Jurnal Matematika UNAND
Vol. **10** No. **1** Hal. 137 – 141
Edisi Januari 2021
ISSN : 2303–291X
e-ISSN : 2721–9410

HUBUNGAN RUANG NULL DAN RUANG PETA PADA MATRIKS IDEMPOTEN

RATIH ANJELI PUTRI, YANITA*, MONIKA RIANTI HELMI
Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : ratihanjelina131214@gmail.com, yanita@sci.unand.ac.id,
monikariantihelmi@sci.unand.ac.id

Diterima 15 Desember 2020 Direvisi 29 Desember 2020 Dipublikasikan 12 Januari 2021

Abstrak. Ruang null dari matriks A yang berukuran $m \times n$ adalah himpunan semua solusi untuk persamaan $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ dan ruang peta dari matriks A yang berukuran $m \times n$ adalah himpunan semua solusi untuk persamaan $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Misalkan matriks A berukuran $n \times n$ dikatakan matriks idempoten jika $A^2 = A$. Matriks A dan B adalah Dua matriks idempoten dikatakan komutatif nol jika $AB = BA = \mathbb{O}$. Tulisan ini mengkaji hubungan ruang null dan ruang peta pada matriks idempoten.

Kata Kunci: Ruang Null, Ruang Peta, Matriks Idempoten.

1. Pendahuluan

Konsep matriks menjadi salah satu pembahasan penting dalam bidang aljabar linier. Kajian terhadap matriks menjadi lebih luas dan diperumun. Matriks memudahkan untuk membuat analisa-analisa yang mencakup hubungan variabel-variabel dari suatu persoalan. Ruang null dari matriks A yang berukuran $m \times n$ adalah himpunan semua solusi untuk persamaan $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ dapat dinyatakan dengan $N(A) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\right\}$ dan ruang peta dari matriks A yang berukuran $m\times n$ adalah himpunan semua solusi untuk persamaan $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ dapat dinyatakan dengan $R(A) = \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{m\times 1} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{y}\right\}$.

Pada teori matriks terdapat berbagai jenis matriks, salah satunya matriks idempoten. Matriks idempoten A adalah matriks bujursangkar yang apabila dikalikan dengan dirinya sendiri merupakan matriks itu sendiri atau $A^2 = A$. Tulisan ini mengkaji hubungan ruang null dan ruang peta pada matriks idempoten.

*penulis korespondensi

2. Landasan Teori

2.1. *Matriks Idempoten*

Definisi 2.1. [3] *Misalkan matriks A berukuran $n \times n$ dikatakan matriks idempoten jika $A^2 = A$ atau $A^n = A$ untuk suatu $n \geqslant 2$.*

Lema 2.2. [3] *Misalkan $(I_n - A)$ adalah matriks idempoten jika dan hanya jika matriks A adalah matriks idempoten.*

Definisi 2.3. [5] *Matriks A dan matriks B adalah dua matriks idempoten yang komutatif jika $AB = BA$ dan dikatakan komutatif nol jika $AB = BA = \mathbb{O}$.*

2.2. *Ruang Null dan Ruang Peta Suatu Matriks*

Teorema 2.4. [1] *Misalkan W adalah himpunan bagian tak kosong dari ruang vektor V. Himpunan W adalah subruang dari V jika dan hanya jika syarat-syarat berikut terpenuhi.*

(a) Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{z}$ adalah vektor-vektor pada W maka $\mathbf{u} + \mathbf{z}$ berada pada W.
(b) Jika k adalah skalar sebarang dan $\mathbf{u}$ adalah vektor sebarang pada W maka $k\mathbf{u}$ berada pada W.

Definisi 2.5. [4] *Misalkan U dan W adalah subruang dari ruang vektor V. Ruang vektor $V = U \oplus W$ jika*

(a) $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$,
(b) $V = U + W$.

Dalam hal ini V dikatakan sebagai jumlah langsung dari U dan W.

Definisi 2.6. [2] *Misalkan A adalah matriks berukuran $m \times n$, $\mathbf{x}$ adalah matriks berukuran $n \times 1$, dan $\mathbf{0}$ adalah matriks berukuran $m \times 1$ maka ruang null dari matriks A adalah himpunan semua solusi untuk persamaan $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ dapat dinyatakan dengan $N(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$.*

Definisi 2.7. [2] *Misalkan A adalah matriks berukuran $m \times n$, $\mathbf{x}$ adalah matriks berukuran $n \times 1$, dan $\mathbf{y}$ adalah matriks berukuran $m \times 1$ maka ruang peta dari matriks A adalah himpunan semua solusi untuk persamaan $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ dapat dinyatakan dengan $R(A) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{m\times 1} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{y}\}$.*

3. Pembahasan

3.1. *Hubungan Ruang Null dan Ruang Peta pada Matriks Idempoten*

Lema 3.1. [2] *Misalkan A adalah matriks idempoten maka ruang peta dari matriks idempoten A adalah $R(A) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n\times 1} \mid A\mathbf{y} = \mathbf{y}\}$ jika dan hanya jika $\mathbf{y} \in R(A)$.*

Lema 3.2. [3] *Misalkan $N(A) = R(I - A)$ jika dan hanya jika matriks A adalah matriks idempoten.*

Proposisi 3.3. [5] *Misalkan A dan B adalah matriks idempoten $A = AB$ dan $B = BA$ jika dan hanya jika $N(A) = N(B)$.*

Bukti. Untuk sebarang $\mathbf{x} \in N(A)$ maka $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, jadi $BA\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Oleh karena $BA = B$ maka $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ akibatnya $\mathbf{x} \in N(B)$. Oleh karena itu $N(A) \subseteq N(B)$. Demikian juga $N(B) \subseteq N(A)$. Sehingga diperoleh $N(A) = N(B)$. Untuk sebarang $\mathbf{y} \in N(A)$ maka

$$N(A) = \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n\times 1} \mid A\mathbf{y} = \mathbf{0}\right\} \tag{3.1}$$

$$= \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n\times 1} \mid (I - A)\mathbf{y} = \mathbf{y}\right\}. \tag{3.2}$$

Dari persamaan (3.1) dan (3.2) diperoleh $A(I - A)\mathbf{y} = \mathbf{0}$ akibatnya $(I - A)\mathbf{y} \in N(A)$. Oleh karena $N(A) = N(B)$ maka $(I - A)\mathbf{y} \in N(B)$ sehingga diperoleh $B(I - A)\mathbf{y} = \mathbf{0}$ akibatnya $B(I - A) = \mathbb{O}$ atau $B = BA$. Demikian juga $AB = A$. □

Proposisi 3.4. [5] *Jika A dan B adalah matriks idempoten yang komutatif dan $R(A) \cap R(B) = \{\mathbf{0}\}$ maka $N(A - B) = N(A) \cap N(B)$.*

Bukti. Misalkan untuk sebarang $\mathbf{x} \in N(A - B)$ maka $(A - B)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ jika dan hanya jika $A\mathbf{x} = B\mathbf{x}$. Perhatikan bahwa $A\mathbf{x} = A^2\mathbf{x} = AB\mathbf{x} = BA\mathbf{x}$ maka diperoleh $(I - B)A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Akibatnya $A\mathbf{x} \in N(I - B) = R(B)$. Oleh karena $A\mathbf{x}, B\mathbf{x} \in R(B)$. Demikian juga dari $B\mathbf{x} = AB\mathbf{x}$ diperoleh $A\mathbf{x}, B\mathbf{x} \in R(A)$. Jadi $A\mathbf{x}, B\mathbf{x} \in R(A) \cap R(B) = \{\mathbf{0}\}$ maka $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ dan $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ akibatnya $\mathbf{x} \in N(A)$ dan $\mathbf{x} \in N(B)$. Jadi $\mathbf{x} \in N(A) \cap N(B)$ sehingga $N(A - B) \subseteq N(A) \cap N(B)$

Selanjutnya untuk sebarang $\mathbf{y} \in N(A) \cap N(B)$ maka $A\mathbf{y} = \mathbf{0}$ dan $B\mathbf{y} = \mathbf{0}$ sehingga diperoleh $A\mathbf{y} = B\mathbf{y}$ dengan kata lain $(A - B)\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Jadi $\mathbf{y} \in N(A - B)$ akibatnya $N(A) \cap N(B) \subseteq N(A - B)$ sehingga diperoleh $N(A - B) = N(A) \cap N(B)$. □

Proposisi 3.5. [5] *Jika A dan B adalah matriks idempoten yang komutatif dan $\mathbf{y} \in R(B)$ maka $R(B(I - A)) = N(A)$.*

Bukti. Untuk sebarang $\mathbf{x} \in R(B(I - A))$ maka $B(I - A)\mathbf{x} = \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Oleh karena itu $\mathbf{x} \in N(A)$ akibatnya $R(B(I - A)) \subseteq N(A)$. Selanjutnya untuk sebarang $\mathbf{y} \in N(A)$ maka $A\mathbf{y} = \mathbf{0}$ dan $BA\mathbf{y} = \mathbf{0}$ maka $BA\mathbf{y} - B\mathbf{y} = -B\mathbf{y}$. Oleh karena $\mathbf{y} = B\mathbf{y}$ akibatnya $B(I - A)\mathbf{y} = \mathbf{y}$. Jadi $\mathbf{y} \in R(B(I - A))$ akibatnya $N(A) \subseteq R(B(I - A))$ sehingga $R(B(I - A)) = N(A)$. □

Proposisi 3.6. [5] *Jika A dan B adalah matriks idempoten yang komutatif nol maka $R(A + B) = R(A) + R(B)$.*

Bukti. Misalkan untuk sebarang $\mathbf{x} = \mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} \in R(A) + R(B)$. Dimana $\mathbf{x_1} \in R(A)$ dan $\mathbf{x_2} \in R(B)$ maka $\mathbf{x_1} = A\mathbf{x_1}$ dan $\mathbf{x_2} = B\mathbf{x_2}$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}(A + B)(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}) &= A\mathbf{x_1} + A\mathbf{x_2} + B\mathbf{x_1} + B\mathbf{x_2} \\ &= \mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} + B(\mathbf{x_1} - \mathbf{x_1}) + A(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_2}) \\ &= \mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} = \mathbf{x}.\end{aligned}$$

Oleh karena $\mathbf{x} = \mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} \in R(A+B)$ akibatnya $R(A) + R(B) \subseteq R(A+B)$.

Selanjutnya untuk sebarang $\mathbf{y} \in R(A+B)$ maka $\mathbf{y} = (A+B)\mathbf{y} = A\mathbf{y} + B\mathbf{y}$. Misalkan $\mathbf{y_1} = A\mathbf{y}$ dan kedua ruas sama-sama dikalikan dengan A maka $A\mathbf{y_1} = AA\mathbf{y} = \mathbf{y_1}$. Akibatnya $\mathbf{y_1} \in R(A)$. Misalkan $\mathbf{y_2} = B\mathbf{y}$ dan kedua ruas sama-sama dikalikan dengan B maka $B\mathbf{y_2} = BB\mathbf{y} = \mathbf{y_2}$. Akibatnya $\mathbf{y_2} \in R(B)$. Oleh karena $\mathbf{y} = \mathbf{y_1} + \mathbf{y_2} \in R(A) + R(B)$ sehingga diperoleh $R(A+B) \subseteq R(A) + R(B)$. Jadi $R(A+B) = R(A) + R(B)$. □

Akibat 3.7. [3] *Jika A adalah matriks idempoten yang komutatif nol maka $\mathbb{R}^n = R(A) + N(A)$.*

Bukti. Berdasarkan persamaan (3.1) dan (3.2) diperoleh $A(I-A) = (I-A)A = \mathbb{O}$. Akibatnya A dan $(I-A)$ merupakan matriks idempoten yang komutatif nol. Selanjutnya berdasarkan Proposisi 3.6 diperoleh $R(A+I-A) = R(A) + R(I-A)$ akibatnya $R(I) = R(A) + N(A)$. Oleh karena itu $\mathbb{R}^n = R(A) + N(A)$. □

Proposisi 3.8. [5] *Jika A adalah matriks idempoten maka $\mathbb{R}^n = R(A) \oplus N(A)$.*

Bukti. Untuk sebarang $\mathbf{x} \in R(A) \cap N(A)$ maka $\mathbf{x} \in R(A)$ dan $\mathbf{x} \in N(A)$. Oleh karena itu $\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ dan $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Jadi $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Akibatnya $R(A) \cap N(A) = \{\mathbf{0}\}$. Selanjutnya dari Akibat 3.7 diperoleh $\mathbb{R}^n = R(A) + N(A)$. Oleh karena itu $\mathbb{R}^n = R(A) \oplus N(A)$. □

Teorema 3.9. [5] *Jika A dan B adalah matriks idempoten yang komutatif nol dan $(A-B)$ adalah matriks non singular maka $\mathbb{R}^n = R(A) \oplus R(B)$.*

Bukti. Misalkan untuk sebarang $\mathbf{x} \in R(A) \cap R(B)$ maka $\mathbf{x} \in R(A)$ dan $\mathbf{x} \in R(B)$. Oleh karena A dan B adalah matriks idempoten, maka $\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ dan $\mathbf{x} = B\mathbf{x}$, sehingga diperoleh $A\mathbf{x} = B\mathbf{x}$ dengan kata lain $(A-B)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Akibatnya $\mathbf{x} \in N(A-B)$. Oleh karena $(A-B)$ adalah non singular, maka $N(A-B) = \{\mathbf{0}\}$ sehingga diperoleh $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Akibatnya $R(A) \cap R(B) = \{\mathbf{0}\}$. Perhatikan bahwa $(A-B)(I-A-B)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ maka $(I-A-B)\mathbf{x} \in N(A-B) = \{\mathbf{0}\}$ sehingga diperoleh $(I-A-B)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Akibatnya berdasarkan Proposisi 3.6 $\mathbf{x} = A\mathbf{x} + B\mathbf{x} \in R(A) + R(B)$ diperoleh $\mathbb{R}^n = R(A) + R(B)$. Oleh karena itu $\mathbb{R}^n = R(A) \oplus R(B)$. □

Proposisi 3.10. [5] *Jika A dan B adalah matriks idempoten yang komutatif nol maka pernyataan berikut ekuivalen :*

(1) $(A-B)$ *adalah non singular,*
(2) $N(A) \cap N(B) = \{\mathbf{0}\}$.

Bukti. Misalkan untuk sebarang $\mathbf{x} \in N(A) \cap N(B)$, maka $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ dan $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ dengan kata lain $(A-B)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sehingga $\mathbf{x} \in N(A-B)$. Oleh karena $(A-B)$ non singular maka $N(A-B) = \{\mathbf{0}\}$ akibatnya $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Sehingga terbukti $N(A) \cap N(B) = \{\mathbf{0}\}$. Selanjutnya berdasarkan Proposisi 3.4 diperoleh $N(A) \cap N(B) = N(A-B)$. Oleh karena $N(A) \cap N(B) = \{\mathbf{0}\}$ maka $N(A-B) = \{\mathbf{0}\}$ sehingga $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Akibatnya $(A-B)$ adalah non singular. □

4. Kesimpulan

Misalkan A dan B adalah matriks idempoten maka diperoleh hubungan ruang null dan ruang peta pada matriks idempoten tersebut sebagai berikut:

(1) $A = AB$ dan $B = BA$ jika dan hanya jika $N(A) = N(B)$.
(2) Jika A dan B matriks idempoten yang komutatif dan $R(A) \cap R(B) = \{\mathbf{0}\}$ maka $N(A - B) = N(A) \cap N(B)$.
(3) Jika A dan B matriks idempoten yang komutatif dan $\mathbf{y} \in R(B)$ maka berlaku $R(B(I - A)) = N(A)$.
(4) Jika A dan B merupakan matriks idempoten yang komutatif nol maka $R(A + B) = R(A) + R(B)$.
(5) $\mathbb{R}^n = R(A) + N(A)$.
(6) Jika A matriks idempoten yang komutatif nol maka berlaku $\mathbb{R}^n = R(A) \oplus N(A)$.
(7) Jika A dan B matriks idempoten yang komutatif nol dan $A - B$ adalah matriks non singular maka $\mathbb{R}^n = R(A) \oplus R(B)$.
(8) Jika A dan B merupakan matriks idempoten yang komutatif nol maka pernyataan berikut ekuivalen :
    (a) $(A - B)$ adalah non singular,
    (b) $N(A) \cap N(B) = \{\mathbf{0}\}$.

5. Ucapan Terima kasih

Terimakasih kepada Bapak Admi Nazra, Bapak Syafrizal Sy, dan Bapak Ahmad Iqbal Baqi yang telah memberikan masukan dan saran sehingga penelitian ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Anton, H dan C. Rorres. 2004. *Aljabar Linier Elementer*. Edisi Kedelapan. Erlangga, Jakarta.
[2] Ben-Israel, T.N.E.Greville. 2003. *Generalized Inverse Theory and Aplication*. Edisi 2. Springer-Verlag, New York.
[3] Harville, D.A. 2008. *Matrix Algebra from a Statistician's Perspective*. Springer, New York.
[4] Meyer, C.D. 2000. *Matrix Analysis and Applied Linier Algebra*. SIAM.
[5] Mohammed, A.S. 2008. Some Basic Properties of Idempotent Matrices. *J.Education and Science*. **21**:124-130.
[6] Schott, James. 1996. *Matrix Analysis for Statistics*. A Wiley-Interscience Publication, New York.