Jurnal Matematika UNAND
Vol. **11** No. **1** Hal. 25 – 31
Edisi Januari 2022
ISSN : 2303–291X
e-ISSN : 2721–9410
©Jurusan Matematika FMIPA UNAND

BILANGAN RAMSEY MULTIPARTIT HIMPUNAN UNTUK KOMBINASI GRAF LINTASAN P_3 DENGAN GRAF POHON

ASYRAF MARDHIYAH*, EFFENDI, SYAFRIZAL SY

Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang 25163, Indonesia
email : matsuyama97jpg.am@gmail.com, syafrizalsy@sci.unand.ac.id

Diterima 24 September 2021 Direvisi 16 Maret 2022 Dipublikasikan 7 April 2022

Abstrak. Misalkan $K_{k\times j}$ adalah suatu graf multipartit seimbang lengkap yang terdiri dari k himpunan partit, dimana setiap partit memuat j titik, dan setiap titik bertetangga kecuali pada himpunan partit yang sama. Misalkan $j \geq 2$ adalah bilangan asli. Untuk graf G dan H, bilangan Ramsey multipartit himpunan $M_j(G, H)$ adalah bilangan asli terkecil p sedemikian sehingga setiap pewarnaan merah-biru pada sisi-sisi $K_{k\times j}$ senantiasa menyebabkan terdapat G berwarna merah atau H bewarna biru sebagai subgraf dari $K_{k\times j}$. Dalam tulisan ini, akan ditentukan bilangan Ramsey multipartit himpunan $M_j(G, H)$ dimana G adalah graf lintasan P_3 dan H adalah graf pohon T_n, untuk $n \geq 2$.

Kata Kunci: bilangan Ramsey multipartit himpunan, graf multipartit seimbang lengkap, lintasan, pohon

1. Pendahuluan

Bilangan Ramsey multipartit himpunan $M_j(P_3, T_n)$ menjadi salah satu topik kajian bilangan Ramsey multipartit yang menarik untuk dikaji. Penentuan bilangan Ramsey multipartit himpunan $M_j(P_3, T_n)$ menggunakan definisi graf pohon, dimana graf pohon T_n adalah suatu graf terhubung dengan n titik yang tidak memuat siklus *acyclic*. Pada penelitian ini akan dikaji tentang penentuan bilangan Ramsey multipartit himpunan untuk kombinasi graf lintasan P_3 dan graf pohon. Definisi bilangan Ramsey multipartit himpunan diberikan oleh Burger dan Vuuren (2004) dalam [1] dan [2].

2. Landasan Teori

Definisi dalam teori graf yang digunakan dalam artikel ini diambil dari Bondy [3]. Graf $G = (V(G), E(G))$ adalah suatu struktur yang memuat himpunan titik $V(G)$

*penulis korespondensi

dan himpunan sisi $E(G)$. Misalkan $e = uv$ adalah sisi di G, maka u dan v disebut terkait pada sisi e, dan u disebut bertetangga dengan v. Derajat minimum $\delta(G)$ adalah banyaknya sisi minimal yang terkait dengan titik v di G. Derajat maksimum $\Delta(G)$ adalah banyaknya sisi maksimal yang terkait dengan titik v di G. Faktorisasi dari suatu graf G dinotasikan dengan $G \cong G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_k$ merupakan suatu himpunan tak kosong yang berisikan subgraf-subgraf $G_1, G_2, \cdots, G_k$ sedemikian sehingga $V(G_i) = V(G_j)$ dan $E(G_i) \cap E(G_j) =$ dan untuk $i \neq j$ dan $i, j \in 1, 2, \cdots, k$.

Suatu *matching* M pada graf G adalah himpunan sisi-sisi di G yang saling lepas, yaitu tidak ada lebih dari satu sisi yang terkait dengan satu titik di G, sedemikian sehingga $M \subseteq E(G)$. M dikatakan *matching* sempurna jika setiap titik pada graf G terkait dengan tepat satu sisi di M. Suatu *matching* M dikatakan *matching* maksimal jika tidak dapat diperluas menjadi matching yang lebih dari M.

Graf lintasan P_n adalah suatu graf terhubung dengan n titik dan panjang $n-1$. Graf pohon T_n adalah suatu graf terhubung dengan n titik yang *acyclic*. Graf multipartit seimbang lengkap $K_{s\times t}$ adalah graf yang terdiri dari s himpunan partit yang setiap partit memuat t titik, setiap titik bertetangga kecuali pada himpunan partit yang sama.

Burger dan Vuuren (2004) mendefinisikan bilangan Ramsey multipartit himpunan sebagai berikut:

Definisi 2.1. [2] *Misalkan j,l,n,s, dan t adalah bilangan bulat positif dengan* $n, s \geq 2$. *Bilangan Ramsey multipartit himpunan* $M_j(K_{n\times l}, K_{s\times t})$ *adalah bilangan asli terkecil k sedemikian sehingga jika semua sisi dari graf multipartit seimbang lengkap* $K_{k\times j}$ *diberi warna merah atau biru maka graf multipartit seimbang lengkap* $K_{k\times j}$ *akan memuat* $K_{n\times l}$ *merah atau* $K_{s\times t}$ *biru sebagai subgraf.*

Definisi 2.1 kemudian diformulasikan dalam bentuk faktorisasi, sebagai berikut:

Definisi 2.2. [8] *Diberikan dua graf G dan H dan bilangan asli j. Bilangan Ramsey multipartit himpunan* $M_j(G, H)$ *adalah bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga untuk sebarang faktorisasi* $K_{k\times j} \cong F_1 \oplus F_2$ *senantiasa* F_1 *memuat subgraf G atau* F_2 *memuat subgraf H.*

Ide dari kajian bilangan Ramsey multipartit himpunan $M_j(G, H)$ adalah dengan memberikan banyak titik yang tetap dari setiap himpunan partit dalam graf domainnya, kemudian mencari minimum dari banyaknya himpunan partit sehingga graf domain tersebut akan memuat subgraf multipartit monokromatik.

3. Pembahasan

Berikut pemaparan teorema dari bilangan Ramsey multipartit himpunan $M_j(P_3, T_n)$ untuk $j \geq 3$ dan $n \geq 2$.

Teorema 3.1. *Untuk* $n \geq 2$ *dan* $j \geq 3$, $M_j(P_3, T_n) = 2$.

Bukti. Pertama-tama akan ditunjukkan bahwa $M_j(P_3, T_n) \geq 2$. Perhatikan suatu faktorisasi graf $F = K_{(2-1)\times j} \cong F_1 \oplus F_2$. Akan ditunjukkan bahwa F_1 tidak memuat

P_3 dan F_2 tidak memuat T_n dengan $n \geq 2$. Perhatikan bahwa $K_{2-1\times j}$ merupakan graf dengan satu partit yang memuat j titik, sehingga $K_{1\times j}$ tidak memiliki sisi. Jelas bahwa F_1 tidak memuat P_3 dan F_2 tidak memuat T_n. Oleh karena itu $M_j(P_3, T_n) \geq 2$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $M_j(P_3, T_n) \leq 2$. Misalkan $G_1 \oplus G_2$ adalah sebarang faktorisasi dari $G = K_{2\times j}$ sedemikian sehingga G_1 tidak memuat P_3. Akan ditunjukkan bahwa $G_2 \supseteq T_n$. Karena $\mid V(K_{2\times j}) \mid = 2j$ dan $2j$ bernilai genap maka G_1 memuat *matching* sempurna. Selanjutnya akan ditunjukkan G_2 memuat T_n. Karena $\delta(G_2) = 2$ maka minimal terdapat T_n dengan $n \geq 2$. Ambil satu titik sebarang pada V_1 sehingga derajat terbesar $\triangle(G_2) = j - 1$, maka terdapat T_n dengan $n = j$. Selanjutnya hubungkan titik-titik di V_1 kecuali satu titik yang telah diambil, ke sebarang titik di V_2. Akan diperoleh tambahan T_n dengan $n = j$. Total keseluruhan T_n yang diperoleh $n = 2j$, terbukti bahwa G_2 memuat T_n dengan $n \geq 2$. Oleh karena itu, $M_j(P_3, T_n) = 2$. □

Teorema 3.2. *Untuk $n \geq 7$, $M_3(P_3, T_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.*

Bukti. Pertama-tama, akan ditunjukkan bahwa $M_3(P_3, T_n) \geq \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Misalkan $k = \lceil \frac{n}{3} \rceil$, perhatikan suatu faktorisasi graf $F = K_{(k-1)\times 3} \cong F_1 \oplus F_2$. Akan ditunjukkan bahwa F_1 tidak memuat P_3 dan F_2 tidak memuat T_n. Jika k genap maka F_1 memuat *matching* maksimal sehingga F_1 tidak memuat P_3. Jika k ganjil maka F_1 memuat *matching* sempurna sehingga F_1 tidak memuat P_3.

Diketahui bahwa $\frac{n}{3} \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil < \frac{n}{3} + 1$, maka $\left(\lceil \frac{n}{3} \rceil - 1\right) \times 3 < \left(\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1 - 1\right) \times 3$. Karena $\frac{n}{3} \times 3 = n$ maka $\left(\lceil \frac{n}{3} \rceil - 1\right) \times 3 < n$. Perhatikan bahwa $\left|V(K_{(k-1)\times 3})\right| = (k-1) \times 3 = \left(\lceil \frac{n}{3} \rceil - 1\right) \times 3 < n$. Jelas bahwa $K_{(k-1)\times 3}$ tidak memuat T_n dengan $n > (k-1) \times 3$. Oleh karena itu $M_3(P_3, T_n) \geq \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $M_3(P_3, T_n) \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Misalkan $G_1 \oplus G_2$ adalah sebarang faktorisasi dari $G = K_{k\times 3}$ sedemikian sehingga G_1 tidak memuat P_3. Akan ditunjukkan bahwa $G_2 \supseteq T_n$. Misalkan $V_i = \{v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}\}$ untuk $i = 1, 2, \cdots, \lceil \frac{n}{3} \rceil$ adalah himpunan-himpunan partit di G. Karena G_1 tidak memuat P_3, maka haruslah $\Delta(G_1) \leq 1$. Perhatikan beberapa kasus berikut.

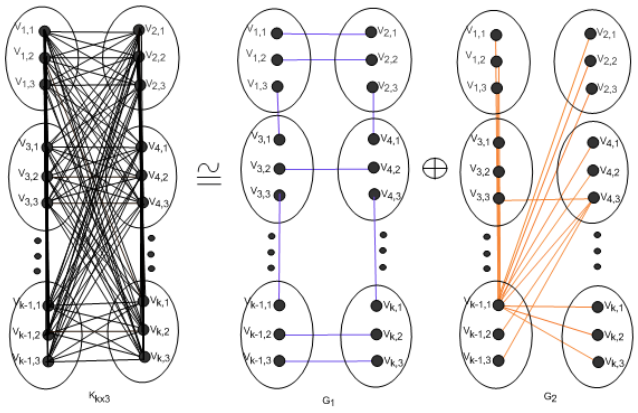
Kasus 1. k ganjil.

Karena k ganjil maka 3k ganjil, akibatnya G_1 *matching* maksimal sehingga G_1 tidak memuat P_3. Karena G_1 *matching* maksimal maka terdapat satu titik di V_1 yang memiliki derajat terbesar di G_2 dengan $\triangle(G_2) = 3(k-1)$, maka diperoleh T_n dengan $n = 3(k-1) + 1$. Selanjutnya hubungkan titik-titik di V_1 kecuali titik yang berderajat terbesar ke sebarang titik di $V_2, V_3, \ldots, V_k$ maka akan diperoleh tambahan T_n dengan $n = 2$, jadi dari keseluruhan T_n yang diperoleh pada G_2 yaitu $n = 3(k-1) + 1 + 2 = 3k$ karena $3k = 3\lceil \frac{n}{3} \rceil = n$. Terbukti bahwa G_2 memuat T_n (lihat pada Gambar 1).

Kasus 2. k genap.

Karena k genap maka 3k genap, akibatnya G_1 memuat *matching* sempurna sehingga

G_1 tidak memuat P_3. Selanjutnya akan ditunjukkan G_2 memuat T_n, ambil sebarang titik pada V_1 sehingga derajat terbesar $\triangle(G_2) = 3(k-1)-1$, maka terdapat T_n dengan $n = 3(k-1)$. Selanjutnya hubungkan titik-titik di V_1 selain titik yang telah di ambil ke sebarang titik di $V_2, V_3, \ldots, V_k$ maka akan diperoleh tambahan T_n dengan $n = 3$. Total keseluruhan T_n yang diperoleh $n = 3(k-1)+3 = 3k$ karena $3k = 3\lceil\frac{n}{3}\rceil = n$. Terbukti bahwa G_2 memuat T_n (lihat pada Gambar 1).



Gambar 1. Graf G_1 *matching* sempurna dan $G_2 \supseteq T_n$.

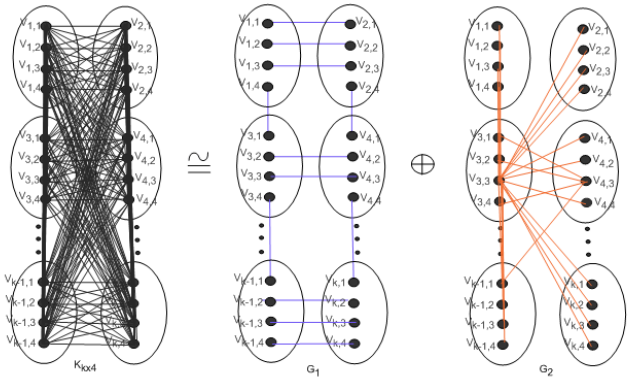
Oleh karena itu, $M_3(P_3, T_n) = \lceil\frac{n}{3}\rceil$ untuk $n \geq 7$. □

Teorema 3.3. *Untuk* $n \geq 9$, $M_4(P_3, T_n) = \lceil\frac{n}{4}\rceil$.

Bukti. Pertama akan ditunjukkan bahwa $M_4(P_3, T_n) \geq \lceil\frac{n}{4}\rceil$. Misal $k = \lceil\frac{n}{4}\rceil$ dan $F_1 \oplus F_2$ adalah sebarang faktorisasi graf $F = K_{(k-1)\times 4}$. Akan ditunjukkan bahwa F_1 tidak memuat P_3 dan F_2 tidak memuat T_n. Perhatikan $|V(K_{(k-1)\times 4})| = (k-1)\times 4$, karena $(k-1)\times 4$ genap maka F_1 memuat *matching* sempurna sehingga F_1 tidak memuat P_3. Diketahui bahwa $\frac{n}{4} \leq \lceil\frac{n}{4}\rceil < \frac{n}{4}+1$ maka $\left(\lceil\frac{n}{4}\rceil-1\right)\times 4 < \left(\lceil\frac{n}{4}\rceil+1-1\right)\times 4$. Karena $\frac{n}{4}\times 4 = n$ maka $(\lceil\frac{n}{4}\rceil-1)\times 4 < n$. Perhatikan $|\, V(K_{k-1\times 4})\,| = (k-1)\times 4 = (\lceil\frac{n}{4}\rceil - 1)\times 4 < n$ maka $K_{(k-1)\times 4}$ tidak memuat T_n dengan $n > (k-1)\times 4$. Oleh karena itu $M_4(P_3, T_n) \geq \lceil\frac{n}{4}\rceil$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan $M_4(P_3, T_n) \leq \lceil\frac{n}{4}\rceil$. Misalkan $G_1 \oplus G_2$ adalah sebarang faktorisasi dari $G = K_{k\times 4}$ sedemikian sehingga G_1 tidak memuat P_3, akan ditunjukkan $G_2 \supseteq T_n$. Misalkan $V_i = \{v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}, v_{i,4}\}$ untuk $i = 1, 2, \cdots, \lceil\frac{n}{4}\rceil$ adalah himpunan-himpunan partit di G. Perhatikan $|V(K_{k\times 4})| = k \times 4$ dan $4k$ genap maka G_1 memuat *matching* sempurna sehingga G_1 tidak memuat P_3. Akan ditunjukkan G_2 memuat T_n, ambil sebarang titik pada V_1 sehingga derajat terbesar

$\triangle(G_2) = 4(k-1)-1$ maka terdapat T_n dengan $n = 4(k-1)-1+1 = 4(k-1)$. Selanjutnya hubungkan titik-titik di V_1 selain titik yang diambil, ke sebarang titik di $V_2, V_3, \cdots, V_k$ maka akan diperoleh tambahan T_n dengan $n = 4$. Total keseluruhan T_n yang diperoleh $n = 4(k-1)+4 = 4k$ karena $4k = 4\lceil\frac{n}{4}\rceil = n$. Terbukti bahwa G_2 memuat T_n (lihat pada Gambar 2).



Gambar 2. Graf G_1 *matching* sempurna dan $G_2 \supseteq T_n$.

□

Teorema 3.4. *Untuk $n \geq 7$ dan $j \geq 3$, $M_j(P_3, T_n) = \lceil\frac{n}{j}\rceil$.*

Bukti. Pertama-tama akan ditunjukkan bahwa $M_j(P_3, T_n) \geq \lceil\frac{n}{j}\rceil$. Misalkan $k = \lceil\frac{n}{j}\rceil$. Perhatikan suatu faktorisasi graf $F = K_{(k-1)\times j} \cong F_1 \oplus F_2$. Akan ditunjukkan bahwa F_1 tidak memuat P_3 dan F_2 tidak memuat T_n. Untuk jk genap, G_1 memuat *matching* sempurna sehingga G_1 tidak memuat P_3. Untuk jk ganjil, G_1 memuat *matching* maksimum sehingga G_1 tidak memuat P_3. Diketahui bahwa $\frac{n}{j} \leq \lceil\frac{n}{j}\rceil < \frac{n}{j}+1$ maka $\left(\lceil\frac{n}{j}\rceil-1\right)\times j < \left(\lceil\frac{n}{j}\rceil+1-1\right)\times j$. Karena $\frac{n}{j}\times j = n$ maka $\left(\lceil\frac{n}{j}\rceil-1\right)\times j < n$. Perhatikan $|\, V(K_{\lceil\frac{n}{j}\rceil-1\times j}) \,| = (k-1)\times j = (\lceil\frac{n}{j}\rceil - 1)\times j < n$ maka $K_{(k-1)\times j}$ tidak memuat T_n dengan $n > (k-1)\times j$. Oleh karena itu $M_j(P_3, T_n) \geq \lceil\frac{n}{j}\rceil$.

Selanjutnya /akan ditunjukkan $M_j(P_3, T_n) \leq \lceil\frac{n}{j}\rceil$. Misalkan $G_1 \oplus G_2$ adalah sebarang faktorisasi dari $G = K_{k\times j}$ sedemikian sehingga G_1 tidak memuat P_3, akan ditunjukkan $G_2 \supseteq T_n$. Misalkan $V_i = \{v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}, \ldots, v_{i,j}\}$ untuk $i = 1, 2, \cdots, \lceil\frac{n}{j}\rceil$ adalah himpunan-himpunan partit di G. Karena G_1 tidak memuat P_3, maka $\Delta(G_1) \leq 1$.

Kasus 1. j ganjil.

SubKasus 1.1 k ganjil.

Karena k ganjil maka jk bernilai ganjil, akibatnya G_1 *matching* maksimal sehingga G_1 tidak memuat P_3. Karena G_1 tidak memuat P_3 akan ditunjukkan G_2 memuat T_n. G_1 *matching* maksimal maka terdapat satu titik di V_1 yang memiliki derajat terbesar di G_2 dengan $\triangle(G_2) = j(k-1)$ maka diperoleh T_n dengan $n = j(k-1)+1$. Selanjutnya hubungkan titik-titik di V_1, selain titik yang berderajat terbesar, ke sebarang titik di $V_2, V_3, \cdots, V_k$. Maka akan diperoleh tambahan T_n dengan $n = j-1$. Total keseluruhan T_n yang diperoleh adalah $n = j(k-1)+1+(j-1) = jk$ karena $jk = j\lceil\frac{n}{j}\rceil = n$ maka terbukti bahwa G_2 memuat T_n.

SubKasus 1.2 k genap.

Karena k genap maka jk bernilai genap, akibatnya G_1 memuat *matching* sempurna sehingga G_1 tidak memuat P_3, akan ditunjukkan G_2 memuat T_n. Ambil satu titik sebarang pada V_1 sehingga berderajat terbesar di G_2 dengan $\triangle(G_2) = j(k-1)-1$, maka terdapat T_n dengan $n = j(k-1)$. Selanjutnya hubungkan titik-titik di V_1 selain titik yang diambil ke sebarang titik di $V_2, V_3, \cdots, V_k$. Maka diperoleh tambahan T_n dengan $n = j$. Total keseluruhan T_n yang diperoleh adalah $n = j(k-1)+j = jk$ karena $jk = j\lceil\frac{n}{j}\rceil = n$. Terbukti bahwa G_2 memuat T_n.

Kasus 2. j genap.

Karena jk genap akibatnya G_1 memuat *matching* sempurna sehingga G_1 tidak memuat P_3, maka $\Delta(G_1) \leq 1$. Akan ditunjukkan G_2 memuat T_n, ambil sebarang titik pada V_1 sehingga derajat terbesar $\triangle(G_2) = j(k-1)-1$, terdapat T_n dengan $n = j(k-1)-1+1 = j(k-1)$. Selanjutnya hubungkan titik-titik di V_1 selain titik berderajat terbesar ke sebarang titik di $V_2, V_3, \cdots, V_k$. Maka akan diperoleh tambahan T_n dengan $n = j$. Total keseluruhan T_n yang diperoleh adalah $n = j(k-1)+j = jk$ karena $jk = j\lceil\frac{n}{j}\rceil = n$. Terbukti bahwa G_2 memuat T_n.

Oleh karena itu, $M_j(P_3, T_n) = \lceil\frac{n}{j}\rceil$ untuk $n \geq 7$ dan $j \geq 3$. □

4. Kesimpulan

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa untuk $n \geq 2$ dan $j \geq 3$, berlaku:

$$M_j(P_3, T_n) = \begin{cases} 2, & n \geq 2, j \geq 3, \\ \lceil\frac{n}{j}\rceil, & n \geq 7, j \geq 3. \end{cases}$$

$$M_3(P_3, T_n) = \lceil\frac{n}{3}\rceil, \ n \geq 7, \text{ dan}$$

$$M_4(P_3, T_n) = \lceil\frac{n}{4}\rceil, \ n \geq 9.$$

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada ibu Yanita, bapak Muhafzan dan ibu Des Welyyanti yang telah memberikan ilmu untuk perbaikan dalam penulisan penelitian ini.

Daftar Pustaka

[1] A.P. Burger dan J.H. Van Vuuren. (2004). Ramsey Numbers in Complete Balanced Multipartite Graphs, Part I : Set Numbers. *Discrete Math.*, 283: 37 – 43

[2] A.P. Burger dan J.H. Van Vuuren. (2004). Ramsey Numbers in Complete Balanced Multipartite Graphs, Part II : Size Numbers. *Discrete Math.*, 283: 45 – 49

[3] Bondy, J.A. dan U.S.R. Murty. (1976). *Graph Theory with Application.* Elsevier Science Publishing, New York.

[4] F. P. Ramsey. (1928). On a Problem of Formal Logic. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 30, 264 – 286

[5] John Clark dan D.A Holton. (1995). *A First Look At Graph Theory.* Prentice-Hall. University of Ottago. New Zealand

[6] Magnant, Colton dan A. Yusko. 2010. Ramsey Set Numbers In Balanced Complete Multipartite Graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* **77**: 187 – 196

[7] P. Erdos, dan G. Szekeres. (1935). A Combinatorial Problem in Geometry. *Compos. Math.* 2: 463 – 470

[8] Syafrizal Sy, Baskoro E.T., dan Uttunggadewa S. (2005). The Size Multipartite Ramsey Numbers For Paths. *Journal of Combinatorial Mathematic and Combinatorial Computing* 55: 103 – 107