BILANGAN RAMSEY MULTIPARTIT HIMPUNAN UNTUK KOMBINASI P_3 DAN P_s

ULFA RAHAYU SY, SYAFRIZAL SY*, LYRA YULIANTI

*Program Studi S1 Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
 email : ulfarahayusy27@gmail.com, syafrizalsy@sci.unand.ac.id, lyra@sci.unand.ac.id*

Diterima 15 Desember 2020 Direvisi 29 Desember 2020 Dipublikasikan 12 Januari 2021

Abstrak. Bilangan Ramsey multipartit merupakan salah satu bentuk dari perluasan konsep bilangan Ramsey klasik. Bilangan Ramsey multipartit yang dipopulerkan oleh Burger dan Vuuren (2004) diperluas menjadi dua yaitu bilangan Ramsey multipartit himpunan dan bilangan Ramsey multipartit ukuran. Konsep bilangan Ramsey multipartit himpunan sebagai berikut. Misalkan j, l, n, s dan t bilangan-bilangan asli dengan $n, s \geq 2$. Bilangan Ramsey multipartit himpunan $M_j(K_{n \times l}, K_{s \times t})$ adalah bilangan asli terkecil ζ sedemikian sehingga, jika semua sisi dari graf $K_{\zeta \times j}$ diberi warna merah dan biru sebarang, maka graf $K_{\zeta \times j}$ akan memuat subgraf $K_{n \times l}$ merah atau $K_{s \times t}$ biru. Definisi bilangan Ramsey multipartit himpunan diperumum untuk graf yang bukan kombinasi dari graf multipartit seimbang lengkap sebagai berikut. Diberikan bilangan asli k dan graf G dan H . Bilangan Ramsey multipartit himpunan $M_k(G, H)$ adalah bilangan asli terkecil n sedemikian sehingga $K_{n \times k}$ diberi 2-pewarnaan akan memuat graf G merah atau graf H biru. Dalam jurnal ini akan dibuktikan nilai dari bilangan Ramsey multipartit himpunan $M_t(P_3, P_s)$ untuk $3 \leq t \leq 5$ dan $3 \leq s \leq 20$, dengan P_s adalah graf lintasan yang memuat s titik.

Kata Kunci: Bilangan Ramsey multipartit himpunan, graf multipartit seimbang lengkap, graf lintasan

1. Pendahuluan

Pada tahun 1930, teori Ramsey pertama kali diperkenalkan oleh Frank Plumton Ramsey dalam makalahnya yang berjudul "On A Problem of Formal Logic" [5]. Ramsey mengemukakan suatu teori yang berkaitan dengan pencarian prosedur untuk menentukan benar tidaknya suatu formula logika yang diberikan. Teori Ramsey diawali dari ide dasar bilangan Ramsey klasik. Hingga saat ini baru sembilan bilangan Ramsey klasik yang ditemukan. Adapun definisi dari bilangan Ramsey klasik diberikan pada definisi berikut. Diberikan dua bilangan bulat positif m dan n , didefinisikan bilangan Ramsey $r(m, n)$ adalah bilangan asli terkecil p sedemikian

*penulis korespondensi

sehingga jika graf lengkap K_p diwarnai dengan warna merah atau biru, maka terdapat K_m merah atau K_n biru sebagai subgraf.

Karena sulitnya mendapatkan bilangan Ramsey klasik untuk nilai m dan n lain, maka kajian bilangan Ramsey diperluas untuk sebarang graf yang tidak harus graf lengkap. Bilangan Ramsey untuk sebarang graf ini dinamakan bilangan Ramsey graf. Perluasan kajian bilangan Ramsey lainnya adalah bilangan Ramsey bipartit. Selanjutnya, dari perumuman konsep bilangan Ramsey bipartit terus berkembang ke perumuman konsep bilangan Ramsey multipartit.

Perluasan bilangan Ramsey Multipartit adalah bilangan Ramsey Multipartit Himpunan dan bilangan Ramsey Multipartit Ukuran yang dijelaskan Burger dan Vuuren (2004) dalam [1] dan [2]. Konsep dari bilangan Ramsey multipartit himpunan yaitu misalkan $K_{\zeta \times j}$ adalah suatu graf multipartit seimbang lengkap yang terdiri dari ζ himpunan partit dan j banyaknya titik pada setiap himpunan partit.

Karena masih sedikit yang membahas bilangan Ramsey multipartit himpunan, maka topik ini menarik untuk dikaji lebih lanjut. Untuk itu pada tulisan ini akan dibahas mengenai bilangan Ramsey multipartit himpunan untuk graf lintasan P_3 dan P_s , yaitu $M_t(P_3, P_s)$.

2. Landasam Teori

Suatu **graf** G didefinisikan sebagai pasangan himpunan $(V(G), E(G))$, dimana $V(G)$ adalah suatu himpunan tak kosong yang elemen-elemennya disebut titik (*vertex*) dan $E(G)$ adalah suatu himpunan yang elemen-elemennya disebut sisi (*edge*) [3].

Jika titik u dan v adalah sepasang titik yang berbeda di G , dan $e = uv$ adalah suatu sisi di G , maka u dan v dikatakan **bertetangga** (*adjacent*) di G , sisi e dikatakan **terkait** (*incident*) dengan titik u dan v di G . Suatu graf H dikatakan **subgraf** dari graf G apabila $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. **Lingkungan** (*Neighborhood*) $N(v)$ dari suatu titik v adalah himpunan semua titik yang bertetangga ke v di G , dan $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. **Komplemen** dari suatu graf G , ditulis $\bar{G}$ yaitu $V(\bar{G}) = V(G)$ dan berlaku $xy \in E(\bar{G})$ jika dan hanya jika $xy \notin E(G)$.

Suatu subhimpunan M dari $E(G)$ dikatakan suatu **matching** pada graf G sebarang jika tidak ada titik terkait dengan lebih dari satu sisi di M . **Derajat minimum** dari graf G dinotasikan dengan $\delta(G)$ dan **derajat maksimum** dari G dinotasikan dengan $\Delta(G)$. Graf lintasan terdiri dari n titik dan $n - 1$ sisi dengan $n \geq 2$ dinotasikan dengan P_n . **Graf lengkap** dinotasikan dengan K_n adalah graf terhubung dengan n titik dimana setiap titik bertetangga dan setiap titik memiliki derajat $n - 1$. Banyak sisi pada graf lengkap yang terdiri dari n buah titik adalah $\frac{1}{2}n(n - 1)$. Graf yang dapat dipartisi menjadi k himpunan partit tak kosong atau lebih dari 2 himpunan partit disebut sebagai **graf k-partit** [3]. Graf k-partit disebut juga **graf multipartit**. **Graf multipartit seimbang lengkap** adalah graf multipartit lengkap dengan kardinalitas titik pada setiap himpunan partitnya sama. Graf multipartit seimbang lengkap dengan jumlah himpunan partitnya j dan kardinalitas titik pada setiap himpunan partitnya t , dinotasikan dengan $K_{j \times t}$ [4].

Burger dan Van Vuuren [1] mendefinisikan bilangan Ramsey multipartit him-

punan sebagai berikut:

Definisi 2.1. [1] Misalkan j, l, n, s dan t bilangan-bilangan asli dengan $n, s \geq 2$. Bilangan Ramsey multipartit himpunan $M_j(K_{n \times l}, K_{s \times t})$ adalah bilangan asli terkecil ζ sedemikian sehingga, jika semua sisi dari graf $K_{\zeta \times j}$ diberi warna merah dan biru sebarang, maka graf $K_{\zeta \times j}$ akan memuat subgraf $K_{n \times l}$ merah atau $K_{s \times t}$ biru.

Colton kemudian memperumum definisi dari bilangan Ramsey multipartit himpunan untuk graf yang bukan kombinasi dari graf multipartit seimbang lengkap sebagai berikut:

Definisi 2.2. [4] Diberikan bilangan asli k dan graf G dan H . Bilangan Ramsey multipartit himpunan $M_k(G, H)$ adalah bilangan asli terkecil n sedemikian sehingga $K_{n \times k}$ diberi 2-pewarnaan akan memuat graf G merah atau graf H biru.

3. Hasil dan Pembahasan

Proposisi 3.1. Bilangan Ramsey multipartit himpunan $M_3(P_3, P_s) = 2$ untuk $3 \leq s \leq 6$.

Bukti. Pertama-tama akan ditunjukkan $M_3(P_3, P_s) \geq 2$ untuk $3 \leq s \leq 6$. Perhatikan graf $F = F_1 \oplus F_2$. Beri 2 pewarnaan merah-biru pada F sebagai berikut: warna merah pada semua sisi F_1 dan warna biru pada semua sisi F_2 . Misalkan $V_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$ adalah satu himpunan partit dari graf $F = K_{(2-1) \times 3}$. Karena graf $F = K_{1 \times 3}$ maka tidak ada pewarnaan merah-biru pada F . Akibatnya, $F_1 \not\supseteq P_3$ merah dan $F_2 \not\supseteq P_s$ biru. Oleh karena itu, $M_3(P_3, P_s) \geq 2$ untuk $3 \leq s \leq 6$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan $M_3(P_3, P_s) \leq 2$ untuk $3 \leq s \leq 6$. Warnai semua sisi dari graf $G = K_{2 \times 3}$ sedemikian sehingga $G \not\supseteq P_3$ merah. Akan ditunjukkan bahwa $G \supseteq P_s$ biru untuk $3 \leq s \leq 6$. Misalkan $V_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$ dan $V_2 = \{b_1, b_2, b_3\}$ adalah himpunan-himpunan partit dari G . Karena $G \not\supseteq P_3$ merah, tanpa mengurangi perumuman, diasumsikan G membentuk *matching* sempurna berwarna merah di G , sebut $M = \{a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3\}$. Jadi titik-titik berikut membentuk lintasan $P_s := a_1b_2a_3b_1a_2b_3$ biru di G . Jadi, $G \supseteq P_s$ biru untuk $3 \leq s \leq 6$. Oleh karena itu, $M_3(P_3, P_s) = 2$ untuk $3 \leq s \leq 6$ (lihat Gambar 1). $\square$

Gambar 1.

Teorema 3.2. Untuk bilangan asli s dimana $\left\lceil \frac{t \times j}{t-1} \right\rceil \leq s \leq (t \times j)$ dan $j = 2$ berlaku $M_t(P_3, P_s) = j$.

Bukti. Pertama-tama akan ditunjukkan $M_t(P_3, P_s) \geq j$ untuk $\left\lceil \frac{t \times j}{t-1} \right\rceil \leq s \leq (t \times j)$ dan $j = 2$. Perhatikan pewarnaan merah-biru pada semua sisi graf $F = K_{(j-1) \times t} \cong K_{1 \times t} \cong F_1 \oplus F_2$ dimana warna merah pada semua sisi subgraf F_1 dan warna biru pada semua sisi subgraf F_2 . Karena graf $F = K_{1 \times t}$ maka jelas tidak ada pewarnaan merah-biru pada F . Akibatnya, $F_1 \not\supseteq P_3$ merah dan $F_2 \not\supseteq P_s$ biru. Oleh karena itu, $M_t(P_3, P_s) \geq j$ untuk $\left\lceil \frac{t \times j}{t-1} \right\rceil \leq s \leq (t \times j)$ dan $j = 2$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan $M_t(P_3, P_s) \leq j$ untuk $\left\lceil \frac{t \times j}{t-1} \right\rceil \leq s \leq (t \times j)$ dan $j = 2$. Misalkan $G = K_{j \times t}$ sedemikian sehingga G tidak memuat P_3 merah. Akan ditunjukkan bahwa $G \supseteq P_s$ biru untuk $\left\lceil \frac{t \times j}{t-1} \right\rceil \leq s \leq (t \times j)$ dan $j = 2$. Misalkan $V_1 = \{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1t}\}$ dan $V_2 = \{a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2t}\}$ adalah himpunan-himpunan partit dari G . Karena $G \not\supseteq P_3$ merah, maka $\Delta(G) = 1$ bersisi merah. Diketahui $\Delta(G) = t$ sehingga $\Delta(G) = t - 1$ bersisi biru. Karena $G \not\supseteq P_3$ merah, sebut M dimana M adalah himpunan sisi berwarna merah di G sebanyak t . Jadi komplemen dari graf G akan membentuk lintasan P_s biru di G sebanyak $(t - 1)$ titik. Sehingga $G \supseteq P_s$ untuk $\left\lceil \frac{t \times j}{t-1} \right\rceil \leq s \leq (t \times j)$ dan $j = 2$. Oleh karena itu, $M_t(P_3, P_s) = j$ untuk $\left\lceil \frac{t \times j}{t-1} \right\rceil \leq s \leq (t \times j)$ dan $j = 2$. $\square$

Teorema 3.3. $M_t(P_3, P_s) = \left\lceil \frac{s}{t} \right\rceil$ untuk $3 \leq t \leq 5$ dan $3 \leq s \leq 20$.

Bukti. Pertama-

tama akan ditunjukkan $M_t(P_3, P_s) \geq \left\lceil \frac{s}{t} \right\rceil$ untuk $3 \leq t \leq 5$ dan $7 \leq s \leq 20$. Misalkan $j = \left\lceil \frac{s}{t} \right\rceil$. Misalkan $V_1 = \{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1t}\}$, $V_2 = \{a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2t}\}, \dots$, dan $V_{j-1} = \{a_{(j-1)1}, a_{(j-1)2}, \dots, a_{(j-1)t}\}$ adalah himpunan-himpunan partit dari graf $F = K_{(j-1) \times t} \cong F_1 \oplus F_2$. Beri 2-pewarnaan merah-biru pada F sebagai berikut: warna merah pada semua sisi F_1 sebanyak $\left\lfloor \frac{(j \times t) - t}{2} \right\rfloor$ sisi agar F_1 *maximum matching* dan warna biru pada semua sisi F_2 membentuk lintasan P_s . Akibatnya, $F_1 \not\supseteq P_3$ merah dan $F_2 \not\supseteq P_s$ biru. Oleh karena itu, $M_t(P_3, P_s) \geq j$ untuk $3 \leq t \leq 5$ dan $7 \leq s \leq 20$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan $M_t(P_3, P_s) \leq j$ untuk $3 \leq t \leq 5$ dan $7 \leq s \leq 20$. Misalkan $G = K_{j \times t}$ sedemikian sehingga $G \not\supseteq P_3$ merah. Akan ditunjukkan bahwa $G \supseteq P_s$ biru. Misalkan $V_1 = \{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1t}\}$, $V_2 = \{a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2t}\}, \dots$, dan $V_j = \{a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jt}\}$ adalah himpunan partit dari G . Karena $G \not\supseteq P_3$ merah, diasumsikan G adalah membentuk *maximum matching* berwarna merah di G sebut M dimana M adalah himpunan sisi berwarna merah di G sebanyak $\left\lfloor \frac{j \times t}{2} \right\rfloor$. Jadi komplemen dari graf G akan membentuk lintasan P_s biru di G . Sehingga $G \supseteq P_s$ biru dimana nilai maksimum s yang diperoleh adalah $(j \times t)$ untuk $3 \leq t \leq 5$ dan $7 \leq s \leq 20$. Oleh karena itu, $M_t(P_3, P_s) = j$ atau $M_t(P_3, P_s) = \left\lceil \frac{s}{t} \right\rceil$ untuk $3 \leq t \leq 5$ dan $7 \leq s \leq 20$. $\square$

4. Kesimpulan

Diberikan graf P_3 dan P_s untuk $3 \leq t \leq 5$ dan $3 \leq s \leq 20$ dimana t, s bilangan bulat positif, maka bilangan Ramsey multipartit himpunan $M_t(P_3, P_s)$ sebagai berikut.

1. $\left\lceil \frac{t \times j}{t-1} \right\rceil \leq s \leq (t \times j)$ dan $j = 2$ berlaku $M_t(P_3, P_s) = j$.
2. $M_t(P_3, P_s) = \left\lceil \frac{s}{t} \right\rceil$ untuk $\left\lceil \frac{s}{t} \right\rceil \geq 3$.

5. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terimakasih kepada Bapak Narwen, M.Si, Bapak Dr. Admi Nazra, dan Bapak Dr. Dodi Devianto, yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Burger, Alewyn P dan J.H Van Vuuren.2004. Ramsey Numbers In Complete Balance Muktipartite Graphs,Part I:Set Numbers. *Discrete Math* **283**: 37 – 43.
- [2] Burger, Alewyn P dan J.H Van Vuuren.2004. Ramsey Numbers In Complete Balance Muktipartite Graphs,Part II:Size Numbers. *Discrete Math*, **283**: 45 – 49.
- [3] J.A, Bondy dan U. S. R. Murty. 1976. *Graph Theory with Application*. London: Macmillan.
- [4] Magnant, Colton dan A. Yusco. 2010. Ramsey Set Numbers In Balanced Complete Multipartite Graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* **77**: 187-196.
- [5] Ramsey, F. P. 1930. On A Problem Of Formal Logic. *Proceedings Of The London Mathematical Society*. Vol. **30**: 463 – 470.