HOMOLOGI DARI HIMPUNAN KUBIK YANG DIREDUKSI (*ELEMENTARY COLLAPSE*)

RISCHA DEVITA

*Program Studi Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
 rischadevita@ymail.com*

Abstrak. Diberikan suatu ruang topologi $X \subset \mathbb{R}^n$, yang dapat disederhanakan menjadi suatu graf. Kemudian graf tersebut direpresentasikan secara kombinatorik. Selanjutnya dari kombinatorik ini diperoleh suatu kuantitas aljabar $H_*(X)$ yang disebut homologi dari X . Grup homologi ke- k dari X adalah grup kuosien yang dinotasikan $H_k(X)$. Sedangkan homologi dari X adalah koleksi dari semua grup homologi ke- k dari X yang dinotasikan oleh $H_*(X) := \{H_k(X)\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Pada paper ini, akan dikaji suatu cara yang dinamakan dengan *elementary collapse* untuk mereduksi jumlah kubus dasar yang ada pada himpunan kubik. Kemudian ditunjukkan bahwa homologi dari himpunan kubik sebelum dan sesudah direduksi adalah isomorfik. Suatu contoh diberikan untuk lebih memahami teori ini.

Kata Kunci: Ruang topologi, *elementary collapse*, isomorfik

1. Pendahuluan

Topologi merupakan cabang matematika yang merupakan pengembangan dari geometri. Awal kajian topologi dilakukan oleh Euler (sejalan dengan berkembangnya teori graf) dan konsep topologinya sendiri diperkenalkan beberapa abad kemudian oleh B. Listing. Kajian topologi ini dikembangkan dengan menggunakan konsep teori himpunan, dengan memperhatikan himpunan titik-titik dan keluarga himpunan tersebut. Salah satu konsep penting yang dikaji dalam topologi adalah pemetaan (fungsi) dari grup ke grup yang bersifat homomorfisma. Misalkan diberikan suatu ruang topologi $X \subset \mathbb{R}^n$, yang dapat disederhanakan menjadi suatu graf. Kemudian graf tersebut direpresentasikan secara kombinatorik. Selanjutnya dari kombinatorik ini diperoleh suatu kuantitas aljabar $H_*(X)$ yang disebut homologi dari X .

Sebuah kubus dasar Q adalah suatu hasil kali berhingga dari interval dasar $I = [l, l + 1]$ atau $I = [l]$ untuk suatu $l \in \mathbb{Z}$. Jadi

$$Q = I_1 \times I_2 \times I_3 \times \cdots \times I_d \subset \mathbb{R}^d.$$

Suatu himpunan kubik yang sangat sederhana, memuat banyak (hingga) kubus dasar. Pada paper ini, akan dikaji suatu cara yang dinamakan dengan *elementary collapses* untuk mereduksi jumlah kubus dasar yang ada pada suatu himpunan kubik. Kemudian ditunjukkan bahwa homologi sebelum dan sesudah direduksi adalah isomorfik.

2. Homologi dari Himpunan Kubik yang Direduksi (*Elementary Collapse*)

Berikut merupakan definisi dari *face* dan *proper face* pada himpunan kubik.

Definisi 2.1. [4] Misal X himpunan kubik dan misalkan $Q \in \mathcal{K}(X)$. Jika Q bukan *proper face* dari suatu $P \in \mathcal{K}(X)$, maka Q disebut *maximal face* pada X . $\mathcal{K}_{max}(X)$ menyatakan himpunan dari *maximal faces* pada X . Sebuah *face* yang merupakan *proper face* dari persis satu kubus dasar pada X disebut *free face* pada X .

Lema 2.2. [4] Misalkan X adalah sebuah himpunan kubik. Misalkan $Q \in \mathcal{K}(X)$ adalah sebuah *free face* pada X dan asumsikan $Q \prec P \in \mathcal{K}(X)$. Maka $P \in \mathcal{K}_{max}(X)$ dan $\dim Q = \dim P - 1$.

Bukti. Asumsikan $P \prec R$, untuk suatu $R \in \mathcal{K}(X)$. Maka $Q \prec R$, hal ini bertentangan dengan Q sebagai *free face* dari X . Akan dibuktikan bahwa $\dim Q = \dim P - 1$. Misalkan $\dim Q \neq \dim P - 1$. Artinya

- (1) $\dim Q > \dim P - 1$, atau
- (2) $\dim Q < \dim P - 1$.

Jelas bahwa Kasus (1) $\dim Q > \dim P - 1$ tidak berlaku, karena Q merupakan *proper face* dari P . Asumsikan bahwa Kasus (2) $\dim Q < \dim P - 1$ berlaku. Maka terdapat $R \in \mathcal{K}(X)$ yang berbeda dari Q dan P sedemikian sehingga $Q \prec R \prec P$. Hal ini tidak mungkin, karena bertentangan lagi dengan Q sebagai sebuah *free face* dari X . Jelas bahwa pengandaian bahwa $\dim Q \neq \dim P - 1$ adalah salah. $\square$

Definisi 2.3. [4] Misalkan Q adalah sebuah *free face* pada X dan misalkan P adalah kubus tunggal pada $\mathcal{K}(X)$, sedemikian sehingga Q adalah *proper face* dari P . Misalkan $\mathcal{K}'(X) := \mathcal{K}(X) \setminus \{Q, P\}$. Definisikan

$$X' := \bigcup_{R \in \mathcal{K}'(X)} R.$$

Maka X' disebut sebuah ruang kubik yang diperoleh dari X melalui sebuah *elementary collapse* dari P oleh Q .

Proposisi 2.4. [4] Jika X' adalah sebuah ruang kubik yang diperoleh dari X melalui *elementary collapse* pada P oleh Q , maka

$$\mathcal{K}(X') = \mathcal{K}'(X).$$

Bukti. Jelas bahwa $\mathcal{K}'(X) \subset \mathcal{K}(X')$, karena $\mathcal{K}(X')$ dibentuk oleh $X' = \bigcup_{R \in \mathcal{K}'(X)} R$. Akan dibuktikan $\mathcal{K}(X') \subset \mathcal{K}'(X)$. Asumsikan terdapat sebuah kubus dasar $S \in \mathcal{K}(X') \setminus \mathcal{K}'(X)$. Maka $S \in \{P, Q\}$. Misalkan $x \in \mathring{S} \subset S \subset X'$. Maka $x \in R$ untuk suatu $R \in \mathcal{K}'(X)$ dan $R \cap \mathring{S} \supset \{x\} \neq \emptyset$. Maka, $S \subset R$. Karena $S \notin \mathcal{K}'(X)$, maka S adalah *proper face* dari $R \in \mathcal{K}'(X) \subset \mathcal{K}(X)$. Akan tetapi, baik $S = Q$ ataupun $S = P$ dapat menjadi *proper face* dari R , kontradiksi. $\square$

Suatu himpunan kubik $X \subset \mathbb{R}^2$ yang memuat sembilan kubus dasar dapat direduksi menjadi menjadi sebuah himpunan kubik yang hanya memuat satu kubus dasar saja, yaitu hanya memuat satu titik. Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa homologinya adalah isomorfik.

Lema 2.5. [4] *Asumsikan X adalah himpunan kubik dan X' diperoleh dari X melalui elementary collapse dari $P_0 \in \mathcal{K}_k(X)$ oleh $Q_0 \in \mathcal{K}_{k-1}(X)$. Maka*

1. $\{c \in C_k(X) \mid \partial c \in C_{k-1}(X)\} \subset C_k(X')$,
2. untuk setiap $c \in C_{k-1}(X)$ terdapat $c' \in C_{k-1}(X')$ sedemikian sehingga $c - c' \in B_{k-1}(X)$.

Bukti.

- (1) Karena P_0 adalah elemen tunggal dari $\mathcal{K}_k(X)$ sedemikian sehingga Q_0 adalah sebuah *face*, maka $\langle \partial \hat{P}, \hat{Q}_0 \rangle = 0$ bilamana $P \neq P_0$. Dengan cara yang sama, karena P_0 kubus dasar berdimensi k dan Q_0 sebuah *face* dari P_0 berdimensi $k-1$, maka $\langle \partial \hat{P}_0, \hat{Q}_0 \rangle = \pm 1$. Asumsikan bahwa $c \in C_k(X)$ sedemikian sehingga $\partial c \in C_{k-1}(X')$. Maka $|\partial c| \subset X'$. Khususnya, $Q_0 \not\subset |\partial c|$ dan sebagai akibatnya $\langle \partial c, \hat{Q}_0 \rangle = 0$.

Karena $c = \sum_{P \in \mathcal{K}_k(X)} \langle c, \hat{P} \rangle \hat{P}$, diperoleh

$$0 = \langle \partial \sum_{P \in \mathcal{K}_k(X)} \langle c, \hat{P} \rangle \hat{P}, \hat{Q}_0 \rangle = \sum_{P \in \mathcal{K}_k(X)} \langle c, \hat{P} \rangle \langle \partial \hat{P}, \hat{Q}_0 \rangle = \pm \langle c, \hat{P}_0 \rangle,$$

untuk itu, $c \in C_k(X')$.

- (2) Asumsikan bahwa $c \in C_{k-1}(X)$. Misalkan $c' := c - \langle c, \hat{Q}_0 \rangle \langle \partial \hat{P}_0, \hat{Q}_0 \rangle \partial \hat{P}_0$.

Maka, $c - c' = \langle c, \hat{Q}_0 \rangle \langle \partial \hat{P}_0, \hat{Q}_0 \rangle \partial \hat{P}_0 \in B_{k-1}(X)$.

Karena $\langle c', \hat{Q}_0 \rangle = \langle c, \hat{Q}_0 \rangle - \langle c, \hat{Q}_0 \rangle \langle \partial \hat{P}_0, \hat{Q}_0 \rangle^2 = 0$, maka $c' \in C_{k-1}(X')$. $\square$

Teorema 2.6. [4] *Asumsikan X adalah himpunan kubik dan X' diperoleh dari X melalui elementary collapse dari $P_0 \in \mathcal{K}_k(X)$ oleh $Q_0 \in \mathcal{K}_{k-1}(X)$. Maka*

$$H_*(X') \cong H_*(X).$$

Bukti. Bukti dimulai dengan membuat beberapa perbandingan yang jelas antara rantai-rantai, siklik-siklik, dan batas-batas dari dua kubik. Karena $X' \subset X$, maka $C_n(X') \subset C_n(X) \forall n \in \mathbb{Z}$. Dengan Proposisi 2.4, $\mathcal{K}_n(X') = \mathcal{K}_n(X)$ untuk $n \in \mathbb{Z} \setminus \{k-1, k\}$. Akibatnya,

$$C_n(X') = C_n(X) \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{Z} \setminus \{k-1, k\}.$$

Karena $Z_n(X) = C_n(X) \cap \ker \partial_n$ untuk sebarang himpunan kubik X dan sebarang $n \in \mathbb{Z}$, diperoleh $Z_n(X') \subset Z_n(X)$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$ dan

$$Z_n(X') = Z_n(X) \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{Z} \setminus \{k-1, k\}.$$

Dengan cara yang sama, karena $B_n(X) = \partial_{n+1}(C_{n+1}(X))$ untuk sebarang himpunan kubik X dan sebarang $n \in \mathbb{Z}$, maka diperoleh $B_n(X') \subset B_n(X)$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$ dan

$$B_n(X') = B_n(X) \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{Z} \setminus \{k-2, k-1\}.$$

Amati bahwa karena siklik-siklik dan batas-batasnya adalah sama,

$$H_n(X') = H_n(X) \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{Z} \setminus \{k-2, k-1, k\}.$$

Perbedaan yang mungkin dari rantai-rantai ke- k hanyalah pada pada siklik-sikliknya. Sekarang akan diperlihatkan bahwa mereka adalah sama.

$$\begin{aligned} Z_k(X) &= C_k(X) \cap \ker \partial_k \\ &= C_k(X) \cap \ker \partial_k \cap \ker \partial_k \\ &\subset {}^1C_k(X) \cap \{c \in C_k \mid \partial_k c \in C_{k-1}(X')\} \cap \ker \partial_k \\ &\subset {}^2C_k(X') \cap \ker \partial_k \\ &= Z_k(X'). \end{aligned}$$

Inklusi 1 berdasarkan bahwa $\{0\} \subset C_{k-1}(X')$, dan inklusi 2 berdasarkan Lema 2.5(1). Karena $Z_k(X') \subset Z_k(X)$, dapat disimpulkan bahwa $Z_k(X') = Z_k(X)$ dan $H_k(X') = Z_k(X')/B_k(X') = H_k(X)$.

Pada tingkat rantai $(k-2)$ perbedaan hanya mungkin di dalam batas-batasnya. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa mereka sama yaitu dengan membuktikan bahwa $B_{k-2}(X) \subset B_{k-2}(X')$. Ambil $b \in B_{k-2}(X)$. Maka $b = \partial c$ untuk suatu $c \in C_{k-1}(X)$. Dengan Lema 2.5(2) terdapat $c' \in C_{k-1}(X')$ sedemikian sehingga $c - c' \in B_{k-1}(X)$. Secara khusus, untuk suatu $d \in C_k(X)$,

$$b - \partial c' = \partial(c - c') = \partial^2 d = 0$$

dan $b = \partial c' \in B_{k-2}(X')$. Untuk itu telah terlihat bahwa $B_{k-2}(X) = B_{k-2}(X')$. Sehingga $H_{k-2}(X') = H_{k-2}(X)$.

Tinggal mempertimbangkan grup homologi pada dimensi $k-1$. Dalam kasus ini, grup homologinya tidak sama, tetapi akan dikonstruksi sebuah isomorfisma. Misalkan $\xi \in H_{k-1}(X')$. Maka $\xi = [z]_{X'}$ untuk suatu siklik $z \in Z_{k-1}(X')$. Subscript X' pada $[z]_{X'}$ menyatakan kelas homologi yang diambil dari X' . Ini penting, karena $Z_{k-1}(X') \subset Z_{k-1}(X)$, yang berarti bahwa dapat juga mempertimbangkan kelas homologi $[z]_X$ dari z pada $H_{k-1}(X)$. Karena $B_{k-1}(X') \subset B_{k-1}(X)$, dengan mudah memeriksa bahwa jika $[z]_{X'} = [z']_{X'}$ untuk suatu $z' \in Z_{k-1}(X')$, maka $[z]_X = [z']_X$. Ini berarti bahwa pemetaan $\iota : H_{k-1}(X') \rightarrow H_{k-1}(X)$ terdefinisi dengan baik yang diberikan oleh $\iota([z]_{X'}) = [z]_X$. Jelas bahwa pemetaan ini adalah sebuah homomorfisma pada grup.

Untuk membuktikan bahwa pemetaan adalah monomorfisma, asumsikan bahwa $[z]_X = 0$ untuk suatu $z \in Z_{k-1}(X)$. Maka $z = \partial c$ untuk suatu $c \in C_k(X)$. Berdasarkan Lema 2.5(1), diperoleh bahwa $c \in C_k(X')$, yang menunjukkan bahwa $[z]_{X'} = 0$. jadi, pemetaannya adalah sebuah monomorfisma. Untuk menunjukkan bahwa ia adalah epimorfisma, pertimbangkan $[z]_X$ untuk suatu $z \in Z_{k-1}(X)$. Berdasarkan Lema 2.5(2), terdapat $c' \in C_{k-1}(X')$ sedemikian sehingga $z - c' \in B_{k-1}(X)$. Secara khusus, $\partial(z - c') = 0$, sehingga $\partial c' = \partial z = 0$. Ini menunjukkan bahwa $c' \in Z_{k-1}(X')$ dan karena $\iota([c']_{X'}) = [c']_X = [z]_X$, maka pemetaannya adalah surjektif. $\square$

3. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Dr. Admi Nazra, Ibu Nova Noliza Bakar M.Si, Bapak Efendi, M.Si, Bapak Prof. I Made Arnawa, dan Ibu Arrival Rince Putri, M.T, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Herstein, *Topics in Algebra*, 1999, Second Edition, John Wiley and Sons, Singapore.
- [2] Jacob, Bill, *Linear Algebra*, W. H. Freeman and Company, New York, 1990.
- [3] Kaczynski. T, K. Mischaikow, M. Mrozek, 2000, *Algebraic Topology : A Computational Approach*. Springer-Verlag, New York.
- [4] Kaczynski. T, K. Mischaikow, M. Mrozek, 2004, *Computational Homology*, Springer-Verlag, New York.
- [5] Made, I Arnawa dan Hendra Syarifudin, 2011, *Pengantar Aljabar Abstrak*. (tidak diterbitkan).