Jurnal Matematika UNAND
Vol. **10** No. **1** Hal. 159 – 163
Edisi Januari 2021
ISSN : 2303–291X
e-ISSN : 2721–9410

BILANGAN KROMATIK LOKASI DARI GRAF *BUCKMISTERFULLERENE* B_{60}

KIKI KHAIRA MARDIMAR, LYRA YULIANTI*, DES WELYYANTI
Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
kikikhaira97@gmail.com, lyra@sci.unand.ac.id, wely@sci.unand.ac.id

Diterima 15 Desember 2020 Direvisi 29 Desember 2020 Dipublikasikan 12 Januari 2021

Abstrak. Misalkan G adalah suatu graf terhubung dan c adalah pewarnaan titik pada G yang menginduksi partisi $\Pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_k\}$ dari $V(G)$. Kode warna dari titik $v \in V(G)$ adalah $(d(v, S_1), d(v, S_2), \cdots, d(v, S_k))$ dengan $d(v, S_i) = \min\{d(v, x)|x \in S_i\}$ dan $d(v, S_i) < \infty$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik pada G mempunyai kode warna yang berbeda maka c disebut pewarnaan lokasi. Banyaknya warna minimum yang digunakan untuk pewarnaan lokasi disebut **bilangan kromatik lokasi** dari G dan dinotasikan dengan $\chi_L(G)$. Pada tulisan ini akan dibahas bilangan kromatik lokasi dari gabungan lima Graf *Buckminsterfullerene* B_{60}.

Kata Kunci: Bilangan Kromatik Lokasi, Kode Warna, Graf Buckminsterfullerene B_{60}

1. Pendahuluan

Bilangan kromatik lokasi pertama kali diperkenalkan oleh Chartand dkk (2002) [4]. Konsep ini merupakan perpaduan konsep pewarnaan titik suatu graf dan konsep dimensi partisi suatu graf. Pewarnaan titik suatu graf adalah pemberian warna ke semua titik-titik pada suatu graf dengan ketentuan setiap titik yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. Banyaknya warna minimum yang digunakan untuk pewarnaan titik pada suatu graf disebut bilangan kromatik lokasi yang dinotasikan dengan $\chi_L(G)$.

Berdasarkan penelitian Welyyanti dkk. pada tahun 2014 [6], dihasilkan suatu teori tentang perluasan pengertian bilangan kromatik lokasi suatu graf yang dapat diaplikasikan pada semua jenis graf termasuk pada graf tak terhubung dengan gabungan lima graf buckminsterfullerene.

2. Beberapa Konsep Dasar

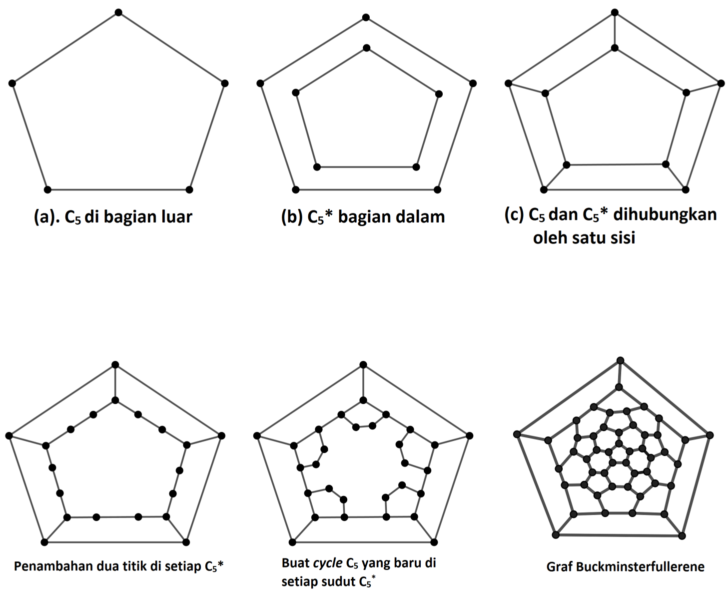
Graf lingkaran dilambangkan dengan C_n dengan $n \geq 3$, adalah suatu graf terhubung yang setiap titiknya berderajat dua [2]. **Derajat** adalah suatu titik v di G

*penulis korespondensi

merupakan banyaknya sisi yang terkait dengan titik v. **Graf teratur** adalah suatu graf yang derajat setiap titiknya sama.

Fullerene adalah suatu molekul polihedral yang secara keseluruhan terdiri dari atom-atom karbon. Graf *Fullerene* adalah suatu graf yang titik-titiknya merupakan representasi dari atom-atom karbon, sementara sisi-sisinya merepresentasikan ikatan di antara atom-atom tersebut. Graf tersebut memuat bentuk pentagonal C_5 dan heksagonal C_6. Graf *Dodecahedral*, dinotasikan B_{20}, adalah salah satu graf *Fullerene* dengan banyak titik 20, sementara graf *Fullerene* lainnya, yaitu graf *Buckminsterfullerene* mempunyai titik sebanyak 60, dinotasikan B_{60} [1].

Graf *Buckminsterfullerene* dapat dikonstruksi dari gabungan beberapa graf lingkaran dengan langkah sebagai berikut. Langkah (a) misalkan graf C_5 adalah lingkaran yang berada pada bagian terluar dan langkah (b) C_5^* adalah lingkaran yang berada di bagian dalam. Selanjutnya langkah (c) ditambahkan satu sisi yang menghubungkan masing-masing titik dari graf C_5 dengan C_5^*, kemudian tambahkan pada setiap sisi di graf C_5^* masing-masing dua titik yang baru. Langkah selanjutnya adalah tambahkan beberapa titik dan sisi baru pada graf C_5^* sehingga setiap sudutnya akan membentuk ling-karan C_5 yang baru. Seterusnya dengan menambahkan beberapa titik dan sisi lagi sehingga terbentuk beberapa lingkaran C_5 dan C_6 seminimal mungkin. Akibatnya banyak titik keseluruhan adalah 60 titik.



Gambar 1. Tahapan Membentuk Graf *Buckminsterfullerene*

Misalkan c adalah suatu pewarnaan titik pada graf G dengan $c(u) \neq c(v)$, untuk u dan v yang bertetangga di G. Misalkan S_i adalah himpunan titik yang diberi warna i, yang selanjutnya disebut **kelas warna**, maka $\Pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_k\}$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas-kelas warna dari

$V(G)$. **Kode warna** $c_{\Pi}(v)$ dari v adalah k-pasang terurut $c_{\Pi}(v) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \cdots, d(v, S_k))$ dimana $d(v, S_i) = \min\{d(v, x)|x \in S_i\}$, untuk $1 \leq i \leq k$. Titik $v \in V(G)$ disebut **titik dominan** jika $d(v, S_i) = 0$, jika $v \in S_i$ dan 1 untuk yang lainnya. Jika setiap titik di G memiliki kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G. Banyaknya warna minimum yang digunakan untuk pewarnaan lokasi disebut **bilangan kromatik lokasi** dari G dan dinotasikan dengan $\chi_L(G)$. Karena setiap pewarnaan lokasi juga merupakan suatu pewarnaan titik maka $\chi(G) \leq \chi_L(G)$ [4].

Berikut terdapat teorema yang berkaitan dengan bilangan kromatik lokasi untuk graf terhubung.

Teorema 2.1. *[4] Misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung G. Jika u dan v adalah dua titik pada graf G sedemikian sehingga* $d(u, w) = d(v, w)$ *untuk setiap* $w \in V(G) \setminus u, v$ *maka* $c(u) \neq c(v)$. *Dalam hal khusus, jika u dan v adalah titik-titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga* $N(u) = N(v)$, *maka* $c(u) \neq c(v)$.

Berikut teorema tentang prinsip *pigeonhole* yang akan digunakan pada pembahasan di bab berikutnya.

Teorema 2.2. *[5] Jika k merupakan bilangan bulat positif, dan* $k + 1$ *atau lebih dari* $k + 1$ *objek yang ditempatkan ke dalam k kotak, maka terdapat paling sedikit* 1 *kotak yang mengandung dua atau lebih objek.*

3. Bilangan Kromatik Lokasi Graf *Buckminsterfullerene*

Pada Teorema 4.1 akan dibahas tentang bilangan kromatik lokasi dari graf *Buckminsterfullerene* B_{60}.

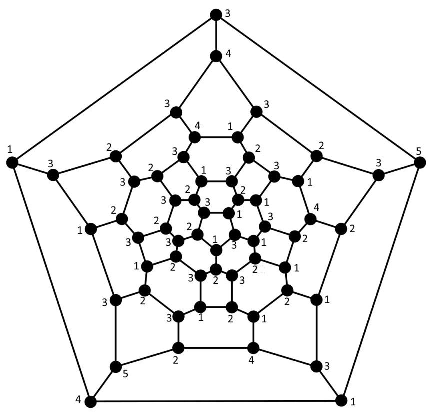
Teorema 3.1. *Misalkan terdapat graf Buckminsterfullerene, dinotasikan* B_{60}, *maka* $\chi_L(B_{60}) = 5$.

Bukti. Untuk membuktikan bahwa $\chi_L(B_{60}) = 5$ maka akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(B_{60}) \leq 5$ dan $\chi_L(B_{60}) \geq 5$. Karena B_{60} adalah graf 3-regular maka jelas bahwa $\chi_L(B_{60}) \geq 4$. Karena setiap titik berderajat 3, maka setiap titik pada graf B_{60} akan menjadi titik dominan. Definisikan $c : V(B_{60}) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$, maka terdapat empat cara untuk mewarnai satu titik dan ketiga tetangganya. Berdasarkan Teorema 3.1 akan terdapat paling sedikit dua titik dominan di kelas warna yang sama. Jadi, diperoleh bahwa $\chi_L(B_{60}) \geq 5$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa untuk setiap dua titik di B_{60}, akan selalu diperoleh bahwa kode warna kedua titik tersebut berbeda.

Kasus 1. Untuk dua titik dengan warna 1,2 dan 3.

Misalkan c(z_3) = c(y_3) = 1. Karena jarak kedua titik tersebut ke titik yang berwarna 5 berbeda, yaitu $d(z_3, w_{10}) = 6$ dan $d(y_3, v_2) = 5$, maka kode warna z_3 berbeda dengan kode warna y_3. Untuk setiap dua titik lain dengan warna 1, pembuktian dilakukan dengan cara serupa.



Gambar 2. Pewarnaan 5-lokasi pada Graf B_{60}

Selanjutnya untuk dua titik dengan warna 1 yang jaraknya sama ke titik dengan warna 5 tetapi jarak ke titik berwarna 4 berbeda. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan c(x_4) = c(w_6) = 1. Karena $d(x_4, x_5) = 1$ dan $d(w_6, x_5) = 2$ maka kode warna x_4 berbeda dengan kode warna w_6. Untuk dua titik yang sama-sama berwarna 1,2 atau 3, kode warna nya dibedakan berdasarkan jarak ke titik yang berwarna 4 atau 5.

Kasus 2. Untuk dua titik dengan warna 4.

Misalkan c(w_8) = c(v_4) = 4. Karena jarak kedua titik tersebut ke titik yang berwarna 5 berbeda, yaitu $d(w_8, w_{10}) = 2$ dan $d(v_4, w_{10}) = 1$, maka kode warna w_8 berbeda dengan kode warna v_4. Untuk setiap dua titik lain dengan warna 4, pembuktian dilakukan dengan cara serupa.

Selanjutnya untuk dua titik dengan warna 4 yang jaraknya sama ke titik dengan warna 5 tetapi jarak ke titik berwarna 1 berbeda. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan c(w_1) = c(w_8) = 4. Karena $d(w_1, x_1) = 2$ dan $d(w_8, x_9) = 1$ maka kode warna w_1 berbeda dengan kode warna w_8. Untuk dua titik yang sama-sama berwarna 4 kode warna nya dibedakan berdasarkan jarak ke titik yang berwarna 5 atau 1.

Kasus 3. Untuk dua titik dengan warna 5.

Misalkan c(w_{10}) = c(v_2) = 5. Karena jarak kedua titik tersebut ke titik yang berwarna 4 berbeda, yaitu $d(w_{10}, v_4) = 1$ dan $d(v_2, v_4) = 2$, maka kode warna w_{10} berbeda dengan kode warna v_2.

Karena setiap titik pada B_{60} memiliki kode warna yang berbeda maka c merupakan pewarnaan lokasi pada B_{60}. Jadi diperoleh $\chi_L(G) \leq 5$. □

4. Kesimpulan

Pada makalah ini telah diperoleh bilangan kromatik lokasi dari graf *Buckminsterfullerene* B_{60}, dinotasikan $G = B_{60}$, yaitu $\chi_L(B_{60}) = 5$.

5. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Narwen M.Si, Bapak Prof. Dr. Muhafzan dan Ibu Hazmira Yozza M.Si yang telah memberikan kritikan dan masukan sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Andova, V.; F. Kardos; R. Skrekovski. 2014. Mathematical Aspects of Fullerenes. *Ars Mathematica Contemporanea* **11** 353 – 379.

[2] Bondy, J.A.,U.S.R. Murty. 1976. *Graph Theory with Application.* Elsevier Science Publishing, New York.

[3] Bryant, V. 1993. *Aspects of Combinatorics.* A Wide-Ranging Introduction. Cambridge University Press

[4] Chartrand, G., M.A. Henning, P.J. Slater, dan P. Zhang. 2002. The locating-chromatic number of a graph. *Bull. Inst. Combin. Appl.* **36**: 89 – 101

[5] Rosen, K. H. 2012. *Discrete Mathematics and Its Aplications. Seventh Edition.* Mc Grow Hill Companies, Inc. America, New York.

[6] Welyyanti, D.; E. T. Baskoro.; R. Simanjuntak and S. Utunggadewa. 2014. The Locating-Chromatic Number Of Disconnected Graphs. *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS).* **94** (2): 169 – 182.