)(1 - k)\|x - \bar{x}\| &\leq 0\end{aligned}$$

sedangkan dari definisi norm diperoleh $\|x - \bar{x}\| \geq 0$. Dapat disimpulkan $\|x - \bar{x}\| = 0$. yang mengakibatkan $x = \bar{x}$ sehingga teorema terbukti. $\square$

2.3. Ruang Norm-2

Definisi 2.9. [6] Misalkan X adalah ruang vektor dengan dimensi X sekurang-kurangnya 2. Suatu Norm-2 pada himpunan X adalah fungsi $\|\cdot, \cdot\| : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi sifat sebagai berikut:

- (1) $\|x, y\| \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$.
- (2) $\|x, y\| = 0 \Leftrightarrow x, y$ bergantung linier.
- (3) $\|x, y\| = \|y, x\|$ untuk setiap $x, y \in X$ (sifat simetri).
- (4) $\|\alpha x, y\| = |\alpha|\|x, y\|$ untuk setiap $x, y \in X$ dan α skalar.
- (5) $\|x + y, z\| \leq \|x, z\| + \|y, z\|$ untuk setiap $x, y, z \in X$ (sifat ketaksamaan segitiga).

Pasangan terurut $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ disebut ruang norm-2 dimana $\|\cdot, \cdot\|$ norm-2 dan X ruang vektor.

Definisi 2.10. [13] Misalkan $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ adalah ruang norm-2. Suatu barisan (x_n) di X dikatakan konvegen ke $x \in X$ jika dan hanya jika

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, y\| = 0$$

untuk setiap $y \in X$.

Definisi 2.11. [13] Misalkan $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ adalah ruang norm-2. Suatu barisan (x_n) pada X disebut Cauchy jika untuk setiap $y \in X$ berlaku

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|x_m - x_n, y\| = 0.$$

Definisi 2.12. [14] Ruang norm-2 $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ dikatakan ruang Banach-2 jika dan hanya jika setiap barisan Cauchy di ruang tersebut konvergen ke $x \in X$.

3. Pembahasan

3.1. Norm-2 pada $\mathbb{R}^n$

Misalkan $(\mathbb{R}^n, \|\cdot, \cdot\|_2)$ merupakan ruang norm-2, didefinisikan sebagai :

$$\|x, y\|_2 := \det \begin{pmatrix} x \cdot x & x \cdot y \\ y \cdot x & y \cdot y \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} = \left| \frac{x \cdot x \cdot y \cdot y}{y \cdot x \cdot y \cdot y} \right|^{\frac{1}{2}}$$

Didefinisikan norm pada $\mathbb{R}^n$ sebagai berikut $\|x\|_1^* := [\|x, a_1\|_2^2 + \|x, a_2\|_2^2]^{\frac{1}{2}}$ dimana $\{a_1, a_2\}$ adalah himpunan yang bebas linier pada ruang $\mathbb{R}^n$. Akan ditunjukkan $\|x\|_1^*$ merupakan norm.

Perhatikan untuk setiap $x, a_1, a_2, y \in \mathbb{R}^n$ dengan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

- (1) Jelas bahwa $\|x\|_1^* \geq 0$ karena

$$\|x, a_1\|_2^2 = \left| \frac{x \cdot x \cdot a_1 \cdot a_1}{a_1 \cdot x \cdot a_1 \cdot a_1} \right| \geq 0 \text{ dan}$$

$$\|x, a_2\|_2^2 = \left| \frac{x \cdot x \cdot a_2 \cdot a_2}{a_2 \cdot x \cdot a_2 \cdot a_2} \right| \geq 0 \text{ sehingga}$$

$$\|x\|_1^* = [\|x, a_1\|_2^2 + \|x, a_2\|_2^2]^{\frac{1}{2}} \geq 0.$$

- (2) ($\Rightarrow$) Misalkan $\|x\|_1^* = 0$. Akan ditunjukkan bahwa $x=0$.

Karena $\|x\|_1^* = 0$ diperoleh $\|x, a_1\|_2 = 0$ dan $\|x, a_2\|_2 = 0$.

Misalkan $x = ka_1$. Perhatikan,

$$\|x, a_2\|_2 = \|ka_1, a_2\|_2 = k\|a_1, a_2\|_2 = 0.$$

Karena $\{a_1, a_2\}$ bebas linier, persamaan $k\|a_1, a_2\|_2 = 0$ hanya dapat dipenuhi jika $k = 0$. Karena $x = ka_1$ sehingga diperoleh $x = 0$.

($\Leftarrow$) Misalkan $x=0$ akan ditunjukkan bahwa $\|x\|_1^* = 0$.

Karena $x = 0$ artinya $x_i = 0$ untuk setiap $i = 1, 2$ sehingga

$$\|x\|_1^* = [\|x, a_1\|_2^2 + \|x, a_2\|_2^2]^{\frac{1}{2}} = 0.$$

- (3) Akan ditunjukkan $\|\alpha x\|_1^* = |\alpha| \|x\|_1^*$.

$$\begin{aligned} \|\alpha x\|_1^* &= [\|\alpha x, a_1\|_2^2 + \|\alpha x, a_2\|_2^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= [\|\alpha x, a_1\|_2^2 + \|\alpha x, a_2\|_2^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= [\alpha^2 \|x, a_1\|_2^2 + \alpha^2 \|x, a_2\|_2^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= [(\alpha)^2 (\|x, a_1\|_2^2 + \|x, a_2\|_2^2)]^{\frac{1}{2}} \\ &= |\alpha| [\|x, a_1\|_2^2 + \|x, a_2\|_2^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= |\alpha| \|x\|_1^*. \end{aligned}$$

- (4) Akan ditunjukkan $\|x + y\|_1^* \leq \|x\|_1^* + \|y\|_1^*$

Perhatikan

$$\begin{aligned} \|x + y, a_1\|_2^2 &\leq (\|x, a_1\|_2 + \|y, a_1\|_2)^2 \\ \|x + y, a_2\|_2^2 &\leq (\|x, a_2\|_2 + \|y, a_2\|_2)^2 \\ \Leftrightarrow \|x + y\|_1^* &\leq ((\|x, a_1\|_2 + \|y, a_1\|_2)^2 + (\|x, a_2\|_2 + \|y, a_2\|_2)^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (\|x, a_1\|_2^2 + \|x, a_2\|_2^2)^{\frac{1}{2}} + (\|y, a_1\|_2^2 + \|y, a_2\|_2^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|x\|_1^* + \|y\|_1^* \end{aligned}$$

Dari 1,2,3 dan 4 terbukti $\|\cdot\|_1^*$ adalah norm.

Hal ini juga mengakibatkan $\|x\|_2^* = [\|x, b_1\|^2 + \|x, b_2\|^2]^{\frac{1}{2}}$ adalah norm. Himpunan b_1 dan b_2 didapatkan dengan cara membuat himpunan a_1 dan a_2 yang ortogonal menjadi ortonormal. $\{b_1, b_2\}$ hasil Gram-Schmidt dari $\{a_1, a_2\}$.

Teorema 3.1. *Jika $\|\cdot\|$ adalah norm dan $\|\cdot, \cdot\|_2$ adalah norm-2 maka untuk setiap $x \in \mathbb{R}^n$ berlaku,*

$$\|x\|^2 \leq \|x\|_2^*.$$

Bukti. Ambil $x \in \mathbb{R}^n$ sebarang.

$$\|x, b_1\|_2^2 = \begin{vmatrix} x \cdot x & x \cdot b_1 \\ b_1 \cdot x & b_1 \cdot b_1 \end{vmatrix} = \|x\|^2 - \langle x, b_1 \rangle^2,$$

$$\|x, b_2\|_2^2 = \begin{vmatrix} x \cdot x & x \cdot b_2 \\ b_2 \cdot x & b_2 \cdot b_2 \end{vmatrix} = \|x\|^2 - \langle x, b_2 \rangle^2.$$

$\{b_1, b_2\}$ adalah himpunan ortonormal pada $\mathbb{R}^n$ dan berdasarkan ketaksamaan Bessel, maka,

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &\leq \|x\|^2 - \langle x, b_1 \rangle^2 + \|x\|^2 - \langle x, b_2 \rangle^2 \\ &= \|x, b_1\|_2^2 + \|x, b_2\|_2^2 \\ &\leq [\|x, b_1\|_2^2 + \|x, b_2\|_2^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= \|x\|_2^*. \end{aligned}$$

□

3.2. Kekonvergenan Barisan pada Ruang Norm-2($\mathbb{R}^n, \|\cdot, \cdot\|_2$)

Lema 3.2. *Suatu barisan (x_n) konvergen ke x pada $\mathbb{R}^n$ terhadap norm-2 jika dan hanya jika $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, b_1\|_2 = 0$ dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, b_2\|_2 = 0$. Barisan (x_n) Cauchy pada $\mathbb{R}^n$ terhadap norm-2 jika dan hanya jika $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, b_1\|_2 = 0$ dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, b_2\|_2 = 0$.*

Bukti.

- (1) Barisan (x_n) konvergen ke x pada $\mathbb{R}^n$ terhadap norm-2 jika dan hanya jika $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, b_1\|_2 = 0$ dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, b_2\|_2 = 0$

($\Rightarrow$) Misalkan barisan (x_n) konvergen ke x pada $(\mathbb{R}^n, \|\cdot, \cdot\|_2)$, dengan menggunakan definisi kekonvergenan diperoleh $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, y\|_2 = 0$ untuk setiap $y \in \mathbb{R}^n$. Karena $\{b_1, b_2\}$ adalah hasil Gram-Schmidt dari $\{a_1, a_2\}$, dengan $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$ maka $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^n$, sehingga $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, b_1\|_2 = 0$ dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, b_2\|_2 = 0$.

($\Leftarrow$) Misalkan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, b_i\|_2 = 0$ untuk setiap $i = 1, 2$. Akan dibuktikan barisan (x_n) konvergen ke x pada $(\mathbb{R}^n, \|\cdot, \cdot\|_2)$. Untuk setiap $y \in \mathbb{R}^n$ misalkan y dapat ditulis menjadi $y = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$. Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, y\|_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2\|_2 \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (|\alpha_1| \|x_n - x, b_1\|_2 + |\alpha_2| \|x_n - x, b_2\|_2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_1| \|x_n - x, b_1\|_2 + \lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_2| \|x_n - x, b_2\|_2. \end{aligned}$$

Karena $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, b_i\|_2 = 0$ diperoleh $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, y\|_2 \leq 0$ untuk setiap $i = 1, 2$, sedangkan dari definisi norm diperoleh $\|x_n - x, y\|_2 \geq 0$, sehingga disimpulkan bahwa $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, y\|_2 = 0$ atau dengan kata lain barisan (x_n) konvergen ke x pada $\mathbb{R}^n$.

- (2) Barisan (x_n) Cauchy pada $\mathbb{R}^n$ terhadap norm-2 jika dan hanya jika

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, b_1\|_2 = 0 \text{ dan } \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, b_2\|_2 = 0.$$

($\Rightarrow$) Misalkan barisan (x_n) Cauchy pada $(\mathbb{R}^n, \|\cdot, \cdot\|_2)$, dengan menggunakan definisi Cauchy diperoleh $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, y\|_2 = 0$ untuk setiap $y \in \mathbb{R}^n$. Karena $\{b_1, b_2\}$ adalah hasil Gram-Schmidt dari $\{a_1, a_2\}$, dengan $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$ maka $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^n$, sehingga dapat disimpulkan bahwa $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, b_1\|_2 = 0$ dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, b_2\|_2 = 0$.

($\Leftarrow$) Misalkan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, b_i\|_2 = 0$ dengan $i = 1, 2$. Akan dibuktikan barisan (x_n) Cauchy pada $(\mathbb{R}^n, \|\cdot, \cdot\|_2)$. Untuk setiap $y \in \mathbb{R}^n$ misalkan y dapat ditulis menjadi $y = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$. Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, y\|_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2\|_2 \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (|\alpha_1| \|x_n - x_m, b_1\|_2 + |\alpha_2| \|x_n - x_m, b_2\|_2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_1| \|x_n - x_m, b_1\|_2 + \lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_2| \|x_n - x_m, b_2\|_2. \end{aligned}$$

Karena $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, b_i\|_2 = 0$ diperoleh $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, y\|_2 \leq 0$ untuk setiap $i = 1, 2$ sedangkan dari definisi norm diperoleh $\|x_n - x_m, y\|_2 \geq 0$, sehingga disimpulkan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, y\|_2 = 0$, dengan kata lain barisan (x_n) Cauchy pada $(\mathbb{R}^n, \|\cdot, \cdot\|_2)$. $\square$

Lema 3.3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, a_1\|_2 = 0$ dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, a_2\|_2 = 0$ jika dan hanya jika $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, b_1\|_2 = 0$ dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, b_2\|_2 = 0$. Lebih jauh suatu barisan (x_n) konvergen ke x terhadap $\|\cdot\|_1^*$ jika dan hanya jika (x_n) konvergen ke x terhadap $\|\cdot\|_2^*$, dan (x_n) barisan Cauchy terhadap $\|\cdot\|_1^*$ jika dan hanya jika (x_n) barisan Cauchy terhadap $\|\cdot\|_2^*$.

Bukti.

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, a_1\|_2 = 0$ dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, a_2\|_2 = 0$ jika dan hanya jika $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, b_1\|_2 = 0$ dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, b_2\|_2 = 0$.

($\Rightarrow$) Misalkan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, a_1\|_2 = 0$ dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, a_2\|_2 = 0$. Akan dibuktikan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, b_1\|_2 = 0$ dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, b_2\|_2 = 0$. Karena $\{b_1, b_2\}$ adalah hasil Gram-Schmidt dari $\{a_1, a_2\}$ dapat misalkan $b_1 = ka_1$ dan $b_2 = l_1 a_1 + l_2 a_2$.

Perhatikan

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, b_1\|_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, ka_1\|_2 \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} |k| \|x_n - x, a_1\|_2 \\
&= |k| \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, a_1\|_2 \\
&= |k|.0 \\
&= 0 \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, b_2\|_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, l_1a_1 + l_2a_2\|_2 \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (|l_1| \|x_n - x, a_1\|_2 + |l_2| \|x_n - x, a_2\|_2) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} |l_1| \|x_n - x, a_1\|_2 + \lim_{n \rightarrow \infty} |l_2| \|x_n - x, a_2\|_2 \\
&= |l_1|.0 + |l_2|.0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Karena $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, a_i\|_2 = 0$ diperoleh $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, b_i\|_2 \leq 0$ untuk setiap $i = 1, 2$, sedangkan dari definisi norm $\|x_n - x, b_2\|_2 \geq 0$, sehingga disimpulkan bahwa $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, b_i\|_2 = 0$ untuk $i = 1, 2$.

($\Leftarrow$) Misalkan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, b_1\|_2 = 0$ dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, b_2\|_2 = 0$. Akan dibuktikan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, a_1\|_2 = 0$ dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, a_2\|_2 = 0$. Karena $\{b_1, b_2\}$ adalah hasil Gram-Schmidt dari $\{a_1, a_2\}$ diperoleh $a_1 = sb_1$ dan $a_2 = t_1b_1 + t_2b_2$. Perhatikan

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, a_1\|_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, tb_1\|_2 \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} |t| \|x_n - x, b_1\|_2 \\
&= |t| \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, b_1\|_2 \\
&= |t|.0 \\
&= 0 \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, b_2\|_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, t_1b_1 + t_2b_2\|_2 \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (|t_1| \|x_n - x, b_1\|_2 + |t_2| \|x_n - x, b_2\|_2) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} |t_1| \|x_n - x, b_1\|_2 + \lim_{n \rightarrow \infty} |t_2| \|x_n - x, b_2\|_2 \\
&= |t_1|.0 + |t_2|.0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Karena $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, b_i\|_2 = 0$ diperoleh $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, a_2\|_2 \leq 0$ untuk setiap $i = 1, 2$ sedangkan dari definisi norm diperoleh $\|x_n - x, a_2\|_2 \geq 0$, sehingga disimpulkan bahwa $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, a_i\|_2 = 0$ untuk $i = 1, 2$.

- (2) Barisan (x_n) konvergen ke x terhadap $\|\cdot\|_1^*$ jika dan hanya jika (x_n) konvergen ke x terhadap $\|\cdot\|_1^*$.

($\Rightarrow$) Misalkan barisan (x_n) konvergen ke x terhadap $\|\cdot\|_1^*$. Akan dibuktikan barisan (x_n) konvergen ke x terhadap $\|\cdot\|_2^*$.

Barisan (x_n) konvergen ke x terhadap $\|\cdot\|_1^*$ artinya $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_1^* = 0$.

Perhatikan,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_n - x\|_1^*)^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} ((\|x_n - x, a_1\|_2)^2 + (\|x_n - x, a_2\|_2)^2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_n - x, a_1\|_2)^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_n - x, a_2\|_2)^2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Diperoleh $\lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_n - x, a_i\|_1)^2 = 0$ sehingga $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, a_i\|_2 = 0$ untuk $i = 1, 2$. Dari kondisi (1) diperoleh $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, b_i\|_2 = 0$ untuk setiap $i = 1, 2$. Perhatikan,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_n - x\|_2^*)^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^2 (\|x_n - x, b_i\|_2)^2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Dapat disimpulkan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_2^* = 0$ atau dengan kata lain barisan (x_n) konvergen ke x terhadap $\|\cdot\|_2^*$.

($\Leftarrow$) Misalkan barisan (x_n) konvergen ke x terhadap $\|\cdot\|_2^*$. Akan dibuktikan barisan (x_n) konvergen ke x terhadap $\|\cdot\|_1^*$.

Barisan (x_n) konvergen ke x terhadap $\|\cdot\|_2^*$ artinya $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_2^* = 0$.

Perhatikan

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_n - x\|_2^*)^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} ((\|x_n - x, b_1\|_2)^2 + (\|x_n - x, b_2\|_2)^2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_n - x, b_1\|_2)^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_n - x, b_2\|_2)^2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Diperoleh $\lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_n - x, b_i\|_1)^2 = 0$ sehingga $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, b_i\|_2 = 0$ untuk setiap $i = 1, 2$. Dari kondisi (1) diperoleh $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, a_i\|_2 = 0$ untuk setiap $i = 1, 2$. Perhatikan,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_n - x\|_1^*)^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^2 (\|x_n - x, a_i\|_2)^2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Dapat disimpulkan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_1^* = 0$ atau dengan kata lain barisan (x_n) konvergen ke x terhadap $\|\cdot\|_1^*$.

- (3) Barisan Cauchy terhadap $\|\cdot\|_1^*$ jika dan hanya jika (x_n) barisan Cauchy terhadap $\|\cdot\|_2^*$.

($\Rightarrow$) Misalkan barisan (x_n) Cauchy terhadap $\|\cdot\|_1^*$. Akan dibuktikan barisan (x_n) Cauchy x terhadap $\|\cdot\|_2^*$.

Barisan (x_n) Cauchy x terhadap $\|\cdot\|_1^*$ artinya $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\|_1^* = 0$. Perhatikan,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_n - x_m\|_1^*)^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} ((\|x_n - x_m, a_1\|_2)^2 + (\|x_n - x_m, a_2\|_2)^2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_n - x_m, a_1\|_2)^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_n - x_m, a_2\|_2)^2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Diperoleh $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, a_i\|_2^2 = 0$ sehingga $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, a_i\|_2 = 0$ untuk $i = 1, 2$. Perhatikan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^2 (\|x_n - x_m, a_i\|_2) \leq \sum_{i=1}^2 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_n - x, a_i\|_2) + \lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_m - x, a_i\|_2) \right).$$

Dari kondisi (1) mengakibatkan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^2 \|x_n - x_m, b_i\|_2 \leq 0,$$

sedangkan dari definisi norm diketahui bahwa $\|x_n - x_m, b_i\|_2 \geq 0$ maka $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, b_i\|_2 = 0$ untuk $i = 1, 2$. Dapat disimpulkan bahwa, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\|_2^* = 0$ atau dengan kata lain barisan (x_n) Cauchy terhadap $\|\cdot\|_2^*$.

($\Leftarrow$) Misalkan barisan (x_n) Cauchy terhadap $\|\cdot\|_2^*$. Akan dibuktikan barisan (x_n) Cauchy x terhadap $\|\cdot\|_1^*$.

Barisan (x_n) Cauchy x terhadap $\|\cdot\|_2^*$ artinya $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\|_2^* = 0$. Perhatikan,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_n - x_m\|_2^*)^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} ((\|x_n - x_m, b_1\|_2)^2 + (\|x_n - x_m, b_2\|_2)^2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_n - x_m, b_1\|_2)^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_n - x_m, b_2\|_2)^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Diperoleh $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, b_i\|_2^2 = 0$ sehingga $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, b_i\|_2 = 0$ untuk $i = 1, 2$. Perhatikan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^2 (\|x_n - x_m, b_i\|_2) \leq \sum_{i=1}^2 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_n - x, b_i\|_2) + \lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_m - x, b_i\|_2) \right).$$

Dari kondisi (1) mengakibatkan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^2 \|x_n - x_m, a_i\|_2 \leq 0,$$

sedangkan dari definisi norm diketahui bahwa $\|x_n - x_m, a_i\|_2 \geq 0$ maka $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, a_i\|_2 = 0$ untuk setiap $i = 1, 2$. Dapat disimpulkan bahwa, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\|_1^* = \lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_n - x_m, a_1\|_2^2 + \|x_n - x_m, a_2\|_2^2) = 0$ atau dengan kata lain barisan (x_n) Cauchy terhadap $\|\cdot\|_1^*$. $\square$

Teorema 3.4. Suatu barisan (x_n) konvergen ke x pada ruang norm-2 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot, \cdot\|_2)$ jika dan hanya jika $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, a_1\| = 0$ dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, a_2\| = 0$ dimana $\{a_1, a_2\}$ bebas linier.

Bukti. Misalkan barisan (x_n) konvergen ke x pada $(\mathbb{R}^n, \|\cdot, \cdot\|_2)$ maka berdasarkan Lema 3.2 diperoleh $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, b_1\|_2 = 0$ dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, b_2\|_2 = 0$. Berdasarkan Lema 3.3 diperoleh $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, a_1\|_2 = 0$ dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, a_2\|_2 = 0$ dengan $\{a_1, a_2\}$ bebas linier, begitu juga sebaliknya. $\square$

3.3. Ruang Norm-2 Bersifat Lengkap $(\mathbb{R}^n, \|\cdot, \cdot\|_2)$

Sifat lengkap terkait dengan setiap barisan Cauchy di dalam ruang norm itu konvergen. Pada sub bab ini akan ditunjukkan bahwa ruang norm-2 bersifat lengkap dengan cara menunjukan ruang norm yang konvergen dengan norm-2 juga bersifat lengkap.

Teorema 3.5. Norm $\|\cdot\|_2^*$ ekivalen dengan norm $\|\cdot\|$ pada $\mathbb{R}^n$.

Bukti. Berdasarkan Definisi 2.2, akan dicari nilai a dan b sedemikian sehingga $a\|x\| \leq \|x\|_2^* \leq b\|x\|$ berlaku. Karena $\|x\| \leq \|x\|^2$ dan berdasarkan Proposisi 3.1, pilih $a=1$ sehingga $\|x\| \leq \|x\|^2 \leq \|x\|_2^*$.

Dengan menggunakan ketaksamaan Hadamard dan karena $\|b_i\| = 1$ untuk setiap $i = 1, 2$ perhatikan,

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= [\|x, b_1\|_2^2 + \|x, b_2\|_2^2]^{1/2} \\ &\leq [\|x\|^2 \|b_1\|^2 + \|x\|^2 \|b_2\|^2]^{1/2} \\ &= [\|x\|^2 + \|x\|^2]^{1/2} \\ &= [2\|x\|^2]^{1/2} \\ &= \sqrt{2}\|x\|. \end{aligned}$$

Pilih $b = \sqrt{2}$ sehingga $\|x\|^2 \leq \sqrt{2}\|x\|$. Karena terdapat a, b sedemikian sehingga $\|x\| \leq \|x\|_2^* \leq \sqrt{2}\|x\|$ berlaku. Norm $\|\cdot\|_2^*$ ekivalen dengan norm $\|\cdot\|$ pada $\mathbb{R}^n$. $\square$

Teorema 3.6. Barisan (x_n) konvergen ke x pada ruang norm-2 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot, \cdot\|_2)$ jika dan hanya jika barisan tersebut juga konvergen di $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, dan barisan (x_n) Cauchy pada norm-2 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot, \cdot\|_2)$ jika dan hanya jika barisan tersebut juga Cauchy pada $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$.

Bukti. $(\Rightarrow)$ Misalkan (x_n) konvergen ke x pada ruang norm-2 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot, \cdot\|_2)$. Dari Lema 3.2, diperoleh $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, b_1\|_2 = 0$ dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, b_2\|_2 = 0$ mengakibatkan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_2^* = 0$. Karena Norm $\|\cdot\|_2^*$ ekivalen dengan norm $\|\cdot\|$ pada $\mathbb{R}^n$ mengakibatkan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$. Dapat disimpulkan bahwa Barisan (x_n) juga konvergen ke x pada ruang norm $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$.

$(\Leftarrow)$ Misalkan (x_n) konvergen ke x pada ruang norm $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Ambil $y \in \mathbb{R}^n$ sebarang. Jika $y = \mathbf{0}$, untuk setiap $\epsilon > 0$ maka $\|x_n - x, y\| \leq \epsilon$. Jika $y \neq \mathbf{0}$ maka barisan (x_n) konvergen ke x pada ruang norm $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ artinya untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $n_0 \geq \frac{\epsilon}{\|y\|} \in \mathbb{N}$ sehingga $\|x_n - x\| < \frac{\epsilon}{\|y\|}$.

Perhatikan untuk setiap $n \geq n_0$ dan berdasarkan ketaksamaan Hadamard dipe-roleh $\|x_n - x, y\|_2 \leq \|x_n - x\| \|y\| = \epsilon$. Dengan kata lain Barisan (x_n) di $\mathbb{R}^n$ konvergen ke x pada ruang norm-2 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot, \cdot\|_2)$.

$(\Rightarrow)$ Misalkan (x_n) Cauchy pada ruang norm-2 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot, \cdot\|_2)$. Dari Lema 3.2 diperoleh $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, b_1\| = 0$ dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, b_2\| = 0$ mengakibatkan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\|_2^* = 0$. Karena Norm $\|\cdot\|_2^*$ ekivalen dengan norm $\|\cdot\|$ pada $\mathbb{R}^n$ mengakibatkan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| = 0$. Dapat disimpulkan bahwa Barisan (x_n) juga Cauchy pada ruang norm $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$.

($\Leftarrow$) Misalkan (x_n) Cauchy pada ruang norm $(\mathbb{R}^n, \|\cdot, \cdot\|_2)$. Ambil $y \in \mathbb{R}^n$ sebarang. Jika $y = \mathbf{0}$, untuk setiap $\epsilon > 0$ maka $\|x_n - x_m, y\| \leq \epsilon$. Jika $y \neq \mathbf{0}$ maka barisan (x_n) Cauchy pada ruang norm $(\mathbb{R}^n, \|\cdot, \cdot\|)$ artinya untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $N_0 \geq \frac{\epsilon}{\|y\|} \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $m, n \geq N_0$ berlaku $\|x_n - x_m\| < \frac{\epsilon}{\|y\|}$. Perhatikan untuk setiap $N \geq N_0$ dan berdasarkan ketaksamaan Hadamard diperoleh $\|x_n - x_m, y\|_2 \leq \|x_n - x_m\| \|y\| = \epsilon$ untuk setiap $m, n \geq N$. Dengan kata lain Barisan (x_n) di $\mathbb{R}^n$ Cauchy pada ruang norm-2 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot, \cdot\|)$. $\square$

3.4. Teorema Titik Tetap pada Ruang Norm-2 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot, \cdot\|_2)$

Teorema 3.7. Ruang norm-2 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot, \cdot\|_2)$ adalah lengkap.

Bukti. Misalkan (x_n) barisan Cauchy di ruang norm-2 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot, \cdot\|_2)$. Berdasarkan Teorema 3.6 diperoleh barisan (x_n) juga Cauchy di $(\mathbb{R}^n, \|\cdot, \cdot\|_2)$. Diketahui bahwa (x_n) konvergen ke x terhadap norm $\|\cdot, \cdot\|_2$. Dari Teorema 3.6 diperoleh (x_n) konvergen ke x pada ruang norm-2 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot, \cdot\|_2)$. Hal ini membuktikan Ruang norm $(\mathbb{R}^n, \|\cdot, \cdot\|_2)$ adalah lengkap. $\square$

Teorema 3.8. Misalkan $(\mathbb{R}^n, \|\cdot, \cdot\|_2)$ adalah ruang Banach dan $\{a_1, a_2\}$ adalah himpunan yang bebas linier serta memenuhi $\|Tx - Ty, a_i\| \leq k\|x - y, a_i\|$ untuk setiap $x, y, a_i \in \mathbb{R}^n$ dimana $i = 1, 2$ dan $0 < k < 1$, maka T mempunyai titik tetap yang tunggal.

Bukti. $\|x\|_1^* := [\|x, a_1\|_2^2 + \|x, a_2\|_2^2]^{\frac{1}{2}}$ merupakan norm pada $\mathbb{R}^n$. Norm $\|\cdot, \cdot\|_2$ ekuivalen dengan norm $\|\cdot, \cdot\|_2^*$ sehingga $(\mathbb{R}^n, \|\cdot, \cdot\|_2^*)$ lengkap. Lebih jauh menurut Lema 3.3 diperoleh $(\mathbb{R}^n, \|\cdot, \cdot\|_1^*)$ adalah lengkap.

Perhatikan untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^n$ berlaku,

$$\begin{aligned} (\|Tx - Ty\|_1^*)^2 &= \|Tx - Ty, a_1\|_2^2 + \|Tx - Ty, a_2\|_2^2 \\ &\leq k^2\|x - y, a_1\|_2^2 + k^2\|x - y, a_2\|_2^2 \\ &= k^2(\|x - y\|_1^*)^2 \\ (\Leftrightarrow) \|Tx - Ty\|_1^* &\leq k\|x - y\|_1^* \end{aligned}$$

untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^n$. T kontraktif terhadap $\|\cdot, \cdot\|_1^*$, Karena $(\mathbb{R}^n, \|\cdot, \cdot\|_1^*)$ adalah lengkap sehingga T memiliki titik tetap yang tunggal. $\square$

Daftar Pustaka

- [1] Acikgoz, M. 2009. ϵ Approximation in Generalized 2-Normed Spaces. *Math Vesnik* **61**: 159 – 163
- [2] Anton, H. 1991. *Aljabar Linier Elementer*. Edisi kedelapan Jilid 1. Erlangga, Jakarta.
- [3] Bartle, R. G. and Sherbert D. R. . 2000. *Introduction to Real, Third Edition*. John Wiley and Sons, Inc. New York.
- [4] Brown A. dan A. Page. 1970. *Elements of Functional Analysis*. Van Nostrand Reinhold Company, London.

- [5] Diminni, C., S. Gähler and A. White. 1973. 2-Inner Product Space. *Demonstratio Math* 6 : 525 – 536.
- [6] Gähler, S. 1964. Liniare 2-Normierte Raume. *Math Nachr* 28 : 1 – 43.
- [7] Gunawan, H. 2000. The Space of Summable Sequences and its Natural-Norm. *Jurnal Analisis* 27 : 1 – 13.
- [8] Gunawan, H dan Mashadi. 2001. On n-Normed Spaces. *Int. J. Sci.* 27 : 631 – 639.
- [9] Idris, M. S. Ekariani dan, H Gunawan. 2013. The Space of Summable Sequences. *Jurnal Analisis* 65 : 58 – 63.
- [10] Kreysziq, E. 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley and Sons, inc. New York.
- [11] Nur, Muh. 2002. Teorema Titik Tetap di Norm-2 Standar. *Jurnal Analisis Universitas Hasanuddin* : 1 – 6
- [12] R. P. Agarwal, D. O. Reigan dan D. R. Sahu. 2009. *Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications*. Springer, New York.
- [13] Rafflesia, U. 2007. Kekonvergenan Suatu Barisan di Ruang Norm-2.8 *Jurnal Gradien*. Vol 4 : 333 – 336
- [14] White, A. 1969. 2-Banach Space, *Math Nachr* 42 : 43 – 60.