Jurnal Matematika UNAND
Vol. **10** No. **2** Hal. 202 – 209
Edisi April 2021
ISSN : 2303–291X
e-ISSN : 2721–9410


# SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL FRAKSIONAL NONHOMOGEN

RAHMI KHAIRUN NISA, ZULAKMAL, MUHAFZAN*
*Program Studi S1 Matematika,*
*Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,*
*Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.*
*email : rahmiikhairun25@gmail.com, zulakmal@sci.unand.ac.id, muhafzan@sci.unand.ac.id*

Diterima 31 Januari 2021 Direvisi 9 Maret 2021 Dipublikasikan 29 April 2021

**Abstrak**. Dalam makalah ini diselesaikan persamaan diferensial fraksional nonhomogen untuk $\alpha \in (0, 1)$ dengan turunan tipe Caputo menggunakan metode transformasi Laplace. Beberapa contoh yang mengilustrasikan teorema utama disajikan.

*Kata Kunci*: Persamaan Diferensial Fraksional Nonhomogen, Turunan Tipe Caputo, Transformasi Laplace.

## 1. Pendahuluan

Persamaan diferensial merupakan persamaan yang memuat satu atau lebih variabel tak bebas beserta turunannya terhadap variabel-variabel bebas. Persamaan diferensial diperkenalkan pertama kali oleh Newton dan Leibniz dengan penemuannya tentang teori kalkulus. Para ilmuwan berhasil mengembangkan persamaan diferensial hingga menemukan persamaan diferensial biasa, persamaan diferensial parsial, dan persamaan diferensial fraksional.

Pada tahun 1695, L'Hopital bertanya kepada Leibniz bagaimana jika suatu persamaan diferensial memiliki orde fraksional atau pecahan. Sejak saat itu kalkulus fraksional telah menarik perhatian banyak ahli matematika seperti Euler, Laplace, Riemann,dan Liouville [2].

Persamaan diferensial fraksional merupakan persamaan diferensial yang memiliki orde fraksional atau pecahan. Bentuk umum persamaan diferensial fraksional linier diberikan sebagai berikut [7]

$$D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \cdots + a_1 D^{\alpha_1} y(t) + a_0 y(t) = g(t) \tag{1.1}$$

yang dalam hal ini $D^{\alpha_i}$, untuk $i = 1, 2, \cdots, n$, merupakan operator turunan fraksional orde $\alpha_i$ dengan $m - 1 < \alpha_i < m$, $m \in \mathbb{N}$. Salah satu operator turunan

*penulis korespondensi

fraksional yang cukup dikenal adalah operator turunan Caputo, yang definisinya dapat dilihat dalam artikel ini.

Kukla dan Urszula dalam [5] telah menyelesaikan persamaan diferensial fraksional (1.1) untuk $n = 2$. Pada artikel ini, akan dibahas solusi dari persamaan diferensial fraksional linier nonhomogen (1.1) dengan syarat awal $y(0) = y_0$ dan $\alpha_i \in (0, 1)$ untuk $i = 1, 2, \cdots, n$, menggunakan transformasi Laplace untuk n sebarang, yang dalam hal ini $D^\alpha$ adalah turunan fraksional tipe Caputo.

## 2. Landasan Teori

Beberapa teori yang terkait dengan permasalahan yang akan dibahas adalah fungsi Gamma, fungsi Mittag-Leffler, turunan fraksional tipe Caputo, dan transformasi Laplace.

**Definisi 2.1.** [7] *Fungsi Gamma yang dinotasikan dengan $\Gamma(n)$, didefinisikan sebagai berikut*

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} \; dx, \quad n > 0.$$

**Definisi 2.2.** [3] *Fungsi Mittag-Leffler satu parameter dengan parameter $\alpha$ yang dinotasikan dengan $E_\alpha$, didefinisikan sebagai berikut*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \qquad z \in \mathbb{C}, \quad \alpha > 0$$

**Definisi 2.3.** [3] *Fungsi Mittag-Leffler dua parameter dengan parameter $\alpha, \beta$ yang dinotasikan dengan $E_{\alpha,\beta}$, didefinisikan sebagai berikut*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0, \; z \in \mathbb{C}$$

Turunan ke-$m$ dari fungsi Mittag-Leffler dua parameter yang berperan penting dalam penyelesaian persamaan diferensial fraksional diberikan sebagai berikut

$$D^m E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)! z^k}{k! \Gamma(\alpha(k+m) + \beta)}. \tag{2.1}$$

**Definisi 2.4.** [6] *Turunan fractional Caputo orde $\alpha$ dari fungsi $f(t)$ terintegralkan, yang dinotasikan dengan $D^\alpha f(t)$, didefinisikan sebagai berikut*

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_0^t \frac{D^m(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}},$$

dengan $D = \frac{d}{dt}$, *dan* $m - 1 < \alpha < m$ *untuk* $m \in \mathbb{N}$.

**Definisi 2.5.** [9] *Transformasi Laplace dari suatu fungsi f(t) dinyatakan dengan F(s) atau $\mathcal{L}[f(t)]$, didefinisikan sebagai integral tak wajar berikut*

$$\mathcal{L}[f(t)] \equiv F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt. \tag{2.2}$$

*asalkan integral tersebut ada.*

**Definisi 2.6.** [8] *Konvolusi dari dua buah fungsi yang kontinu $f(t)$ dan $g(t)$ didefinisikan sebagai berikut*

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau,$$

dimana simbol * menyatakan operator konvolusi.

**Teorema 2.7.** [6] *Jika transformasi Laplace dari fungsi $f(t)$ dan $g(t)$ adalah $F(s)$ dan $G(s)$ maka*

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t-\tau)\ g(\tau)\ d\tau\right] = F(s)G(s).$$

**Teorema 2.8.** [8] *Transformasi Laplace dari turunan fractional Caputo adalah*

$$\mathcal{L}\left[D^\alpha f(t)\right] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=1}^{m} s^{(\alpha-k)} D^{k-1}(0). \tag{2.3}$$

**Teorema 2.9.** [4] *Transformasi Laplace dari fungsi $t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)$ adalah*

$$\mathcal{L}\left[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)\right] = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a},\ \alpha,\beta > 0,\ s^\alpha > |a|.$$

**Bukti.**

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)\right] &= \int_0^\infty e^{-st}t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st}t^{\beta-1}\textstyle\sum_{k=0}^\infty \dfrac{(at^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}dt \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{a^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\mathcal{L}\left[t^{\alpha k+\beta-1}\right].\end{aligned} \tag{2.4}$$

Karena $\mathcal{L}\left[t^{n-1}\right] = \frac{\Gamma(n)}{s^n}$, maka persamaan (2.4) menjadi

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)\right] &= \textstyle\sum_{k=0}^\infty \dfrac{a^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\dfrac{\Gamma(\alpha k+\beta)}{s^{\alpha k+\beta}} \\ &= \frac{1}{s^\beta}\textstyle\sum_{k=0}^\infty \left(\frac{a}{s^\alpha}\right)^k = \dfrac{1}{s^\beta}\frac{1}{1-\frac{a}{s^\alpha}} \\ &= \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a}.\end{aligned}$$

■

**Teorema 2.10.** [4] *Transformasi Laplace dari perkalian fungsi $t^{(\alpha m+\beta-1)}D^{(m)}E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)$ adalah*

$$\mathcal{L}\left[t^{(\alpha m+\beta-1)}D^{(m)}E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)\right] = \frac{m!s^{\alpha-\beta}}{(s^\alpha - a)^{m+1}},\ s^\alpha \neq a.$$

**Bukti.**

$$\mathcal{L}\left[t^{(\alpha m+\beta-1)}D^{(m)}E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)\right] = \int_0^\infty e^{-st}\ t^{(\alpha m+\beta-1)}\ D^{(m)}E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)dt.$$

Berdasarkan formula (2.1), diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[t^{(\alpha m+\beta-1)}D^{(m)}E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha})\right] &= \int_0^{\infty} e^{-st}\ t^{(\alpha m+\beta-1)}\ \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!}\frac{(at^{\alpha})^k}{\Gamma(\alpha(k+m)+\beta)}dt \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!}\frac{a^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha m+\beta)} \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st}\ t^{(\alpha k+\alpha m+\beta-1)}dt \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!}\frac{a^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha m+\beta)}\ \mathcal{L}\left[t^{(\alpha k+\alpha m+\beta-1)}\right] \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!}\frac{a^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha m+\beta)}\frac{\Gamma(\alpha k+\alpha m+\beta)}{s^{\alpha k+\alpha m+\beta}} \\
&= s^{-(\alpha m+\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!(as^{-\alpha})^k}{k!}. \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \displaystyle\frac{(k+m)!}{k!}x^k = \frac{m!}{(1-x)^{m+1}}$$

Maka persamaan (2.5) menjadi

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[t^{(\alpha m+\beta-1)}D^{(m)}E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha})\right] &= s^{-(\alpha m+\beta)}\frac{m!}{(1-as^{-\alpha})^{m+1}} \\
&= s^{-(\alpha m+\beta)}\ s^{\alpha(m+1)}\frac{m!}{(s^{\alpha}-a)^{m+1}} \\
&= \frac{m!s^{\alpha-\beta}}{(s^{\alpha}-a)^{m+1}}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Definisi 2.11.** [9] *Jika transformasi Laplace suatu fungsi f(t) adalah F(s) yang dinotasikan dengan $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, maka f(t) disebut invers transformasi Laplace dari F(s) yang dinotasikan dengan $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.*

## 3. Pembahasan

Perhatikan bentuk umum persamaan diferensial fraksional berikut

$$D^{\alpha_n}y(t) + a_{n-1}D^{\alpha_{n-1}}y(t) + \cdots + a_1D^{\alpha_1}y(t) + a_0y(t) = g(t),\ y(0) = y_0 \qquad (3.1)$$

dengan $\alpha_i \in (0,1)$ untuk $i = 1, 2, \cdots, n$, dan $g(t) \neq 0$.

Dengan menggunakan transformasi Laplace terhadap persamaan (3.1), diperoleh

$$\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[D^{\alpha_n}y(t) + a_{n-1}D^{\alpha_{n-1}}y(t) + \cdots + a_1D^{\alpha_1}y(t) + a_0y(t)]$$

$$\begin{aligned}
G(s) = s^{\alpha_n}Y(s) - s^{\alpha_n-1}y(0) + a_{n-1}\left(s^{\alpha_{n-1}}Y(s) - s^{\alpha_{n-1}-1}y(0)\right) \\
+ \cdots + a_1\left(s^{\alpha_1}Y(s) - s^{\alpha_1-1}y(0)\right) + a_0Y(s).
\end{aligned} \qquad (3.2)$$

yang dalam hal ini $G(s)$ dan $Y(s)$ masing-masing merupakan transformasi Laplace dari $g(t)$ dan $y(t)$. Dengan mensubstitusikan $y(0) = y_0$ ke persamaan (3.2), diperoleh

$$\begin{aligned}
G(s) = &\left(s^{\alpha_n} + a_{n-1}s^{\alpha_{n-1}} + \cdots + a_1s^{\alpha_1} + a_0\right)Y(s) \\
&- \left(s^{\alpha_n-1} + a_{n-1}s^{\alpha_{n-1}-1} + \cdots + a_1s^{\alpha_1-1}\right)y_0,
\end{aligned}$$

atau dapat ditulis

$$\begin{aligned} Y(s) = &\frac{\left(s^{\alpha_n - 1} + a_{n-1}s^{\alpha_{n-1}-1} + \cdots + a_1 s^{\alpha_1 - 1}\right)}{s^{\alpha_n} + a_{n-1}s^{\alpha_{n-1}} + \cdots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0}\, y_0 \\ &+ \frac{G(s)}{s^{\alpha_n} + a_{n-1}s^{\alpha_{n-1}} + \cdots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

y(t) diperoleh dengan meLaplace inverskan persamaan (3.3), yaitu

$$\begin{aligned} y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = &\mathcal{L}^{-1}\left[\tfrac{s^{\alpha_n-1} + a_{n-1}s^{\alpha_{n-1}-1} + \cdots + a_1 s^{\alpha_1-1}}{s^{\alpha_n} + a_{n-1}s^{\alpha_{n-1}} + \cdots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0} y_0\right] \\ &+ \mathcal{L}^{-1}\left[\tfrac{G(s)}{s^{\alpha_n} + a_{n-1}s^{\alpha_{n-1}} + \cdots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0}\right]. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Untuk mendapatkan invers transformasi Laplace dari suku diruas kanan, faktorkan $s^{\alpha_n} + a_{n-1}s^{\alpha_{n-1}} + \cdots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0$ menjadi pecahan-pecahan parsial. Selanjutnya dengan menggunakan invers transformasi Laplace dari Teorema (2.9) dan Teorema (2.10), maka solusi dari persamaan (3.1) dapat ditentukan.

Untuk lebih jelas, perhatikan beberapa contoh berikut ini.

**Contoh 3.1.** Tentukan solusi dari persamaan diferensial fraksional berikut

$$D^{\frac{2}{3}}y(t) + 3D^{\frac{1}{3}}y(t) + 2y(t) = e^{\frac{1}{8}t},\ \ y(0) = 1 \tag{3.5}$$

**Penyelesaian.**
Transformasi Laplace dari persamaan (3.5) adalah

$$\mathcal{L}\left[D^{\frac{2}{3}}y(t) + 3D^{\frac{1}{3}}y(t) + 2y(t)\right] = \mathcal{L}\left[e^{\frac{1}{8}t}\right]$$

$$s^{\frac{2}{3}}Y(s) - s^{-\frac{1}{3}}y(0) + 3s^{\frac{1}{3}}Y(s) - 3s^{-\frac{2}{3}}y(0) + 2Y(s) = \frac{1}{s - \frac{1}{8}}. \tag{3.6}$$

Dengan mensubstitusikan $y(0) = 1$ ke persamaan (3.6), diperoleh

$$\begin{aligned} \left(s^{\frac{2}{3}} + 3s^{\frac{1}{3}} + 2\right)Y(s) &= s^{-\frac{1}{3}} + 3s^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{s - \frac{1}{8}} \\ Y(s) &= \frac{s^{-\frac{1}{3}} + 3s^{-\frac{2}{3}}}{s^{\frac{2}{3}} + 3s^{\frac{1}{3}} + 2} + \frac{1}{(s^{\frac{2}{3}} + 3s^{\frac{1}{3}} + 2)(s - \frac{1}{8})}. \end{aligned}$$

atau dapat ditulis menjadi

$$Y(s) = \frac{s^{-\frac{1}{3}} + 3s^{-\frac{2}{3}}}{(s^{\frac{1}{3}} + 1)(s^{\frac{1}{3}} + 2)} + \frac{1}{(s^{\frac{1}{3}} + 1)(s^{\frac{1}{3}} + 2)(s - \frac{1}{8})}. \tag{3.7}$$

Perhatikan bahwa

$$\frac{1}{(s^{\frac{1}{3}} + 1)(s^{\frac{1}{3}} + 2)} = \frac{1}{s^{\frac{1}{3}} + 1} - \frac{1}{s^{\frac{1}{3}} + 2}$$

dan

$$\frac{1}{(s^{\frac{1}{3}} + 1)(s^{\frac{1}{3}} + 2)(s - \frac{1}{8})} = \frac{1800/151}{s^{\frac{1}{3}} + 1} - \frac{1096/151}{s^{\frac{1}{3}} + 2} - \frac{16/3}{s^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}}$$

$$+\frac{(152-72\sqrt{3}i)/453}{s^{\frac{1}{3}}+\frac{1-\sqrt{3}i}{4}}+\frac{(152+72\sqrt{3}i)/453}{s^{\frac{1}{3}}+\frac{1+\sqrt{3}i}{4}}.$$

Sehingga persamaan (3.7) menjadi

$$\begin{aligned}Y(s) &= s^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{s^{\frac{1}{3}}+1}-\frac{1}{s^{\frac{1}{3}}+2}\right)+3s^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{s^{\frac{1}{3}}+1}-\frac{1}{s^{\frac{1}{3}}+2}\right)+\frac{1800/151}{s^{\frac{1}{3}}+1}\\ &-\frac{1096/151}{s^{\frac{1}{3}}+2}-\frac{16/3}{s^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}}+\frac{(152-72\sqrt{3}i)/453}{s^{\frac{1}{3}}+\frac{1-\sqrt{3}i}{4}}+\frac{(152+72\sqrt{3}i)/453}{s^{\frac{1}{3}}+\frac{1+\sqrt{3}i}{4}}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Karena penyebut dari suku di ruas kanan persamaan (3.8) berpangkat 1, maka dengan menggunakan invers transformasi Laplace dari Teorema (2.9) terhadap persamaan (3.8), diperoleh solusi persamaan (3.5) yaitu

$$\begin{aligned}y(t) &= t^{-\frac{1}{3}}E_{\frac{1}{3},\frac{2}{3}}\left(-t^{\frac{1}{3}}\right)-t^{-\frac{1}{3}}E_{\frac{1}{3},\frac{2}{3}}\left(-2t^{\frac{1}{3}}\right)+3E_{\frac{1}{3},1}\left(-t^{\frac{1}{3}}\right)-3E_{\frac{1}{3},1}\left(-2t^{\frac{1}{3}}\right)\\ &+\tfrac{1800}{151}t^{-\frac{2}{3}}E_{\frac{1}{3},\frac{1}{3}}\left(-t^{\frac{1}{3}}\right)-\tfrac{1096}{151}t^{-\frac{2}{3}}E_{\frac{1}{3},\frac{1}{3}}\left(-2t^{\frac{1}{3}}\right)-\tfrac{16}{3}t^{-\frac{2}{3}}E_{\frac{1}{3},\frac{1}{3}}\left(\tfrac{1}{2}t^{\frac{1}{3}}\right)\\ &+\tfrac{152-72\sqrt{3}i}{453}\,t^{-\frac{2}{3}}E_{\frac{1}{3},\frac{1}{3}}\left(\tfrac{-1+\sqrt{3}i}{4}t^{\frac{1}{3}}\right)+\tfrac{152+72\sqrt{3}i}{453}\,t^{-\frac{2}{3}}E_{\frac{1}{3},\frac{1}{3}}\left(\tfrac{-1-\sqrt{3}i}{4}t^{\frac{1}{3}}\right).\end{aligned}$$

**Contoh 3.2.** Tentukan solusi dari persamaan diferensial fraksional berikut

$$D^{\frac{5}{6}}y(t)+D^{\frac{1}{2}}y(t)-\frac{1}{8}D^{\frac{1}{3}}y(t)+\frac{1}{8}y(t)=t,\ y(0)=1 \tag{3.9}$$

**Penyelesaian.**
Transformasi Laplace dari persamaan (3.9) adalah

$$\mathcal{L}[t]=\mathcal{L}\left[D^{\frac{5}{6}}y(t)+D^{\frac{1}{2}}y(t)-\tfrac{1}{8}D^{\frac{1}{3}}y(t)+\tfrac{1}{8}y(t)\right]$$

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{s^2} &= s^{\frac{5}{6}}Y(s)-s^{-\frac{1}{6}}y(0)+\left(s^{\frac{1}{2}}Y(s)-s^{-\frac{1}{2}}y(0)\right)\\ &-\tfrac{1}{8}\left(s^{\frac{1}{3}}Y(s)-s^{-\frac{2}{3}}y(0)\right)-\tfrac{1}{8}Y(s).\end{aligned} \tag{3.10}$$

Dengan mensubstitusikan $y(0)=1$ ke persamaan (3.10), diperoleh

$$s^{-\frac{1}{6}}+s^{-\frac{1}{2}}-\tfrac{1}{8}s^{-\frac{2}{3}}+s^{-2}=\left(s^{\frac{5}{6}}+s^{\frac{1}{2}}-\tfrac{1}{8}s^{\frac{1}{3}}-\tfrac{1}{8}\right)Y(s)$$

$$Y(s)=\frac{s^{-\frac{1}{6}}+s^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}s^{-\frac{2}{3}}+s^{-2}}{s^{\frac{5}{6}}+s^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}s^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{8}}$$

atau dapat ditulis menjadi

$$Y(s)=\frac{s^{-\frac{1}{6}}+s^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}s^{-\frac{2}{3}}+s^{-2}}{(s^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{8})(s^{\frac{1}{3}}+1)}. \tag{3.11}$$

Perhatikan bahwa

$$\frac{1}{(s^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{8})(s^{\frac{1}{3}}+1)}=\frac{16/15}{s^{\frac{1}{6}}-\dfrac{1}{2}}-\frac{(40-24\sqrt{3}i)/39}{s^{\frac{1}{6}}+\dfrac{1-\sqrt{3}i}{4}}-\frac{(40+24\sqrt{3}i)/39}{s^{\frac{1}{6}}+\dfrac{1+\sqrt{3}i}{4}}$$

$$+\frac{(32-4i)/65}{s^{\frac{1}{6}}+i}+\frac{(32+4i)/65}{s^{\frac{1}{6}}-i}.$$

Sehingga persamaan (3.11) menjadi

$$\begin{aligned} Y(s) = s^{-\frac{1}{6}}\Bigg( & \frac{16/15}{s^{\frac{1}{6}}-\frac{1}{2}} - \frac{(40-24\sqrt{3}i)/39}{s^{\frac{1}{6}}+\frac{1-\sqrt{3}i}{4}} - \frac{(40+24\sqrt{3}i)/39}{s^{\frac{1}{6}}+\frac{1+\sqrt{3}i}{4}} + \frac{(32-4i)/65}{s^{\frac{1}{6}}+i} \\ & + \frac{(32+4i)/65}{s^{\frac{1}{6}}-i}\Bigg) + s^{-\frac{1}{2}}\Bigg(\frac{16/15}{s^{\frac{1}{6}}-\frac{1}{2}} - \frac{(40-24\sqrt{3}i)/39}{s^{\frac{1}{6}}+\frac{1-\sqrt{3}i}{4}} - \frac{(40+24\sqrt{3}i)/39}{s^{\frac{1}{6}}+\frac{1+\sqrt{3}i}{4}} \\ & + \frac{(32-4i)/65}{s^{\frac{1}{6}}+i} + \frac{(32+4i)/65}{s^{\frac{1}{6}}-i}\Bigg) - \frac{1}{8}s^{-\frac{2}{3}}\Bigg(\frac{16/15}{s^{\frac{1}{6}}-\frac{1}{2}} - \frac{(40-24\sqrt{3}i)/39}{s^{\frac{1}{6}}+\frac{1-\sqrt{3}i}{4}} \\ & - \frac{(40+24\sqrt{3}i)/39}{s^{\frac{1}{6}}+\frac{1+\sqrt{3}i}{4}} + \frac{(32-4i)/65}{s^{\frac{1}{6}}+i} + \frac{(32+4i)/65}{s^{\frac{1}{6}}-i}\Bigg) + s^{-2}\Bigg(\frac{16/15}{s^{\frac{1}{6}}-\frac{1}{2}} \\ & - \frac{(40-24\sqrt{3}i)/39}{s^{\frac{1}{6}}+\frac{1-\sqrt{3}i}{4}} - \frac{(40+24\sqrt{3}i)/39}{s^{\frac{1}{6}}+\frac{1+\sqrt{3}i}{4}} + \frac{(32-4i)/65}{s^{\frac{1}{6}}+i} + \frac{(32+4i)/65}{s^{\frac{1}{6}}-i}\Bigg). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Karena penyebut dari suku-suku di ruas kanan persamaan (3.12) berpangkat 1, maka dengan menggunakan invers transformasi Laplace dari Teorema (2.9) terhadap persamaan (3.12), diperoleh solusi persamaan (3.9) yaitu

$$\begin{aligned} y(t) = \Bigg[ & \tfrac{16}{15}t^{-\frac{2}{3}}E_{\frac{1}{6},\frac{1}{3}}\left(\tfrac{1}{2}t^{\frac{1}{6}}\right) - \tfrac{40-24\sqrt{3}i}{39}t^{-\frac{2}{3}}E_{\frac{1}{6},\frac{1}{3}}\left((\tfrac{-1+\sqrt{3}i}{4})t^{\frac{1}{6}}\right) \\ & - \tfrac{40+24\sqrt{3}i}{39}t^{-\frac{2}{3}}E_{\frac{1}{6},\frac{1}{3}}\left((\tfrac{-1-\sqrt{3}i}{4})t^{\frac{1}{6}}\right) + \tfrac{32-4i}{65}t^{-\frac{2}{3}}E_{\frac{1}{6},\frac{1}{3}}(-it^{\frac{1}{6}}) \\ & + \tfrac{32+4i}{65}t^{-\frac{2}{3}}E_{\frac{1}{6},\frac{1}{3}}(it^{\frac{1}{6}})\Bigg] + \Bigg[\tfrac{16}{15}t^{-\frac{1}{3}}E_{\frac{1}{6},\frac{2}{3}}\left(\tfrac{1}{2}t^{\frac{1}{6}}\right) \\ & - \tfrac{40-24\sqrt{3}i}{39}\ t^{-\frac{1}{3}}E_{\frac{1}{6},\frac{2}{3}}\left((\tfrac{-1+\sqrt{3}i}{4})t^{\frac{1}{6}}\right) - \tfrac{40+24\sqrt{3}i}{39}\ t^{-\frac{1}{3}}E_{\frac{1}{6},\frac{2}{3}}\left((\tfrac{-1-\sqrt{3}i}{4})t^{\frac{1}{6}}\right) \\ & + \tfrac{32-4i}{65}\ t^{-\frac{1}{3}}E_{\frac{1}{6},\frac{2}{3}}(-it^{\frac{1}{6}}) + \tfrac{32+4i}{65}\ t^{-\frac{1}{3}}E_{\frac{1}{6},\frac{2}{3}}(it^{\frac{1}{6}})\Bigg] - \Bigg[\tfrac{2}{15}\ t^{-\frac{1}{6}}E_{\frac{1}{6},\frac{5}{6}}\left(\tfrac{1}{2}t^{\frac{1}{6}}\right) \\ & - \tfrac{5-3\sqrt{3}i}{39}\ t^{-\frac{1}{6}}E_{\frac{1}{6},\frac{5}{6}}\left((\tfrac{-1+\sqrt{3}i}{4})t^{\frac{1}{6}}\right) - \tfrac{5+3\sqrt{3}i}{39}\ t^{-\frac{1}{6}}E_{\frac{1}{6},\frac{5}{6}}\left((\tfrac{-1-\sqrt{3}i}{4})t^{\frac{1}{6}}\right) \\ & + \tfrac{8-i}{130}\ t^{-\frac{1}{6}}E_{\frac{1}{6},\frac{5}{6}}(-it^{\frac{1}{6}}) + \tfrac{8+i}{130}\ t^{-\frac{1}{6}}E_{\frac{1}{6},\frac{5}{6}}(it^{\frac{1}{6}})\Bigg] + \Bigg[\tfrac{16}{15}\ t^{\frac{7}{6}}E_{\frac{1}{6},\frac{13}{6}}\left(\tfrac{1}{2}t^{\frac{1}{6}}\right) \\ & - \tfrac{40-24\sqrt{3}i}{39}\ t^{\frac{7}{6}}E_{\frac{1}{6},\frac{13}{6}}\left((\tfrac{-1+\sqrt{3}i}{4})t^{\frac{1}{6}}\right) - \tfrac{40+24\sqrt{3}i}{39}\ t^{\frac{7}{6}}E_{\frac{1}{6},\frac{13}{6}}\left((\tfrac{-1-\sqrt{3}i}{4})t^{\frac{1}{6}}\right) \\ & + \tfrac{32-4i}{65}\ t^{\frac{7}{6}}E_{\frac{1}{6},\frac{13}{6}}(-it^{\frac{1}{6}}) + \tfrac{32+4i}{65}\ t^{\frac{7}{6}}E_{\frac{1}{6},\frac{13}{6}}(it^{\frac{1}{6}})\Bigg]. \end{aligned}$$

## 4. Kesimpulan

Solusi persamaan diferensial fraksional dengan bentuk

$$D^{\alpha_n}y(t)+a_{n-1}D^{\alpha_{n-1}}y(t)+\cdots+a_1D^{\alpha_1}y(t)+a_0y(t)=g(t),\ y(0)=y_0$$

dengan $\alpha_i \in (0,1)$ untuk $i = 1, 2, \cdots, n$, $g(t) \neq 0$, dan $D^\alpha$ merupakan operator turunan tipe Caputo adalah:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha_n - 1} + a_{n-1}s^{\alpha_{n-1}-1} + \cdots + a_1 s^{\alpha_1 - 1}}{s^{\alpha_n} + a_{n-1}s^{\alpha_{n-1}} + \cdots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0} y_0\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{G(s)}{s^{\alpha_n} + a_{n-1}s^{\alpha_{n-1}} + \cdots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0}\right].$$

## 5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Muhafzan, Ibu Susila Bahri, Ibu Ferra Yanuar, dan Bapak Narwen yang telah memberikan masukan dan saran dalam penyempurnaan penulisan artikel ini.

## Daftar Pustaka

[1] Bartle. R. G dan Donald. R. Sherbert., 2010. *Introduction to Real Analysis, Fourth Edition*. John Wiley and Sons, USA.
[2] Caponetto. R, Giovanni. D, Luigi. F dan Ivo. P. 2010. *Fractional Order Systems Modeling and Control Applications*. World Scientific Publishing, Singapore.
[3] Fallahgoul. A, Sergio. Focardi, Frank. Fabozzi. 2017. *Fractional Calculus and Fractional Processes with Applications to Financial Economics*. Academic Press, Australia.
[4] Kilbas. A, Hari. M, Juan. J. 2006. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier BV. Netherlands.
[5] Kukla. Stanislaw dan Urszula. Siedlecka. 2020. *On Solutions of the Initial Value Problem for the Three Term Fractional Differential Equation with Caputo Derivatives*. MDPI. Switzerland.
[6] Milici. Constantin, Gheorghe. D, J. Tanreiro. 2019. *Introduction to Fractional Differential Equations*. Springer, Switzerland.
[7] Podlubny. I. 1999. *An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of their Solution and some of their Applications*. Academic Press. USA.
[8] Schiff, J. L. 1999. *The Laplace Transform*. Springer-Verlag, New York.
[9] Spiegel, M. R. 1999. *Laplace Transforms*. McGraw-Hill inc. USA.