Jurnal Matematika UNAND
Vol. **10** No. **1** Hal. 142 – 149
Edisi Januari 2021
ISSN : 2303–291X
e-ISSN : 2721–9410

KEIDEMPOTENAN DARI KOMBINASI LINIER PADA MATRIKS IDEMPOTEN DAN MATRIKS T-POTEN YANG KOMUTATIF

LATHIFA SUCI NOVIANA, YANITA,* MONIKA RIANTI HELMI

Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : lathifasuci2311@gmail.com, yanita@sci.unand.ac.id, monikariantihelmi@sci.unand.ac.id

Diterima 15 Desember 2020 Direvisi 29 Desember 2020 Dipublikasikan 12 Januari 2021

Abstrak. Misal A adalah matriks idempoten ($A^2{=}A$) dan B adalah matriks t-poten ($B^t = B$) untuk semua bilangan bulat positif $t > 1$ dan $AB = BA$. Penelitian ini akan memperlihatkan semua pasangan c_1, c_2 bilangan kompleks taknol sehingga kombinasi linier $c_1S^{-1}AS + c_2S^{-1}BS$ adalah idempoten.

Kata Kunci: Matriks Idempoten, Matriks T-Poten, Diagonalisasi.

1. Pendahuluan

Himpunan matriks yang memiliki entri-entri bilangan kompleks, yang terdiri dari n baris dan n kolom dapat disimbolkan dengan $\mathbb{C}_{n\times n}$. Suatu matriks A dikatakan idempoten apabila A dikalikan dengan dirinya sendiri merupakan matriks itu sendiri ($A^2{=}A$), dikatakan tripoten apabila $A^3{=}A$, dan dikatakan t-poten jika $A^t = A$.

Jika A dan B komutatif ($AB = BA$), dimana A adalah matriks idempoten dan B adalah matriks t-poten, maka A dan B keduanya dapat didiagonalisasi secara simultan, terdapat matriks nonsingular S sedemikian sehingga $c_1S^{-1}AS + c_2S^{-1}BS$ adalah matriks idempoten. Pada tulisan ini akan dikaji kembali [4] terkait keidempotenan dari kombinasi linier pada matriks idempoten dan matriks t-poten yang komutatif.

2. Landasan Teori

2.1. *Diagonalisasi Matriks*

Definisi 2.1. [3] *Suatu matriks A, B dan S berukuran $n \times n$ dikatakan similar jika terdapat suatu matriks invertibel S sedemikian sehingga*

*penulis korespondensi

$$B = S^{-1}AS.$$

Teorema 2.2. [3] *Misalkan matriks A dan B berukuran $n \times n$, dan misalkan matriks A similar ke matriks B, maka A dan B memiliki nilai eigen yang sama. Jika B adalah matriks diagonal, maka entri diagonal utamanya adalah nilai eigen dari A.*

Definisi 2.3. [1] *Suatu matriks A berukuran $n \times n$ dikatakan dapat didiagonalkan jika terdapat suatu matriks invertibel S sedemikian sehingga $S^{-1}AS$ adalah matriks diagonal. Matriks S dikatakan mendiagonalkan A.*

Definisi 2.4. [4] *Dua buah matriks kompleks A dan B dikatakan dapat di-diagonalkan secara simultan jika terdapat suatu matriks nonsingular S sedemikian sehingga $S^{-1}AS$ dan $S^{-1}BS$ keduanya diagonal.*

Teorema 2.5. [4] *Misalkan matriks A dan matriks B yang berukuran $n \times n$ dapat didiagonalisasi, maka A dan B komutatif jika dan hanya jika keduanya dapat didiagonalisasi secara simultan.*

2.2. *Matriks Idempoten*

Definisi 2.6. [4] Suatu *matriks A berukuran $n \times n$ dikatakan matriks idempoten jika*

$$A^2 = A.$$

Teorema 2.7. [3] *Misalkan matriks A berukuran $n \times n$, maka A adalah idempoten jika dan hanya jika nilai eigennya adalah 0 atau 1.*

Definisi 2.8. [4] *Suatu matriks B berukuran $n \times n$ dikatakan matriks t-poten jika dan hanya jika untuk semua bilangan bulat positif t memenuhi $B^t = B$.*

Teorema 2.9. [5] *Misalkan B adalah matriks kompleks berukuran $n \times n$, maka $B^{k+1} = B$ untuk $k = 2, 3, ...$ jika dan hanya jika B dapat didiagonalisasi dan nilai eigen dari B adalah $\lambda = 0$ atau $\lambda = \sqrt[k]{1}$.*

3. Pembahasan

3.1. *Keidempotenan dari Kombinasi Linier pada Matriks Idempoten dan Matriks T-Poten yang Komutatif*

Teorema 3.1. [4] *Misalkan A dan B adalah matriks kompleks taknol dengan entri-entri di himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C}$, sedemikian sehingga $A^2 = A, B^{k+1} = B$ untuk $k = 2, 3. \cdots$ dan $AB = BA$. Asumsikan bahwa:*

1) *A dan B similar secara simultan dengan matriks $A_1 \oplus O$ dan $B_1 \oplus B_2$, atau dengan matriks $A_1 \oplus A_2$ dan $B_1 \oplus B_2$ dimana A_1, A_2, B_1 dan B_2 adalah sub matriks dari matriks A dan B,*
2) *B memiliki setidaknya dua nilai eigen taknol yang berbeda, dan*
3) *$c_1, c_2 \in \mathbb{C}, c_1 \neq c_2 \neq 0$,*

maka terdapat matriks nonsingular S *sedemikian sehingga* $c_1S^{-1}AS+c_2S^{-1}BS \equiv C$ *adalah matriks idempoten yang dalam hal ini matriks* C *berbentuk salah satu dari yang berikut :*

1) $\frac{v}{v-u}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + \frac{1}{u-v}\begin{bmatrix} vI & 0 \\ 0 & uI \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$,

2) $-uv^{-1}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + v^{-1}\begin{bmatrix} uI & 0 \\ 0 & vI \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$,

3) $(1-uv^{-1})\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + v^{-1}\begin{bmatrix} uI & 0 \\ 0 & vI \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$,

4) $\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + v^{-1}\begin{bmatrix} -vI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & vI \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$ *jika* $k=2$,

5) $\varepsilon\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon^{-1}u^{-1}\begin{bmatrix} \varepsilon^{-1}uI & 0 & 0 \\ 0 & uI & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon uI \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$ *jika* $k=6$,

dimana u, v *adalah akar-akar dari* $\sqrt[k]{1}$ *untuk suatu* $k = 2, 3, \cdots$, $u \neq v$, *dan* $\varepsilon = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Bukti. Misalkan A adalah matriks idempoten, yaitu $A^2 = A$, maka nilai eigen dari matriks idempoten adalah $\lambda = 0$ atau $\lambda = 1$. Misalkan B adalah matriks t-poten, yaitu $B^{k+1} = B$ untuk suatu $k = 2, 3, \cdots$,, maka B dapat didiagonalisasi dan nilai eigen dari matriks B adalah $\lambda = 0$ atau $\lambda = \sqrt[k]{1}$.

Misalkan A dan B komutatif, maka A dan B dapat didiagonalisasi secara simultan. Oleh karena A dan B dapat didiagonalisasi secara simultan, maka terdapat matriks nonsingular S sedemikian sehingga $S^{-1}AS$ dan $S^{-1}BS$ keduanya diagonal. Asumsikan bahwa matriks A dan B similar secara simultan dengan matriks $A_1 \oplus O$ dan $B_1 \oplus B_2$ secara berturut-turut. Misalkan

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} = I_r \oplus O,$$

maka A similar ke matriks $I_r \oplus O$, dan misalkan

$$S^{-1}BS = \begin{bmatrix} \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{bmatrix} = B_1 \oplus B_2,$$

maka B similar ke matriks $B_1 \oplus B_2$. Selanjutnya B_1 dan B_2 keduanya dapat didiagonaliasi karena $B^{k+1} = B$. Perhatikan bahwa $S^{-1}BS = diag(\beta_1, \cdots, \beta_n)$ untuk setiap ${\beta_i}^{k+1} = \beta_i$ yaitu β_i adalah akar-akar dari $\sqrt[k]{1}$ atau $\beta_i = 0$. Misalkan $B_1 = diag(\beta_1, \cdots, \beta_r)$ dan $B_2 = diag(\beta_{r+1}, \cdots, \beta_n)$, terdapat $\beta_j \neq 0$ untuk setiap $\beta_j = \beta_{r+1}, \cdots, \beta_n$.

Misalkan $c_1S^{-1}AS + c_2S^{-1}BS = S^{-1}CS$. Oleh karena $S^{-1}AS$ dan $S^{-1}BS$ keduanya diagonal, maka $S^{-1}CS$ juga diagonal. Misalkan

$$S^{-1}CS = \begin{bmatrix} \gamma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \gamma_n \end{bmatrix}$$

adalah matriks idempoten, maka nilai eigen dari $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ adalah 0 atau 1. Selanjutnya dapat ditulis kombinasi linier dari $c_1S^{-1}AS + c_2S^{-1}BS = S^{-1}CS$ sebagai berikut.

$$\iff c_1(I_r \oplus O) + c_2(B_1 \oplus B_2) = S^{-1}CS, \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}\iff & c_1 diag(1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0) + c_2 diag(\beta_1, \cdots, \beta_r, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_n) \\ & = diag(\gamma_1, \cdots, \gamma_r, \gamma_{r+1}, \cdots, \gamma_n),\end{aligned} \tag{3.2}$$

dimana $\beta_i \in \{0\}$ atau β_i adalah akar-akar dari $\sqrt[k]{1}, \gamma_i \in \{0, 1\}$.
Oleh karena c_2 taknol dan $\beta_{r+1}, \cdots, \beta_n$ taknol, maka $\gamma_{r+1} = \cdots = \gamma_n = 1$.
Perhatikan bahwa persamaan (3.2) dapat diuraikan sebagai berikut

$$c_1 diag(1, \cdots, 1) + c_2 diag(\beta_1, \cdots, \beta_r) \in \{0, 1\}, \tag{3.3}$$

$$c_2 diag(\beta_{r+1}, \cdots, \beta_n) = 1. \tag{3.4}$$

Misalkan persamaan (3.2) adalah suatu sistem persamaan linier terhadap variabel c_1 dan c_2, maka untuk menyelesaikan sistem persamaan linier ini cukup dengan menggunakan dua buah persamaan yang saling bebas linier dimana $S^{-1}AS \neq 0$ dan asumsikan $S^{-1}BS$ memiliki setidaknya dua nilai eigen tak nol yang berbeda. Selanjutnya kemungkinan-kemungkinan yang muncul dari sistem persamaan linier akan dijelaskan dengan enam kasus berikut.

Kasus 1.

Misalkan diambil dua bentuk persamaan linier dari persamaan (3.2) sebagai berikut
$c_1 + c_2u = 1,\ c_1 + c_2v = 0.$
Dengan melakukan metode eliminasi didapatkan nilai
$c_1 = \dfrac{v}{v-u}$ dan $c_2 = \dfrac{1}{u-v}$.
Kemudian nilai c_1 dan c_2 disubtitusi ke persamaan (3.3) dan (3.4), sehingga

(1) $c_1 diag(1, \cdots, 1) + c_2 diag(\beta_1, \cdots, \beta_r) \in \{0, 1\}$
$\dfrac{v}{v-u} + \dfrac{1}{u-v}\beta_i \in \{0, 1\}$, untuk $i = 1, \cdots, r$, maka $\beta_i = v$ atau $\beta_i = u$,

(2) $c_2 diag(\beta_{r+1}, \cdots, \beta_n) = 1$
$\dfrac{1}{u-v}\beta_j = 1$ untuk $j = r+1, \cdots, n$, maka $\beta_j = u - v$.

Selanjutnya akan disusun nilai eigen dari matriks $S^{-1}AS$ dan $S^{-1}BS$ dengan dua kondisi yaitu untuk $r = n$ dan $r < n$.

1. Jika $r = n$, asumsikan bahwa A dan B similar secara simultan dengan matriks $A_1 \oplus A_2$ dan $B_1 \oplus B_2$ secara berturut-turut. Selanjutnya dipilih nilai eigen dari $S^{-1}BS$ yaitu $\beta_i = v$ atau $\beta_i = u$ dimana u, v adalah akar-akar dari $\sqrt[k]{1}$ untuk suatu $k = 2, 3, \cdots$. Terlihat bahwa $S^{-1}BS$ memiliki

dua nilai eigen taknol yang berbeda, maka nilai eigen dari matriks $S^{-1}AS$ dan $S^{-1}BS$ disusun sebagai berikut

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, S^{-1}BS = \begin{bmatrix} vI & 0 \\ 0 & uI \end{bmatrix}.$$

Sehingga kombinasi linier dari $c_1S^{-1}AS + c_2S^{-1}BS$ adalah

$$\frac{v}{v-u}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + \frac{1}{u-v}\begin{bmatrix} vI & 0 \\ 0 & uI \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

yang memenuhi kombinasi linier pertama pada teorema.

2. Jika $r < n$ dan $k = 6$, dimana $\varepsilon = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ dan $u \neq v$. Asumsikan bahwa A dan B similar secara simultan dengan matriks $A_1 \oplus O$ dan $B_1 \oplus B_2$ secara berturut-turut. Selanjutnya $\beta_j = u - v$ dibuat menjadi $u = \beta_j + v$, sehingga $\beta_j = \varepsilon u$ dan $v = \varepsilon^{-1}u$ dimana u, β_j, v adalah akar-akar dari $\sqrt[6]{1}$, maka nilai eigen dari matriks $S^{-1}AS$ dan $S^{-1}BS$ disusun sebagai berikut

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, S^{-1}BS = \begin{bmatrix} \varepsilon^{-1}uI & 0 & 0 \\ 0 & uI & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon uI \end{bmatrix}$$

dan $c_1 = \frac{v}{v-u} = \varepsilon$, $c_2 = \frac{1}{u-v} = \varepsilon^{-1}u^{-1}$.

Sehingga kombinasi linier dari $c_1S^{-1}AS + c_2S^{-1}BS = S^{-1}CS$ adalah

$$\varepsilon\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon^{-1}u^{-1}\begin{bmatrix} \varepsilon^{-1}uI & 0 & 0 \\ 0 & uI & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon uI \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

yang memenuhi kombinasi linier ke-5 pada teorema.

Kasus 2.

Misalkan diambil dua bentuk persamaan linier dari persamaan (3.2) sebagai berikut

$c_1 + c_2u = 1$, $c_1 + c_2v = 1$ dimana $(u \neq v)$.

Dengan melakukan metode eliminasi, di dapatkan nilai $c_2 = 0$. Kasus ini tidak memenuhi asumsi 3 dimana $c_1 \neq 0 \neq c_2$.

Kasus 3.

Misalkan diambil dua bentuk persamaan linier dari persamaan (3.2) sebagai berikut

$c_1 + c_2u = 0$, $c_2v = 1$.

Dengan melakukan metode eliminasi didapatkan nilai

$c_1 = -uv^{-1}$ dan $c_2 = v^{-1}$.

Kemudian nilai c_1 dan c_2 disubtitusi ke persamaan (3.3) dan (3.4) sehingga

(1) $c_1 diag(1, \cdots, 1) + c_2 diag(\beta_1, \cdots, \beta_r) \in \{0, 1\}$
$-uv^{-1} + v^{-1}\beta_i \in \{0, 1\}$, untuk $i = 1, \cdots, r$, maka $\beta_i = u$ atau $\beta i = u + v$,

(2) $c_2 diag(\beta_{r+1}, \cdots, \beta_n) = 1$
$v^{-1}\beta_j = 1$ untuk $j = r + 1, \cdots, n$, maka $\beta_j = v$.

Asumsikan bahwa A dan B similar secara simultan dengan matriks $I_r \oplus O$ dan $B_1 \oplus B_2$ secara berturut-turut. Selanjutnya akan disusun nilai eigen dari matriks $S^{-1}AS$ dan $S^{-1}BS$ dengan tiga kondisi yaitu jika dipilih $\beta_i = u$, $\beta_i \neq 0$, dan $\beta_i = 0$.

1. Jika $\beta_i = u$ untuk semua $i = 1, \cdots, r$, maka nilai eigen dari $S^{-1}AS$ dan $S^{-1}BS$ disusun sebagai berikut
$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, S^{-1}BS = \begin{bmatrix} uI & 0 \\ 0 & vI \end{bmatrix}.$$
Sehingga kombinasi linier dari $c_1S^{-1}AS + c_2S^{-1}BS = S^{-1}CS$ adalah
$$-uv^{-1}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + v^{-1}\begin{bmatrix} uI & 0 \\ 0 & vI \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$
yang memenuhi kombinasi linier ke-2 pada teorema.
2. Jika $\beta_i \neq 0$ dan $k = 6$, maka $\beta_i = u + v$ dibuat menjadi $u = \varepsilon^{-1}\beta_i$ dan $v = \varepsilon\beta_i$ dimana β_i, u, v adalah akar-akar dari $\sqrt[6]{1}$. Selanjutnya nilai eigen dari matriks $S^{-1}AS$ dan $S^{-1}BS$ disusun sebagai berikut
$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, S^{-1}BS = \begin{bmatrix} \varepsilon^{-1}\beta_i I & 0 & 0 \\ 0 & \beta_i I & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon\beta_i I \end{bmatrix}$$
dan $c_1 = -uv^{-1} = \varepsilon$, $c_2 = v^{-1} = \varepsilon^{-1}\beta_i^{-1}$.
Sehingga kombinasi linier dari $c_1S^{-1}AS + c_2S^{-1}BS = S^{-1}CS$ adalah
$$\varepsilon\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon^{-1}\beta_i^{-1}\begin{bmatrix} \varepsilon^{-1}\beta_i I & 0 & 0 \\ 0 & \beta_i I & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon\beta_i I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$
yang memenuhi kombinasi linier ke-5 pada teorema.
3. Jika $\beta_i = 0$ dan $k = 2$, maka $u = -v$, $c_1 = 1$, dan $c_2 = v^{-1}$. Selanjutnya nilai eigen dari $S^{-1}AS$ dan $S^{-1}BS$ disusun sebagai berikut
$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, S^{-1}BS = \begin{bmatrix} -vI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & vI \end{bmatrix}.$$
Sehingga kombinasi linier dari $c_1S^{-1}AS + c_2S^{-1}BS = S^{-1}CS$ adalah
$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + v^{-1}\begin{bmatrix} -vI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & vI \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$
yang memenuhi kombinasi linier ke-4 pada teorema.

Kasus 4.
Misalkan diambil dua bentuk persamaan linier dari persamaan (3.2) sebagai berikut.
$c_1 + c_2u = 0$, $c_1 + c_2v = 0$ dimana $(u \neq v)$.
Dengan melakukan metode eliminasi, di dapatkan nilai $c_2 = 0$. Kasus ini tidak memenuhi asumsi 3 dimana $c_1 \neq 0 \neq c_2$.
Kasus 5.
Misalkan diambil dua bentuk persamaan linier dari persamaan (3.2) sebagai berikut
$c_1 + c_2u = 1$, $c_2v = 1$.
Dengan melakukan metode eliminasi didapatkan nilai
$c_1 = 1 - uv^{-1}$ dan $c_2 = v^{-1}$.
Kemudian nilai c_1 dan c_2 disubtitusi ke persamaan (3.3) dan (3.4) sehingga

(1) $c_1 diag(1, \cdots, 1) + c_2 diag(\beta_1, \cdots, \beta_r) \in \{0, 1\}$
$1 - uv^{-1} + v^{-1}\beta i \in \{0, 1\}$, untuk $i = 1, \cdots, r$, maka $\beta_i = u$ atau $\beta_i = u - v$,

(2) $c_2 diag(\beta_{r+1}, \cdots, \beta_n) = 1$
$v^{-1}\beta_j = 1$ untuk $j = r + 1, \cdots, n$, maka $\beta_j = v$.

Asumsikan bahwa A dan B similar secara simultan dengan matriks $I_r \oplus O$ dan $B_1 \oplus B_2$ secara berturut-turut. Selanjutnya akan disusun nilai eigen dari matriks $S^{-1}AS$ dan $S^{-1}BS$ dengan dua kondisi yaitu jika dipilih $\beta_i = u$ dan $\beta_i = u - v$.

1. Jika $\beta_i = u$ untuk semua $i = 1, \cdots, r$, maka nilai eigen dari $S^{-1}AS$ dan $S^{-1}BS$ disusun sebagai berikut.
$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, S^{-1}BS = \begin{bmatrix} uI & 0 \\ 0 & vI \end{bmatrix}.$$
Sehingga kombinasi linear dari $c_1S^{-1}AS + c_2S^{-1}BS = S^{-1}CS$ adalah
$$1 - uv^{-1} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + v^{-1} \begin{bmatrix} uI & 0 \\ 0 & vI \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$
yang memenuhi kombinasi linier ke-3 pada teorema.
2. Jika $\beta_i = u - v$ dan $k = 6$, maka $\beta_i = u - v$ dibuat menjadi $u = \beta_i + v$, sedemikian sehingga $\beta_i = \varepsilon^{-1}u$ dan $v = \varepsilon u$ dimana β_i, u, v adalah akar-akar dari $\sqrt[6]{1}$. Selanjutnya nilai eigen dari $S^{-1}AS$ dan $S^{-1}BS$ disusun sebagai berikut
$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, S^{-1}BS = \begin{bmatrix} \varepsilon^{-1}uI & 0 & 0 \\ 0 & uI & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon uI \end{bmatrix}$$
dan $c_1 = 1 - uv^{-1} = \varepsilon$, $c_2 = v^{-1} = \varepsilon^{-1}u^{-1}$.
Sehingga kombinasi linier dari $c_1S^{-1}AS + c_2S^{-1}BS = S^{-1}CS$ adalah
$$\varepsilon \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon^{-1}u^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon^{-1}uI & 0 & 0 \\ 0 & uI & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon uI \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$
yang memenuhi kombinasi linier ke-5 pada teorema.

Kasus 6.
Misalkan diambil dua bentuk persamaan linier dari persamaan (3.2) sebagai berikut.
$c_2u = 1$, $c_2v = 0$ dimana $(u \neq v)$.
Dengan melakukan metode eliminasi didapatkan nilai $u = v$. Kasus ini tidak memenuhi teorema dimana $u \neq v$. □

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada tugas akhir ini dapat disimpulkan bahwa kombinasi linier $c_1S^{-1}AS + c_2S^{-1}BS$ adalah matriks idempoten dimana A adalah matriks idempoten dan B adalah matriks t-poten untuk $t > 1$ jika dan hanya jika matriks A dan B komutatif, sehingga $c_1S^{-1}AS + c_2S^{-1}BS = S^{-1}CS$ adalah salah satu dari lima bentuk kombinasi linier berikut.

1) $\frac{v}{v-u}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + \frac{1}{u-v}\begin{bmatrix} vI & 0 \\ 0 & uI \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$,

2) $-uv^{-1}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + v^{-1}\begin{bmatrix} uI & 0 \\ 0 & vI \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$,

3) $(1-uv^{-1})\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + v^{-1}\begin{bmatrix} uI & 0 \\ 0 & vI \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$,

4) $\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + v^{-1}\begin{bmatrix} -vI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & vI \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$ jika $k = 2$,

5) $\varepsilon\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon^{-1}u^{-1}\begin{bmatrix} \varepsilon^{-1}uI & 0 & 0 \\ 0 & uI & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon uI \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$ jika $k = 6$,

dimana u, v adalah akar-akar dari $\sqrt[k]{1}$ untuk suatu k, $u \neq v$, dan $\varepsilon = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Daftar Pustaka

[1] Anton, H dan C. Rorres. 2014. *Elementery Linear Algebra, Aplications Version, 11th Edition.* New York: Wiley.

[2] Brown, James Ward and Churchill. Ruel V. 2009. *Complex Variables and Applications, 8th Edition.* New York: McGraw-Hill.

[3] Horn, Roger A dan Johnson, Charles R. 2013. *Matrix Analysis, Second Edition.* Cambridge University Press.

[4] J. Benitez, N. Thome. 2005. Idempotency of Linear Combinations of an Idempotent Matrix and a T-Potent Matrix that Commute. *Linear Algebra and it's Aplications*, **403**: 414 – 418.

[5] J. Benitez, N. Thome. 2006. $\{K\}$-Group Periodic Matrices. *SIAM J. Matrix Anal. Appl*, Vol.**28** No.1, pp. 9 – 25.

[6] J.K Baksalary, O.M. Baksalary. 2000. Idempotency of linear combinations of two idempotent matrices. *Linear Algebra Appl.* **321**: 3 – 7.

[7] J.K Baksalary, O.M. Baksalary, G.P.H.Styan. 2002. Idempotency of linear combinations of an idempotent matrix and tripotent matrix. *Linear Algebra Appl.* **354**: 21 – 34.

[8] Lipschutz, S. and Lipson, M. 2009. *Linear Algebra*, 4^{th} Edition. Schaum's Outlines.

[9] Poularikas, Ed. Alexander. D. 1999. *The Handbook of Formulas and Tables for Signal Processing.* Boca Raton: CRC Press LLC.